828
1926

2748

Katona József Könyvtár
Kecskemét
D51000299877

ELEMI MÉRTAN.

ELSŐ RÉSZ

SZÁMTAN.

ÍRTA

Tatai András,

A' KECSKEMÉTI REF. FŐISKOLÁBAN MÉR- ÉS TERMÉSZETTAN' K. R. OKTATÓJA.

Kecskeméten.

Szab. könyvny. Szilády Károly' betűivel.

1842.

KECSKEMÉTI VÁROS Könyvtára

SZILÁDY

Előszó.

Miután az 1836-ban kiadott „Tiszta Mathesis' kezdete" czimű kézikönyvem' példányai mind elfogytak: szükség vala, vagy más' munkáját vennem fel oktatásimon vezérkönyvvül; vagy magamét újolag adnom ki. Nem egészen szűkölködünk ugyan — hála az égnek! — már édes anya-nyelvünkön irott, 's illy czélra is használható, mértani jeles munkákban: de hogy én, mások mellett ezeket is, inkább egy új kézikönyv' kidolgozásában kivántam használni, mint közűlök bármellyiket felvenni: erre részint azon nézet bíra, miszerint tanuló ifjaink' kezébe, kézikönyvek' kiadása végett alakult egyesületünk' nemes lelkű segélyével, a' létezőknél olcsóbbat kivántam juttatni; — részint azon szerény ohajtás, hogy a' mértan' honunkban

még meglehetős kopár mezején egy fűszállal ez által is több legyen.

Jelen munka, nem előbb említett mértani munkám' második kiadása; mert ez attól mind tartalma' bőségére, mind rendszerére, mind nyelvére nézve lényegesen különbözik. — Műszavakat illetőleg, miután ezek' használata máig is ingatag: mellyeket a' megállapodáshoz legközelebb állóknak véltem, azokkal kivántam élni jelen munkámban, 's előbbi munkám' nyelvétől e' részben is eltérni; — bárha meglehet, hogy majd az idő, vagy újabb vagy régibb jobbakkal fogja ezeket is fel cserélni.

Hogy tanulóink, a' drágább logarithmusi táblákat meg nem szerezhetvén, teljesen azok nélkül lenni — 's így a' számtan' ezen nagyérdekű részét gyakorlatilag nem tanulhatni ne kéntelenítessenek: jónak láttam a' természetes számok' logarithmusait 1-től 10000-ig, öt tizedes jegyekkel, (mennyi a' számítások' nagyobb része körül különben is elegendő), a' *Tables de logarithmes des nom-*

bres entiers, depuis un jusqu' à dix mille, par Jerôme de Lalande, — revue par le Baron Reynaud stb. Paris 1832. szerint, a' Babbage-félékkel is összenézve, olly móddal kiadni, hogy az ezeket magokban foglaló 40 táblák, jelen munkához is kötethessenek, külön is használhatók legyenek.

Tanulók' kezébe adandó, bármellynemű ugyan, de főként mértani munkában, tetemes fogyatkozás levén a' — kivált számos — sajtó hibák, 's még inkább ha azok előlegesen ki sem javíthatók: jelen munkát ha ezektől, hol idő-, hol kellő vigyázat' hiánya miatt meg nem menthetém is; de a' mellyeket a' már kinyomott ívekben, figyelmes átolvasáskor észrevettem, végül a' javitandók' tábláján mind feljegyeztem, — hogy a' tanúló ezeket előre kijavítván, minél hibátlanabb munkát vehessen kezébe.

Kecskemét, Aug. 20kán 1842.

Szerző.

Tartalom.

	Lap.
Bevezetés 1-től 5. §-ig	1 — 8
Számtani előismeretek 6 — 8. §.	9 — 12

ELSŐ SZAKASZ.

Közszámvetés.

1. Czikk.	Számlálás, és arab-jegyek' használata 9 — 12. §.	12 — 19
2. Czikk.	Egész számok' számolása 13 — 29. §.	19 — 59
3. Czikk.	Számok' oszthatósága, és sokszorozókra fejtése 30 — 43. §.	60 — 87
4. Czikk.	Tört-számok' számolása. — Általános tanok 44 — 47. §.	87 — 92
	Közönséges törtszámok 48 — 56. §. .	92 — 105
	Tizedes törtszámok 57 — 65. §. . . .	105 — 120
5. Czikk.	Összetes számok' számolása 66 — 74. §.	121 — 141

MÁSODIK SZAKASZ.

Egyetemes- v. Betűszámvetés.

1. Czikk.	Előismeretek 75 — 79. §.	142 — 150
2. Czikk.	Betűszámvetési algorithmusok 80—87. §.	150 — 171
3. Czikk.	Sokszorozók, vagy osztók 88 — 89. §.	171 — 174
4. Czikk.	Törtek; — Láncz-törtek 89 — 91. §.	174 — 184

HARMADIK SZAKASZ.

Hatványok és gyökerek.

1. Czikk.	A' hatványokról és gyökerekről általánoson, 's különösen az egytagú mennyiségekéről 92 — 95. §.	185 — 193
2. Czikk.	Két- 's több-tagú mennyiségek' emelése 96 — 98. §.	193 — 198

Lap.

3. Czikk. Gyökér-vonásról 99 — 104. §. . . . 199 — 214
4. Czikk. Gyökér-mennyiségek, 's azok körülti mütételek 105 — 109. §. . . . . 215 — 221

NEGYEDIK SZAKASZ.

Egyenletek, 's ezeknek algebrai feladatokra alkalmazása.

1. Czikk. Egyenletek, 's azoknak feloldása 110 — 118. §. . . . . 222 — 248
2. Czikk. Algebrai feladatok, — 's azok' feloldása 119 — 126. §. . . . . 248 — 283

ÖTÖDIK SZAKASZ.

Viszonyok, Arányok, Sorzatok.

1. Czikk. Viszonyok 127 — 132. §. . . . . 284 — 290
2. Czikk. Arányok 133 — 146. §. . . . . 290 — 319
3. Czikk. Sorzatok 147 — 154. §. . . . . 319 — 345

HATODIK SZAKASZ.

Logarithmusok vagy Arányszámok,

146. — 161. §. . . . . 346 — 370

Bevezetés.

1. §.

A' *mennyiség* (quantitas) minden dolgoknak közös tulajdona, melly abban áll, hogy azok több-kevesebb hasonfajta részekből állanak, vagy állani képzeltetnek; — vagy azon tulajdona a' dolgoknak, melly szerint azokat nagyobbakká 's kisebbekké lehet tenni, akár valósággal, akár képzelettel. — A' dolgok, ezen tulajdonuknál fogva *mennyik*-nek (quantum) neveztetnek: p. o. pénzdarab, csomópénz, búzaszem, búzarakás, gerenda, térföld, idő, sebesség, suly, magasság 'stb.

Minden dologban, vagy *mennyi*-ben, vagy csak a' részek' sokaságát tekintjük; vagy egyszersmind azon tért is mellyet a' dolog elfoglal. Az első esetben, mivel a' részek egymástól külön állók, vagy illyeknek képzeltetnek, neveztetik a' menyiség *vált*-nak, v. *váltrészű*-nek (quantitas discreta). A' másik esetben, mivel a' részek folytonos kapcsolatban állanak egymással, vagy illyeknek képzeltetnek, neveztetik a' mennyiség *folytonos*-nak (quantitas continua). — Az első esetben a' részek' sokaságát megtudni akarván, megszámláljuk azokat, 's innen a' vált mennyiség neveztetik *szám*-nak, — A' másik esetben azt vi'sgáljuk, minő tért foglal-el a' dolog, — 's innen a' folytonos mennyiség neveztetik *terjedet*-nek. p. o. egy rakás buza' mennyisége, a' men-

nyiben különálló szemekből áll, *vált*, — a' mennyiben bizonyos tért foglal el, folytonos; — egy gerenda' mennyisége, a' mennyiben több kevesebb részekből állónak képzeltethetik, *vált*, — a' mennyiben tért foglal el, *folytonos*.

Akármelly mennyinek mennyiségét úgy tudhatom meg, ha azt más, ismert, vagy meghatározott mennyiségü, hasonfajta mennyivel összevetem, 's megvi'sgálom hogy az ismertnél mennyivel, vagy mennyiszerte, több vagy kevesebb, nagyobb vagy kisebb az ismeretlen, — vagy hányszor van meg akár az ismert az ismeretlenben, akár az ismeretlen az ismertben. p. o. egy csomó tallér' mennyiségét megtudom, ha azt egy tallérral össze hasonlitom, 's megvi'sgálom hányszor van meg benne az egy tallér; — egy végposztó' hosszaságát megtudom, ha egy rőfnyi hosszu testtel összevetem, 's azt kérdem, hányszor van meg benne a' rőf? — egy kis darab posztó' hosszát is úgy tudom meg, ha azt a' rőffel összevetvén, azt kérdem, hányszorta nagyobb annál a' rőf? — Azon ismert mennyiségü mennyit, mellyhez az ismeretlent hasonlitjuk, nevezzük *mérték*-nek, — ezen munkálódást *mérés*-nek, — a' mértéknek és mérendönek egymással összefüggését pedig *viszony*-nak.

A' mennyiséget vagy tisztán tekinthetjük, mint csupa mennyiséget, a' nélkül, hogy azt valamelly tárgyra vinnők, 's ennyiben nevezzük azt *elvont* mennyiségnek (qu. abstracta), p. hat, nyolcz, tíz, 'sat; — vagy egyszersmind a' tárgyat is mellé tesszük, mellynek az mennyisége, p. o. hat ökör, nyolcz ló, tíz ember 'stb. 's ennyiben nevezzük azt *tárgyas* vagy *összetes* mennyiségnek (qu. concreta).

Az összetes mennyiségek ismét vagy *egy nemüek* (homogenea), mellyek egynevü tárgyakra vitetnek, p. o. hat óra, tíz óra, — vagy *különnemüek* (heterogenea)

mellyek külön nevü tárgyakra vitetnek, p. o. hat óra, tíz mértföld, öt forint. 'stb. — A' különnemüek ismét vagy *összevonhatók*, (reducibiles) mellyek egymás alá rendezett tárgyakra (nemekre, fajokra) vitetnek, p. o. hat forint, négy garas, két krajczár; — vagy *összevonhatlanok*, (irreducibiles) mellyek nem egymás alá rendezhető tárgyakra vitetnek, p. o. hat forint, két ló, öt dió.

2. §.

A' mennyiségek' tudománya neveztetik *Mértan*-nak (Mathesis.) Tanit tehát az a' mennyiségek' egymásbóli származásáról, — 's azoknak méréséről, vagy az ismeretleneknek az ismertekből kikereséséről.

Jegyzés. Mathesis görög szó, (μανθάνω, μαθέω, μεμάθησαι), tesz *tudományt*. Azért nevezték ezt a' görögök sajátlag *tudomány*nak, mert ennek tanai kétségbe hozhatlanok, — melly tulajdon semmi más tudományt ezenkivül nem illet.

A' mértan felosztatik *tisztára* (pura) és *alkalmazott*-ra (applicata). — A' *tiszta mértan* a' mennyiségek' törvényeit elvontan, azaz semmi tárgyra nem alkalmazva fejtegeti. Ennek két része van, u. m.

1) *Számtan* (Arithmetica) melly a' vált mennyiségekről, vagy számokról —

2) *Tértan* (Geometria) melly a' folytonos mennyiségekről, vagy terjedetről tanit.

Jegyzés. Ἀριθμητική t. i. τέχνη mesterség, tudomány, jö ἀριθμός tól = szám. Γεωμετρία jö ettől: γῆ v. γέα = föld, és μετρεω = mérem; sajátlag tesz földméréstant, mivel legelsöben földmérésre vették hasznát.

Az *alkalmazott mértan* azon igazságokat, mellyek a' mennyiségek körül a' tiszta mértanban felfedeztettek, bizonyos tárgyakra alkalmazza. — Innen az alkalmazott mértanban a' testeknek természeti sajátságaik is

tekintetbe jönek. Ennek főbb részei: *természettani mértan* (physica mathematica), és *műtani mértan* (technica mathematica), — Az első alá tartoznak: az *erőműtanok* (scientiae mechanicae), — a' *láttanok* (sc. opticae), az *égtanok* (sc. astronomicae). — A' másik alá: a' *gyakorlati mértan* (geometria practica), — az *építéstan* (architectura), — a' *hajózástan* (nautica); — 's mind ezeknek több alosztályzatai.

3. §.

A' mértan' előadásának *módszere* (methodus) abban áll, hogy kiindulván bizonyos alapigazságokból, mellyek semmi bebizonyitást nem kívánnak, mivel azokróli meggyőződés velünk született, 's ezeket egymással összevetvén, kihozunk belőlök néhány uj igazságokat, mellyeket ismét egymással összevetvén, belőlök ujabb 's ujabb igazságokat következtetünk; 's igy mindig lépcsönként emelkedünk ismertekről ismeretlenekre; — melly módszer sajátlag *mértani módszer*-nek (methodus mathematica) neveztetik.

Jegyz. Valamelly igazságot kétképen lehet megmutatni: 1) *összerakó módszeren* (methodo synthetica), ha elöl tétetik a' megmutatni való igazság, 's utána illő renden hordatnak elő azon igazságok, mellyekkel az bebizonyittatik. 2) *Fejtő módszeren* (methodo analytica) ha a' bizonyitó igazságok előre bocsáttatnak, 's azokból hozatik le, mint következet, a' megmutatni való igazság.

Azonban a' mértan' tudományos előadásában bizonyos *tételeket* (propositiones) szoktak használni, mellyek szerint, kivált a' régiebbek, ezen tudományt szoros rendszerbe vették. Ezen tételek kétfélék, u. m. *elméletiek* (theoreticae), mellyek körül csak az elmélkedés foglalatoskodik, — és *gyakorlatiak* (practicae), mellyek körül bizonyos cselekvés is kivántatik.

I. Az *elméletiek* ezek:

1) *Nyilvánvaló* (axioma), elméleti alaptétel, mellynek igaz voltáról senki sem kételkedik, 's igy bebizonyitni nem szükség, de nem is lehet. p. o. minden egész nagyobb a' maga részénél.

2) *Határozat* (definitio), ollyan elméleti tétel, melly valamelly dolognak, vagy fogalomnak, mind azon jegyeit elő adja, mellyek által azt más dolgoktól, 's fogalmuktól meglehet különböztetni. — A' határozat vagy *lényeges* (realis), melly a' dolog' lényegét, vagy is azt tevő tulajdonait, jegyeit adja elő; — vagy *származatos* (genetica), melly a' dolog' eredetét adja elő. p. o. ezen határozat: „az egyenes vonal nem egyéb, mint két pontnak „egymástóli legrövidebb távolsága," *lényeges;* ez pedig: „egyenes vonal származik, ha valamelly pont min„dig egy és ugyan azon irány felé mozogni képzelte„tik", *származatos.*

3) *Állitmány* (theorema), ollyan elméleti tétel, mellynek igaz voltát nem látjuk által, mig be nem bizonyitják. — Ennek tehát mindig utána jő a' *Bizonyitvány* (demonstratio), melly nem egyéb mint több bizonyos igazságoknak összevetése, a' végre, hogy azoknak összevetéséből az állitmány' igazvólta ki tünjék.

Az elméleti tételekhez számithatjuk még ezeket is:

a) *Következet*, v. *folyadék* (consectarium, corollarium), ollyan tétel', melly valamelly más tételből egyenesen foly, és semmi uj bizonyitást nem kiván.

b) *Jegyzet* (scholion), mellyben följegyeztetnek némelly, a' tétel történetét, alkalmazását 'sat. illető, tudni méltó dólgok.

c) *Egyezmény* v. *Vélemény* (hypothesis), ollyan tétel, melly közmegegyezés szerint vétetik fel a' végre, hogy segitségével a' mértani dolgozatok, 's bizonyitások könnyebekké 's szembetünöbbekké legyenek, p. o. minden kör' kerülete 360 fokra van felosztva. — Illyen egyezmény az is, hogy a' számokat, hangokat 'stb. illyen vagy amollyan jeggyel terjesszük szem elebe, a, b, c, 1, 2, 3, 4, 'stb.

II. *A' gyakorlatiak ezek:*

1) *Lehetség* v. *kivántmány* (postulatum), ollyan alaptétel, melly valaminek kétségkivüli teljesithetését nyilvánítja p. o. két pont közé egy vonalat lehet húzni.

2) *Feladat* (problema), gyakorlati tétel, melly olly valami teljesitendőt kiván, minek lehetőségét nem mindjárt láthatni által, hanem végbe vitele, valamelly igazságok' ismeretét, egybevetését, 's mesterséget kiván. p. o. △et körbe irni. — Annak előadása, mimódon lesz az meg, a' mit a' feladat kiván, neveztetik *Megfejtés*-nek (solutio, resolutio). — A' *megfejtés*' helyes volta ismét *bizonyitást* kiván.

4. §.

A' mértan' *haszna* nem csak abban áll, hogy annak segitségével fedezhetni fel sok ollyan dolgokat, mellyek az életben szükségesek p. o. erőmüveket 'sat; 's hogy ennek tudása nélkül a' természeti tudományokban előhaladni nem lehet: hanem különösen az ifjakra nézve legfőbb haszna az, hogy az elmét észrevehetőleg fejti, szoktatja az egyenes gondolkozásra, tiszta felvételre, rendes és kimeritő előadásra, — 's a' nehezebb tanulmányok' felfogására alkalmassá képzi.

5. §.

A' mi a' mértan' *történeteit* illeti: mikor kezdett ez elsőben tudományosan előadatni, nem tudatik. — Azt hiszik, hogy legrégibb időkben, a' Chaldaeusoknál, kik főként az égtanban gyönyörködtek, már a' mértan divatozott; — 's ezektől jött által Egyiptomba, hol a' Nilus' évenkénti kiöntése miatt, főként a' Geometria miveltetett. — Az egyiptomiaktól *Thales* és *Pythagoras* mintegy 600 évvel Krisztus előtt, a' mértani tudományokat görög országba vitték, mellyeket azután a' gö-

rögök írásaikkal tökéletesitettek. — Különös említést érdemelnek az alexandriai mértanárok, 's azoknak tanitványi p. *Euclides*, *Archimedes*, *Ptolemaeus*. — Az alexandriai iskolát az arabok ugyan elszélleszték, azonban a' mértant ők magok is kedvelték, 's mivelték mind keleten, mind nyugoton, Spanyol országban, és Egyiptomban. Az arabok nemcsak a' görög irók' munkáit forditották anyanyelvökre, hanem magok sok jeles eredetieket irtak. A' csillagászatban leginkább gyönyörködtek, a' honnan abban maig is sok arab nevek divatoznak. Ők a' háromszögmérés', 's betüvetés' feltalálói, — sőt a' számjegyek is, mellyekkel élünk, hihetően tőlök eredtek. — A' könyvnyomtatás' feltalálása óta tágabb tér nyilt, a' több tudományok között, a' mértan' mivelésére is, — 's azóta ez minden pallérozott nemzetek közt mivéltetvén, mind tökéletesíttetett, mind gazdagíttatott. — Nevezetes mértanárok vóltak a' 15-dik században: *Peurbach*, *Regiomontanus*, — 16-dikb. *Tartaglia*, *Carduanus*, *Maurolicus*, *Vieta*, *Ludolph de Ceulon*, — 17-ikben: *Neper* és *Brigge*, a' logarithmusok' feltalálói. — *Galilei*, *Toricelli*, *Pascal*, *Descartes*, *L. Hospital*, *Cassini*, *Huyghens*, *Harriot*, *Wallis*, *Bernoulli Jakab*, és *János*, *Kepler*, *Leibnitz*, *Newton*. — 18-dik 's 19-dikben: *Manfredi*, *Nicoli*, *Bernoulli Miklos* és *Dániel*, *Euler*, *Maclaurin*, *Taylor*, *Bradley*, *Moiven*, *Clairaut*, *d'Alembert*, *Lambert*, *Mayer Tobias*, *Kästner*, *Hindenburg*; — *Lagrange*, *Laplace*, *Legendre*, *Gausz*, *Lacroix*, *Reynaud*, *Garnier*, *Lacaille*, *Sturm*, *Klügel*, *Bugge*, — *Weidler*, *Metzburg*, *Fischer*, *Hadaly*, *Ohm*, *Mink*, *Kovács Martiniy*, *Littrow*, *Sachs* 'sat.

Hazánkban anyanyelvünkön kijött mértani munkák' száma még eddig igen kevés. *Dugonics* „Tudákosság' 4. könyve" 1800. — *Pethe* „Mathesis" 2. dar. 1812. — *Egy névtelen* „Bevezetés a' számvetésre a' magyar

és hozzátartozó tartományok' nemzeti iskoláinak számára." 1837. — *Klaber* „A' könnyü és gyors számvető 1838. — *Mendlik János* „A' magyar nevendékeket vezető mód a' számvetés' tudományában" 1838. — *Csondor János* „Gazdaságbeli számadó és számvevő tiszti utasítások." 1839. — *Erdélyi* v. *Verebélyi Jó'sef* „Hydrotechniai jegyzetek," 1840. — *Tarczy Lajos* „Elemi számtudomány" 1839. és „Tiszta mértan' elemei" 1841. — *Nagy Károly* „Arithmetica" 1835. „Elemi Algebra" 1837. „Kis számító" 1837. „Kis Geometra" 1838. — „Logarithmusi táblái," „magyar föld- 's égtekéje.—*Győri Sándor* „A' Buda és Pest közt épitendő álló hidról" 1839. — „Felsőbb Analysis' elemei" 1836, és 1840. — *Vállas Antal* „Egyetemes számtudomány" 1838. — „A' napórákról" 1838. — *Taubner Károly* „Mértan" 1841. Említést érdemelnek *Vásárhelyi Pálnak*, *Győri Sándornak*, *Vállas Antalnak*, folyó iratokban megjelent mértani értekezései.

TISZTA MÉRTAN.

ELSŐ RÉSZ

Számtan [Arithmetica].

Elő-ismeretek.

6. §.

Minden külön álló dolog (individuum), a' vele egy nevüek vagy egyfajták közt tekintve, — vagy minden dolognak egyenlő részei, külön külön véve, neveztetnek *egy*-nek (unum); azoknak illyen léte *egység*-nek (unitas), p. o. minden külön garas, a' több garasok közt, minden külön forint a' több forintok közt, *egy*. — Több egyek összevéve képeznek *számot* (numerus), p. o. hét garas tesz garasok' számát, — nyolcz forint, forintok' számát. Az *egy* tehát nem *szám*, hanem *számelem*, (elementum numeri).

Ugyan azon dolog lehet egy tekintetben *egy*, másban *szám*, p. o. a' forint, több forintokhoz képest *egy*, de garasokhoz képest *szám*, mert garasok' sokasága.

Ha az egyet nem egészen, hanem csak annak több kevesebb egyenlő részeit vesszük: ezen részletes mennyiség neveztetik *töredék*-nek vagy *törtszám*-nak (fractio). Innen a' számok kétfélék, u. m. 1) *épek* vagy *egészek* (integri numeri), mellyek tellyes egyek' sokasá-

gát, — 2) *törtek* vagy *töredékek* (fracti, v. fractiones), mellyek az egy' részeinek sokaságát jelentik.

7. §.

A' számok' szem eleibe terjesztésére *jegyek* (characteres, seu symbola) kivántatnak, mellyeket egyezmény szerint lehetne felvenni akárminőket. — Némelly nemzetek, mint a' görögök, zsidók, a' betűk' jegyeivel számjegyek gyanánt is éltek, p. o. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, 'sat. — A' romaiak is az abéczéből vettek némelly jegyeket a' számok' kijelentésére, mint I = *egy*, V = *öt*, X = *tiz*, L = *ötven*, C = *száz*, D vagy IↃ = *ötszáz*, M, v. CIↃ = *ezer*; azon megjegyzéssel, hogy ha többet jelentőhöz jobb felöl tétetik kevesebbet — vagy egyenlőt jelentő: akkor az hozzá adatik p. VI = *hat*, XXVII = *huszonhét*; ha pedig balja felöl tétetik kevesebbet jelentő, az belőle kivétetik, p. o. IV = *négy*, XL = *negyven*.

Már ma a' számvetők közönségesen e' következő tíz arab jegyekkel élnek:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

semmi — egy — kettő — három — négy — öt — hat — hét — nyolcz — kilencz.

mellyekkel, az alább előadandó módon, a' legnagyobb számokat is kifejezik.

Ezen arab jegyeknek meghatározott 's nem változó értékök van; és csak *ismert* mennyiséget jelenthetnek. Azonban a' számvetésben a' mennyiségek' egyetemes törvényeinek kifejtésére, — és az ismeretlen mennyiségek' kifejezésére, 's kikeresésére, ollyan jegyek szükségesek, mellyeknek meghatározott értekök ne légyen, hanem átalában csak *mennyiséget*, és ha egyes esetekre alkalmazzuk, akkor akármelly mennyiséget, kisebbet, nagyobbat jelentsenek; azonban némellyek azok közül *ismert*-, mások *ismeretlen* mennyiségek' jegyei

légyenek. — Illyen jegyek gyanánt szolgálnak a' latin ábecze' jegyei, olly móddal hogy az elsőbbekkel (A, a, B, b, C, c, D, d, 'sat. ismert —, a' hátulsókkal (x, y, z, v.) ismeretlen mennyiségeket szoktak kifejezni.

A' számokkal 's számjegyekkeli műtételeket tanító tudomány neveztetik *Számtan*-nak vagy *Számvetés*-nek. A' számjegyekkeli számvetés két féle: 1. *Közszámvetés* v. *határozott számvetés* (arithmetica vulgaris), mellyben határozott értékü, még pedig arabszámjegyek, — 2. *Betüszámvetés*, vagy *Egyetemes-számvetés*, vagy *határozatlan számvetés* (arithmetica literalis, vagy universalis), mellyben határozatlan értekü, még pedig betüjegyek használtatnak.

A' betüszámvetés, a' mennyiben ollyan egyetemes szabályokra 's képletekre (formula) vezet, mellyek szerint a' számtani és mértani feladatokat, valamint az alkalmazott mértanban előforduló minden feladatokat meglehet fejteni, neveztetik *Algebra*-nak v. *Analysis*-nek. P. o. illyen egyetemes számtani szabály, mellyre az algebra vezet ez: két ismeretlen mennyiségeknek (x és y), ha kiadatik *összegök* = a, és *külömbségök* = b; a' nagyobbik ismeretlen = x, annyi mint a' fél összeg = $\frac{a}{2}$ és félkülönbség = $\frac{b}{2}$ együtt véve, — a' kisebbik ismeretlen pedig = y annyi mint a' félösszeg- 's félkülönbség közti különbség; melly szabályt az algebra illy képletben fejez ki: $x = \frac{a+b}{2}$, és $y = \frac{a-b}{2}$. És ezen egyetemes szabályt akármelly egyes esetre lehet alkalmazni. p. o. legyen a = 27, b = 15, akkor: $x = \frac{27+15}{2} = 21$, és $y = \frac{27-15}{2} = 6$. — legyen a = 208, b = 164, akkor $x = \frac{208+164}{2} = 186$, és $y = \frac{208-164}{2} = 22$.

Az *alsóbb algebra*, vagy *véges mennyiségek' analysise* az egyszerübb és könnyebb eseteket adja elő; — a' *felsőbb algebra*, v. *végtelen mennyiségek' analysise* pedig nehezebb 's bonyolódottabb esetekkel foglalkozik.

8. §.

Ha a' mennyiségeket egymással egybevetjük: legelsőben is az tünik szemünkbe, hogy azok vagy *egyenlők* (aequalia); — vagy *nemegyenlők* (inaequalia.) A' nem egyenlők közül egyik kisebb, másik nagyobb; — a' kisebb (mint tiszta mennyiség), mindig része a' nagyobbnak. —

Ez a' mennyiségek' legegyszerübb összehasonlitása, 's egymás iránti viszonja. Innen indul ki a' mértan, — legelöl mindjárt előadván némelly, egyenlőséget illető alaptételeket. p. o.

1) *Minden mennyiség egyenlő maga magával.*

2) *Minden egész egyenlő a' maga részeivel együtt véve, és igy külön vett nehány részeinél nagyobb.*

3) *Az egyenlőket fel lehet cserélni egymással.* p. o. 12 helyett tehetek 2-szer 6-ot, — 3-szor 4-et.

4) *Ha két mennyiségek közül mindegyik egyenlő egy harmadikkal: azon két mennyiségek egymással is egyenlők.* p. o. 60 xr = 1 for.; — 20 gar. = 1 for., és igy 60 xr. = 20 garas.

5) *Ha valamelly mennyiség kisebb vagy nagyobb mint két egyenlő mennyiségek' egyike: ugy a' másiknál is épen annyival kisebb vagy nagyobb.*

6) *Ha két egyenlő mennyiségek közül mindegyikhez ugyan annyit adok; — vagy mindegyikből ugyanannyit veszek el; — vagy mindegyiket ugyan annyiszorta nagyobbitom, (ugyanazon számmal sokszorozom); — vagy mindegyiket ugyanannyiszorta kevesitem, — (ugyan azon számmal osztom el): azoknak egyenlőségök nem változik.*

ELSŐ SZAKASZ.

Köz-számvetés.

(Arithmetica vulgaris)

ELSŐ CZIKKELY.

A' számlálásról, és arab-jegyek' használatáról.

9. §.

Azon műtétel, melly szerint a' számokat bizonyos rendszerbe összegyüjtjük, kimondjuk, 's számjegyekkel kifejezzük, *számlálás*-nak (numeratio) neveztetik.

Ha az ember tízig elszámlál: ugy tetszik mintha egy kört végzett volna be, mellyet ezentúl szüntelen ujra meg ujra előkezd. — Ha kétszer végzi be: ott elő áll két tíz, vagy *húsz;* ha háromszor, ott három tiz, vagy *harmincz*, — igy a' négy tíz vagy *negyven*, 'sat. — ha tízszer végzi be, elő áll a' *száz*. Ha ismét az elment úton tízszer kicsinálja a' százat, elő áll az *ezer*; — ha az ezret ismét tízszer kicsinálja, *tízezer;* — ha tízezret ismét tízszer csinálja ki, elő áll a' *millio*, 's igy tovább mindig tízszerezvén az előbbit, *tíz-millio száz-millio, ezer-millio, tízezer-millio, százezer millio,* 's ezt ismét tízszer kicsinálván *billio*, 'sat.

Ebből azt látjuk hogy ezen számlálási rendszerben a' számokat bizonyos seregekre lehet osztani; 's minden sereg áll osztályokból és alosztályokból, melly alosztályok egymásután tízszerezve növekednek. Első alosztály az *egyeseké*, mellyben vannak az egytől a' tízig (kizárólag) levők; — második a' *tízeseké*, mellyben vannak tíztől százig levők; — harmadik a' *százasoké*, mellyben vannak száztól ezerig levők; — negyedik az

ezreseké, mellyben vannak ezertől tízezerig; — ötödik *tízezreseké* tízezertől százezerig; — hatodik *százezreseké*, százezertől ezer-ezerig, vagy egymillioig. Ezen hat alosztály alkot egy sereget, t. i. az *egyszerűek' seregét*. Ezután következik a' második sereg, t. i. a' *milliósoké*, hasonló hat alosztályokkal, u. m. *egymilliósok'*, *tízmilliósok'*, *százmilliósok'*, *ezermilliósok'*, *tízezermilliósok'*, *százezermilliósok'* alosztályaival. — Ezután a' harmadik, t. i. a' *billiósok'* serege, azután *trilliósoké*, *quadrilliósokké* 'sat. mind hasonló hat hat alosztályokkal. — Továbbá ezen hat alosztályok két osztályt képeznek, mellyek közül mindenikbe három három alosztály esik; — 's mindenik osztályban az első alosztály *egyes*, a' második *tízes*, a' harmadik *százas*. — Igy mennek tehát a' seregek, osztályok, és alosztályok:

I. egyszerűek' serege	*1. osztály*	egyesek
		tízesek
		százasok
	2. osztály ezresek	egy ezresek
		tíz ezresek
		száz ezresek
II. milliósok' serege	*1. osztály*	egy milliósok
		tíz milliósok
		száz milliósok
	2. osztály ezresek	egy ezer milliósok
		tízezer milliósok
		százezer milliósok
III. billiósok' serege	*1. osztály*	egy billiósok
		tíz billiósok
		száz billiósok
	2. osztály ezresek	egy ezer billiósok
		tízezer billiósok
		százezer billiósok

Ezen számlálási rendszer neveztetik *tizedes rendszernek* (systema numerandi decadicum).

10. §.

A' tizedes számlálási rendszert követve használjuk az arabjegyeket akármelly nagy számnak kifejezésére, olly móddal hogy ezen számjegyek' értéke nem csak idomjoktól, hanem helyüktől is függ, melly szerint akármelly számjegy, minden balfelé következő helyen tízszerte jelent többet, mint a' szomszéd jobb felőli helyen jelentene. Így példának okáért az 5, az első helyen jelent *öt egyet*, balra másodikon *öt tízet*, harmadikon *öt százat*, negyediken *öt ezret*, ötödiken *öt tíz ezret*, hatodikon *öt száz ezret*, hetediken *öt milliót* 'sat. E' szerint az első hat számjegy, (jobbról balra menvén), kimeríti az *egyszerűek seregét;* a' következő hat számjegy a' *milliósokét*, — a' következő hat a' *billiósokét*, — a' következő hat a' *trilliósokét*, 'sat. Minden seregben a' hat jegy feloszlik két osztályra, három három jegyekkel, melly osztályok közül a' második mindig *ezresek'* osztálya. Mindenik osztályban az első jegy *egyes*, a' második *tízes*, a' harmadik *százas;* ugy hogy az ezresek' osztályában az első jegy *egy ezres*, a' második *tíz ezres*, a' harmadik *száz ezres*. — Helyük szerint ez tehát a' számjegyek' értéke.

Ezen rendszerben a' *zerusnak*, vagy *semminek* (0) magában ugyan semmi értéke nincs; de a' jelentő jegyek közt nagy haszna van, mert azokat más helyre taszitván, jelentésöket tízszerte, vagy a' hány 0 van, annyiszor

tizszerte nagyobbá teszi. p. o. 5 = öt egy, — de 50 = öttíz, 500 = ötszáz, 5000 = ötezer. 'sat.

E' szerint a' leirt számjegyeknek bár melly hosszú sorát könnyü kimondani, olly móddal: hogy jobbról balfelé jövén, elszaggatjuk a' számjegyeket, hármával véve, osztályokra, (a' balról utólsó osztályban lehet kettő — vagy egy is); az első osztályt a' másodiktól kezdő elkülönítheti alól tett ponttal, — a' másodikat a' harmadiktól felyül tett egy ponttal, — a' harmadikat a' negyediktől ismét alól tett ponttal, — a' negyediket az ötödiktől felyül tett két ponttal, 'sat. — Már a' hol alól áll pont: oda mindig *ezret* mondjunk; — a' hol pedig felyül: oda a' pontok' számához képest *milliot* ha egy —, *billiot* ha kettő, *trilliot* ha három pont van. 'sat. Minden osztályban pedig a' bal felöl első jegy *százas*, a' második *tizes*, a' harmadik *egyes*. P. o. 32'''780, 921'''304,678''310,023'400,213. = *harminczkét quadrillio, hétszáz nyólczvanezer kilencz száz huszonegy trillio, háromszáz négyezer hatszáz hetvennyólcz billio, háromszáz tízezer huszonhárom millio, négyszáz ezer kétszáz tizenhárom.*

A' kimondott számokat jegyekkel leirni szinte könnyü illy móddal:

1) Mivel az osztályok' három jegyei közül, a' balfelőli első *százat*, a' második *tízet*, a' harmadik *egyet* jelent: arra kell legelsőben vigyázni, min kezdődik a' kimondott szám? Ha százason kezdődik: ugy az első osztály mindjárt három jegyből áll; de ha tízesen, ugy csak kettőből; — ha egyesen, ugy csak egyből; — a' többi osztályok pedig mind háromból.

2) Figyelmezni kell, hogy az első osztály millios-, billios-, trillios-, 'sat. vagy pedig ezres-e, — 's a' szerint kell tenni pontot (kezdőnek) vagy alól, vagy felyül.

3) , Mivel minden osztályban három jegynek kell lenni, t. i. százasnak, tízesnek, egyesnek; ha ezek közül valamellyik hiányzik: annak helyét 0-sal kell betölteni, p. o. *huszonhatezer kétszáz öt millio, hatezer nyólczszáz:* = 26,205'006,800.

11. §.

Az előadottak szerint, a' tizedes számlálási rendszerben, balról jobb felé mindig tízszerte kisebb mennyiségek következnek egymás után, p. a' 3-dik helyen százasok, a' 2-dikon tízesek, az 1-sön egyesek vannak. —

De semmi sem áll ellent, hogy ugyan ezen törvény szerint tovább is ne menjünk; úgy hogy az egyesek' helyétől jobbra első helyre tett jegy *tízszerte*, a' második helyre tett 100-*szorta*, a' harmadikra tett *ezerszerte* kevesebbet jelentsen az egynél.

Ezen új mennyiségek tehát nem, mint előbb, tízszerezett *növekedései* az egynek, hanem tízszerezett *kevesedései*, vagy *részei;* vagy is ezek *részletek*, *töredékek*, *törtszámok* (fractiones); és mivel ezen törtszámok' jegyei minden jobbra következő helyen tízszerte kevesebbet jelentenek, *tizedes törtek*-nek (fractiones decimales) neveztetnek.

Hogy valamelly leirt számban a' tizedes törteket az egészektől megkülönböztessük: el szoktuk ezeket választani amazoktól egy alól tett vonással, p. o. 472,328 annyit tesz mint 472 egész, 3 tized.-, 2 század-, 8 ezredrész; — vagy a' mi mindegy = 472 egyek, és az egynek 328 ezredrészei.

12. §.

A' tizedes számlálási rendszerben tehát tíz jeggyel fejezhetünk ki akármelly kisebb nagyobb mennyiségeket.

Azonban ezt tíznél kevesebb vagy több jeggyel is tehetnénk, a' 0-t mindenkor helytartó, vagy odább taszító, 's jelentés-növesztő gyanánt használván. p. o. két jeggyel (1, 0) olly móddal, hogy az 1 az első helyen *egyet*, balra másodikon *kettőt*, harmadikon *négyet*, 's így minden következő helyen kétszerte többet jelentsen, mint a' jobb felőli szomszéd helyen. E' szerint 10 = kettő, 11 = három, 100 = négy, 101 = öt, 110 = hat, 111 = hét, 1000 = nyólcz, 1011 = tizenegy. — Ezt nevezik *kettedes rendszer*-nek (systema dyadicum), mellyben látnivaló, hogy a' nagyobb mennyiségek' kifejezésére sok jegyek kivántatnak. — Hasonlólag három jeggyel (1,2,0) olly móddal, hogy minden balra következő helyen mindenik jegy háromszorta jelentsen többet. E' szerint p. o. egy = 1, kettő = 2, három = 10, négy = 11, öt = 12, hat = 20, hét = 21, nyólcz = 22. 'sat. Ez neveztetik *hármados rendszernek* (systema triadicum), mellyben már kevesebb jegy kivántatik a' nagy mennyiségek' kifejezésére, mint az előbbiben. — Még kevesebb jeggyel lehetne kifejezni nagy menyiségeket, ha az ember felvenne négy jegyet (1, 2, 3, 0), és minden balra következő helyen mindenik jegy négyszerte jelentene többet. E' szerint egy = 1, kettő = 2, három = 3, négy = 10, öt = 11, hat = 12, hét = 13, nyólcz = 20, kilencz = 21, tíz = 22. 's a' t. — Már folytatólag lehetne felvenni öt, hat, hét, nyólcz, kilencz jegyet, úgy hogy a' balra következő helyen mindenik ötszörte, hatszorta, hétszerte, nyólczszorta, kilenczszerte jelentene többet. — És talán így mentek arra, hogy felvegyenek tíz jegyet, mellyek közül mindenik, minden balra következő helyen tízszerte többet jelent (systema decadicum). — Ezt folytatni lehetne tovább is, felvévén tizenegy, tizenkét 'sat. jegyeket, mellyek tizenegyszerte, tizenkétszerte 'sat. többet jelen-

tenének minden balra következő helyeken. — De a' számok' tizedes kereksége azt kívánja, hogy tíznél tovább ne menjünk.

MÁSODIK CZIKKELY.

Az egész számok' számolásáról.

13. §.

Minden mennyiséget kétkép lehet változtatni, u. m. vagy *növeszteni*, vagy *fogyasztani*. Mind a' növesztés, mind a' fogyasztás, három három féle számolási műtételek által történhető, u. m.

A) *Növesztési műtételek:*

1) Ha két, vagy több, akár elvont, akár összetes, egynemü, vagy összevonható, nem egyenlő számok egybegyüjtetnek: ezen számolási műtétel neveztetik *összeadás*-nak (additio).

2) ha valamelly szám önmagához annyiszor adatik, a' hány *egy* van egy másik számban: ezen számolási műtétel neveztetik *sokszorozás*-nak (multiplicatio.)

3) ha valamelly szám néhány ízben maga magával sokszoroztatik: ezen műtétel neveztetik *emelésnek* (elevatio). Itt minden szám úgy tekintetik, mint az emelés' első fokán álló; ha egyszer sokszoroztatik maga magával, lesz az emelés' másod fokán, — ha kétszer, harmad fokán 'sat.; — ezen emelési fokok *hatványok*-nak (potentia) neveztetnek.

B) *Fogyasztási műtételek:*

1) ha valamelly kisebb szám egy nagyobb számból egyszer kivétetik: ezen műtétel neveztetik *kivonás*-nak (substractio). Ez épen ellenkező az összeadással.

2) ha valamelly kisebb szám egy nagyobból annyiszor vétetik ki, a' hányszor meg van benne: ezen műtétel neveztetik *elosztásnak* (divisio). Ez épen ellenkező a' sokszorozással.

3) ha valamelly számhoz, mint bizonyos fokú hatványhoz, ollyan szám kerestetik, melly maga magával annyiszor sokszoroztatván, a' hányadik fokú a' hatvány, ezen kiadott hatványt származtassa: ezen műtétel neveztetik *gyökérvonás*-nak (extractio radicis); 's a' keresett szám, a' hatványhoz képest, *gyökér*-nek. — Ez épen ellenkező az emeléssel.

Mind ezen műtételekről a' magok helyén bővebben fogunk tanulni. — Most annyit jegyezzünk meg, hogy négyen ezek közül. u. m. az *összeadás*, *kivonás*, *sokszorozás*, *elosztás*, neveztetnek számolási *alapmütételek*-nek (algorithmus).

14. §.

Rövidség' és világosság' okáért a' mértanban jegyek szükségesek. A' számolási műtételek körül e' következő jegyek használtatnak:

1) *Összeadás*' jegye a' függőleg álló kereszt (+) az összeadandók között, mellyet így mondunk ki: *meg*, vagy *több*, (plus). —

2) *Kivonás*' jegye a' fekvő vonal (—) mellyet így mondunk ki: *kivéve*. (minus).

Jegyzés. Ugyan ezen (+ —) jegyek az igenleges (positiva) és nemleges mennyiségeknek is jegyei, — mellyekről később fogunk látni.

3) *Sokszorozás*' jegye vagy egy pont (.), vagy fekvő kereszt (×) p. a.b, vagy a×b

4) *Osztás*' jegye vagy két pont (:) melly előtt áll az osztandó, utána az osztó; — vagy egy vonal, melly-

nek felette az osztandó, alatta az osztó áll. — Ez utóbbi alakban áll a' törtszám is.

5) Az *emelések*' fokait mutatják a' szám vagy betü felibe tett apró számjegyek.

6) *Gyökér*' jegye $\surd$, melly jobbra megnyujtatik ha alá többtagú szám jö. péld. $\surd a$, $\surd a \times b - c$; 's bele iratik apró számjeggyel, hányadik gyökér kivántatik.

7) *Egyenlőség*' jegye két egymásmellett fekvő vizmentes (látlagos) vonal (=)

8) *Nem-egyenlőség*' jegye ez: (<) mellynek nyilása a' nagyobbik felöl esik p. o. $5 > 3$ öt *nagyobb* mint három, $2 < 4$ kettő *kisebb* mint négy.

9) A' *zárjegyek*, v. *korlátok* (· ··), [····] ott használtatnak, hol több tagú mennyiségek egy mennyiség gyanánt vétetnek, 's velök egy műtétel kivántatik. p o. $3 \times (5 + 2)$.

10) A' *végetlenség*' jegye egy fekvő nyólcz (∞).

15. §.

Az előadott műtételi jegyekkel így élünk:

1) ha két mennyiség A, és B, összeadandó, kifejezzük így: $A + B$, hasonlólag $5 + 8$; így ha három tag összeadandó: $A + B + C$, $5 + 3 + 2$, — így akárhány tag: $A + B + C + D$'s a' t. $7 + 4 + 5 + 22 + 115$. 'sat.

2) ha valamelly mennyiségből p. o. A, egy másik p. o. B. kivonandó: kifejeztetik így: $A - B$. így $8 - 5$, $22 - 15$. — Hasonlólag $A - B - C$ azt mutatja hogy A-ból, mind B-t, mind C-t ki kell vonni; $8 - 3 - 2$ azt mutatja hogy 8-ból, mind 3-t, mind 2-t ki kell vonni, 's marad 3. Igy:

$$A - B - C - D - E - F - G - H \text{ 'sat.}$$
$$1235 - 132 - 15 - 8 - 22 - 33 - 54$$

azt mutatja hogy az első tagból (A, és 1235) a' többi

mind kivonassék. — Ha pedig több tagú mennyiségnél a' + és — jegyek váltogatva jönek elő: akkor minden + jegyűek összeadandók, és minden — jegyűek az összegből kivonandók. p. o. $A+B-C+D-F$ azt mutatja, hogy az A, B, D összeadandók, a' C és F pedig kivonandók. — Néha illyen jegy is szükséges ($\pm, \mp$) melly azt mutatja, hogy egyik mennyiséghez a' másik vagy hozzáadandó, vagy kivonandó.

3) ha A sokszoroztatik B-vel: így fejezzük ki: A. B, vagy $A \times B$. — Ha több tagok közt áll ezen jegy, p. o. A. B. C. D. vagy 2. 3. 5. 6. az azt teszi, hogy A sokszoroztassék B-vel, — a' mi abból ered, az C-vel, a' mi abból, az D-vel; — 2 sokszoroztassék 3-mal $= 6$, ez ismét 5-el $= 30$, ez ismét 6-al $= 180$.

4) ha A elosztandó B-vel: így fejeztetik ki: A : B. vagy $\frac{A}{B}$; így 12 : 3, vagy $\frac{12}{3}$. Ha még egy mennyiség következik osztás' jegyével, az azt teszi, hogy az előbbi osztás' eredményét el kell ezzel osztani, p. $\frac{24}{6} : 2$, azaz 4-et el kell osztani 2-vel. — így A : B : C, azaz miután A-t elosztottuk B-vel, annak eredményét ismét oszszuk el C-vel. — Ugyanezt így is ki lehet fejezni: $\frac{24:6}{2}$, $\frac{A:B}{C}$, $\frac{24/6}{2}$, $\frac{A/B}{C}$. Ezen kifejezés pedig: $24:\frac{6}{2}$ ezt teszi: 24-et el kell osztani azon eredménnyel, melly kijő, ha 6 elosztatik 2-vel.

5) valamelly mennyiségnek (A) akármelly fokra (m) emelése így fejeztetik ki: A^m, vagy határozott fokra emelése így: A^2, A^3, A^4 'sat.

6) ha valamelly mennyiségből akárhányadik gyökeret kell vonni, azt így fejezzük ki: $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[m]{B}$. vagy meghatározva: $\sqrt[2]{A}$, $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[4]{A}$, 'sat. Megjegyzendő, hogy mikor *másod-*, vagy ugynevezett *négyleg* gyökeret

kell vonni: akkor a' $\surd$ jegybe semmit sem írunk, de a' 2-t oda értjük.

7) az egyenlőség' jegyével akkor élünk, mikor ugyanazon mennyiséget több alakban kifejezünk. p. o. $12 = 8+4 = 3\times 4$.

8) Ezen kifejezés $A <> B$ ezt teszi: A vagy nagyobb, vagy kisebb mint B. Ez pedig $A >< B$ ezt teszi: A a' B-vel semmi esetre nem egyenlő.

9) A' zárjegyek' hasznát ezen példa megmutatja: Ha A-t sokszorozni kell B — C-vel, vagy is a' B és C közti különbséggel: így irjuk le: A. (B—C) — Ha ezt így irnánk: A. B—C akkor ezt tenné: A-t sokszorozni kell B-vel, 's annak eredményeből ki kell vonni C-t. — Így 6 : 3-1 egészen más mint 6 : (3—1.) Erre nézve tehát ezt tartsuk meg: hogy ha valamelly mennyiséget sokszorozni, vagy elosztani kell zárjegybe tett többtagú mennyiséggel: akkor a' zárjegyet el nem hagyhatjuk, — hanemha a' sokszorozandó' minden tagját a' sokszoró' minden tagjával külön sokszorozzuk, mint (a+b). (c+d) így: $ac+bc+ad+bd$; — az osztásnál pedig az osztót az osztandónak zárjegy nélkül alá irjuk, így $(a+b) : (c+d) = \frac{a+b}{c+d}$. — De az összeadásnál a' zárjegyet egyszerűen elhagyhatjuk, p. o. $A+(B+C)$ mindegy így is: $A+B+C$; — és $A+(B—C)$ így is jól van: $A+B-C$. Mert akár előbb a' B-ből vegyük ki a' C-t, és azután ezen maradékot adjuk az A-hoz; — akár előbb A-hoz adjuk B-t, azután ezen összegből vonjuk ki C-t, mindegy. — Végre a' kivonásnál, ha a' zárjegyet elhagyjuk, az abban volt tag + jegye — szá; a' — pedig + szá változik. így: $A-(B+C) = A-B-C$, mert a' kivonandó B növekszik C-vel, azaz a' C-t is ki kell vonni A-ból. Hasonlólag: $A-(B-C) = A-B+C$, mert mindegy akár C-vel kevesített B-t vonjak ki A-ból, akár C-vel növesztett A-ból vonjak ki B-t.

16. §.

Mielőtt a' számolási műtételek' bővebb előadására mennénk: méltó lesz figyelemre venni az *egy*-nek, vagy *egység*-nek némelly sajátságait.

Az *egy* valamint a' nála nagyobb —, t. i. az egész számoknak kezdője, — úgy határa a' nála kisebbeknek, t. i. a' törtszámoknak. — Az egy tehát közép helyen áll az egész- és a' tört számok között, 's tőle kezdve, egy felöl végetlenül növekednek az egészek, más felöl végetlenül kicsinyednek a' törtszámok.

1) ha valamelly mennyiséghez *egy* adatik: az növekszik eggyel, 's így származott a' természetes számok' sora.

2) ha valamelly mennyiségből *egy* elvétetik, kevesebbedik eggyel; — így jövünk lefelé a' természetes számok' során, míg az egyre jutunk.

3) ha az egyből *egy* elvétetik, ott marad $= 0$. Azon túl mik legyenek, majd megtanuljuk, midőn az igenleges és nemleges mennyiségekről szólandunk.

4) ha valamelly mennyiség az *egységgel* sokszoroztatik: ugyanaz marad, a' mi volt. p. o. $A.1 = A$.

5) ha valamelly mennyiség az *egységgel* elosztatik: ugyanaz marad p. o. $\frac{A}{1} = A$.

6) Akárhányszor sokszoroztassék, vagy osztassék el valamelly szám az *eggyel*: nem változik. p. o. $A.1.1.1.1.1. = A$, és $A:1:1:1:1:1: = A$. És ez alkalmat nyujt a' mennyiségek' különféle alakbani kifejezésére. p. o. $A.1 = A, \frac{A}{1} = A, 150 = 150.1, 150 = \frac{150}{1}$.

7) Az *egység* változatlan marad, bár hanyadik fokra emeltessék. p. o. $1^{25} = 1$.

8) Hasonlólag változatlan marad, bár hanyadik gyökere vonassék.
p. o. $\sqrt[25]{1} = 1$.

17. §.

A' számolási műtételeket megelőzőleg, szinte nem lesz helyén kivűl egykét előleges jegyzést tenni az egyenletekről.

Egyenlet-nek (aequatio) neveztetik ugyanazon mennyiségnek két alakbani kifejezete, melly két alakok az egyenlőség' jegyével összeköttetnek. p. o. $A = B$, $5 = 3 + 2$ — Az egyenletnek két része van, egyik a' jegy előtt, másik utána; 's mindenik részben több tagok lehetnek. p. o. $A + B = C - D$; $5 + 9 = 7.2$.

Az egyenlet' két részeit változtatni lehet a' nélkül hogy azoknak egyenlőségök felbomlanék, — a' felebb (8. §. 6ik szám) előadott alaptételek szerint. Jelesen.

1) ha az egyenlet' mindkét részéhez ugyanazt, vagy ugyanannyit adok: ez által az egyenlőség fel nem bomlik. p. o. $8 - 5 = 3$. Ha a' — jegyü 5-t az első részből elhagyom, ez által azt nagyobbítom 5-el; és így ugyanannyival a' másik részt is nagyobbítnom kell, — vagy az 5-t + jeggyel oda adnom, $8 = 3 + 5$.

2) ha az egyenlet' mindkét részéből ugyanannyit elveszek: megmarad az egyenlőség. p. o. $9 + 4 = 13$. Ha az első részből a' + jegyü 4-et elveszem, ez által azt kevesítem 4-el, — és így ugyanannyival a' másik részt is kevesítnem kell, vagy a' 4-et — jeggyel oda adnom. $9 = 13 - 4$.

3) ha az egyenlet' mindkét részét ugyanannyiszorta nagyobbítom, vagy ugyanazzal szokszorozom: az

egyenlőség megmarad. p. o. $\frac{12}{3} = 4$. Ha ezen egyenlet' első részéből az osztó 3-t elhagyom: az által azt 3-szorta tettem nagyobbá; és így a' másik részt is 3-szorta nagyobbá kell tennem, vagyis a' 3-t sokszorozás' jegyével általvinnem. $12 = 4.3$.

4) ha az egyenlet' mindkét részét, ugyanannyiszorta kevesítem, vagy ugyanazon számmal elosztom: az egyenlőség megmarad. p. o. $2.5 = 10$. Ha ezen egyenlet' első részéből a' sokszoró 5-t, vagy 2-t elhagyom: ez által azt 5-szörte, vagy 2-szerte kevesítem; és igy a' másik részt is 5- vagy 2-szerte kell kevesítnem, vagy is az 5-t, vagy 2-t osztás' jegyével által vinnem. $2 = \frac{10}{5}$, vagy $5 = \frac{10}{2}$.

Általában tehát tartsuk meg, hogy az egyenlet' egyik részéből a' másikba akármelly tagot ellenkező jeggyel által lehet vinni. p. o. $A+B=C$, $A=C-B$; $A.B=C$; $A=\frac{C}{B}$; $A-B=C$, $A=C+B$; $\frac{A}{B}=C$, $A=C.B$.

18. §.

A' számolási négy alap-műtételek (algorithmus) tehát ezek: *összeadás*, *kivonás*, *sokszorozás*, *elosztás*.

1-ör. *Összeadás.*

Az összeadás ollyan számolási műtétel, melly által több kiadott számokat, mint *részeket*, egy *egész*-be összegyüjtünk, — vagy keresünk egy ollyan számot (X) melly maga egyenlő legyen a' több kiadott számokkal (A, B. 'sat.) összevéve. — A' kiadott számok, vagy részek, *összeadandók*-nak (addendi), a' keresett egész pedig *összeg*-nek (summa) neveztetik. p. o. $A+B=X$.

Az elvont vagy egynemű számok' összadási műtételét illetőleg:

1) az *egyjegyű* számok' összeadására szabályt adni nem lehet, — elég az hogy abban gyakorlás által készséget kell szerezni.

2) a' *többjegyűek* egymás alá iratnak, úgy hogy az egynevűek egymás alá essenek, t. i. egyesek egyesek alá, tízesek tízesek alá, százasok százasok alá 'sat. 's vonal húzatik alájok, melly az összeadandókat az összegtől elkülönítse.

3. Mivel csak az egynevűeket lehet összeadni: úgy esnék az összeadás, hogy minden egynevűek egymással külön külön összeadatnának (egyesek egyesekkel, tízesek tízesekkel 'sat.); — az így nyert részletes összegek egymás alá, a' jegyek rangja szerint, leiratnának; — 's utoljára ezek egy egyetemes összegbe gyüjtetnének, mint a' következő példa mutatja:

8452	vagy	6974
7385		5389
7		13
13		15
7		12
15		11
15837		12363

Azonban látni való, hogy rövidebb lesz a' munka, ha valahányszor ezen részletes összegek egy jegynél többből állanak, mindannyiszor csak az alsóbb rangú jegy iratik le; a' felsőbb, (vagy, ha talán több is volna, a' felsőbbek) a' következő felsőbb rangú alosztály' jegyeihez adatnak; melly szerint a' második példa így lesz:

6974
5389
12363 mint előbb.

Igy: 835 vagy 835
247 247
302 302
468 468
22 1852.
13
17
1852

4) Próbája az összeadásnak az, ha a' munkát ismételjük, még pedig ha előbb felfelé mentünk a' jegyeken, most lefelé jőjjünk; 's ha most is ugyanazon összeg jő ki: nincs hiba az összeadásban. — Vagy pedig mivel $A+B+C=X$, és $X-A-B-C=0$, ha az összegből az összeadandókat mind kivonván, semmi sem marad: úgy az összeadás jól ment végbe.

19. §.

2-szor. Kivonás.

Miután az összeadásban részeket gyűjtöttünk összve egészbe: most már kérdés, miként lehet valamelly kiadott egészet részekre szakgatni?, jelesen, miként lehet két részre, mellyek közül az egyik kiadatik? — vagy más szókkal: ha kiadatik valamelly *egész*, vagy *összeg*, és annak két összeállító *részei* közül *egyik*: miként lehet megtalálni a' *másik*- vagy *pótló* részt? — Legyen a' kiadott *egész* $=A$, annak kiadott része $=B$, a' keresett pótló rész pedig $=X$: látni való, hogy ezen két rész, B és X, együtt annyi mint az egész A, — vagy egyenlettel kifejezve: $A=B+X$,- és $A-B=X$, és $A-X=B$; mellyből látni való, hogy ha a' kiadott egészből, a' kiadott részt kivonom: a' potlékot megtalálom; valamint az is látni való, hogy B az X-el együtt annyi mint A, és A az X-el kevesítve annyi mint B,—

vagy is hogy a' potló rész, a' kiadott egész- és kiadott rész közötti, vagy a' kiadott nagyobb és kiadott kisebb szám közötti *különbséget* mutatja. — Azon fogyasztási műtétel tehát, melly szerint egy kiadott kisebbnek, egy kiadott nagyobbóli kivétele által, a' kettő közötti különbséget kikeressük, *kivonás*-nak neveztetik.

A' kivonásban 3 szám van, u. m. adott nagyobb, vagy egész, vagy összeg, melly *kisebbítendő*-nek — (minuendus), — adott kisebb, vagy adott rész, melly *kivonandó*-nak — (subtrahendus), és keresett pótló rész, melly *különbség*-nek (differentia), vagy *maradék*-nak (residuum) neveztetik.

A' határozatlan mennyiségeknél szintúgy mint a' határozottaknál, ha két mennyiségnek különbsége kivántatik: gyakran csak mütételre útalólag kifejeztetik az a' kivonás' jegyével. p. o. a — b, az *a* és *b* közti-, — 135 — 93 a' 135 és 93 közti különbségre útal.

Jegyz. Az *összeadás* és *kivonás* megegyeznek annyiban, hogy mindenikben *egész* és *részek* forognak fenn. Különböznek, sőt ellenkeznek annyiban, hogy az *összeadás*-ban részek adatnak ki, 's egész kerestetik; — a' *kivonás*-ban pedig kiadatik az egész, és annak egyik része, — kerestetik a' másik része.

20. §.

Az elvont vagy egynemű számok' kivonási műtételét illetőleg:

1) az egyjegyűek' kivonására gyakorlás által kell készséget szerezni.

2) a' többjegyűek' kivonhatására: úgy iratik a' kisebbítendő alá a' kivonandó, hogy az ugyanazon rangú jegyek egymás alá essenek; 's vonal húzatván alájok, kezdődik a' kivonás az egyeseken, — azután következnek a' tízesek, százasok 'sat.; a' maradék vagy különbség a' megfelelő jegyek alá iratik.

3) Ha a' felső jegy az alsóval egyenlő: akkor a' maradékba *0* jő.

4) Ha a' felső jegy kisebb mint az alsó: akkor a' balra következő jegytől egyet kölcsönözünk, melly itt tízet tesz, (a' tizedes rendszer' törvénye szerint); — 's ez által a' szomszéd jegy eggyel kevesedett, mit felibe tett ponttal megjegyezhetünk.

5) Ha pedig a' felsőnek balra következő jegye, vagy több következő jegyei is 0-ok volnának: akkor mind addig megyünk, míg jelentő jegyet nem találunk; 's attól egyet elvévén, a' közbe eső 0-ok 9-ekké válnak, — a' legutolsó alosztályba pedig tíz jő. Mert p.

20003 *kisebbit.*
15615 *kivonand.*

5-egyet 3 egyből ki nem vehetek, — kérnék hát a' tízes alosztálytól egy tízet, de ott *0* van, sőt a' százas, sőt az ezres sem adhat. Kérek hát a' tízezrestől *egy tízezret.* De annyira nincs szükségem; tehát 9-ezret hagyok az ezres alosztályban, 's még marad *ezer*, ebből 9-százat hagyok a' százasban, 's még marad *száz*, — ebből 9 tízet hagyok a' tízesben, — 's így csak tíz egyet hozok az egyesek' alosztályába.

példa.	8420639	*kisebbit.*	20003
	3614257	*kivon.*	15615
	4806382	*különbs.*	4388

5) Próbája a' kivonásnak az összeadás, t. i. ha a' kivonandó a' különbséggel összeadatván, az itt származott összeg egyenlő lesz a' kisebbítendővel: úgy nincs hiba a' kivonásban; — mert mint láttuk $A = B + X$. — Ellenben, mint § 18 mondánk, az összeadásnak próbája a' kivonás.

21. §.

A' kivonás körül jegyezzük meg e' következő alaptételeket:

1) *Ha a' kisebbítendőből a' kivonandót kivonjuk: a' különbséget nyerjük.* $A - B = X$; $9 - 5 = 4$.

2) *Ha a' kisebbítendőből a' különbséget kivonjuk: a' kivonandót nyerjük.* $A - X = B$; $9 - 4 = 5$.

3) *Ha a' kivonandót és különbséget összeadjuk: a' kisebbítendőt nyerjük,* $B + X = A$; $5 + 4 = 9$.

4) *Ha megmaradván a' kivonandó; a' kissebbítendő nő, vagy fogy: ugyanannyival nő vagy fogy a' különbség is.* Mert $A - B = X$; már ha az egyenlet' első részét növesztem, vagy fogyasztom valamivel p. *a*-val, ugyanazzal a' másik részt is növeszteni vagy fogyasztani kell, 's így:

$A + a - B = X + a$; $9 + 2 - 4 = 5 + 2$.

$A - a - B = X - a$; $9 - 2 - 4 = 5 - 2$.

5) *Ha megmaradván a' kisebbítendő; a' kivonandó nő,* vagy is mégtöbb kivonandó járul hozzá: ugyananynyi kivonandó járul a' különbséghez is, — vagy is *ugyanannyival fogy a' különbség.* p. o.

$A - B - a = X - a$; $9 - 4 - 1 = 5 - 1$.

6) *Ha megmaradván a' kisebbítendő; a' kivonandó' fogy: ugyanannyival nő a' különbség.* Mert ha a' kivonandót fogyasztom: csak annyi mintha e' helyett a' kisebbítendőt ugyanannyival növeszteném.

$A - (B - a) = A - B + a = X + a$,

$9 - (4 - 2) = 9 + 2 - 4 = 5 + 2$.

7) *Ha mind a' kisebbítendőt, mind a' kivonandót egyformán növesztem, vagy fogyasztom: a' különbség nem változik.* Mert nővén a' kissebbítendő: nő a' különbség; de növén a' kivonandó, fogy a' különbség, a' különbség tehát a' mennyit nő, annyit fogy, azaz nem változik. — Valamint: fogyván a' kisebb. nő a' kül. és így a' mennyit fogy, annyit nő, azaz nem változik, péld. o.

$$5-2=3, \text{ és } (5+4)-(2+4)=3$$
$$(A+a)-(B+a)=A+a-B-a=X+a-a=X.$$

Jegyz. Itt a' növekedést és fogyást mindig hozzáadás- és kivonás által történendőnek vesszük.

22. §.

3-*szor. Sokszorozás.*

A' *sokszorozás* ollyan számolási műtétel melly által egy kiadott szám önmagához adatik annyiszor, a' hány *egy* van egy másik kiadott számban. Az önmagához adandó szám neveztetik *sokszorozandó*-nak (multiplicandus), — az pedig melly azt mutatja, hányszor adassék amaz önmagához, *sokszorozó*-nak (multiplicator), — végre a' sokszorozás' eredménye *sokszorozmány*-nak (factum). 5. $3=15$, az 5 *sokszorozandó*, a' 3 *sokszorozó*, a' 15 *sokszorozmány*. — Azonban könnyű belátni, hogy akár 5-t adjak önmagához 3-szor, akár 3-t 5-ször: az eredmény ugyanaz; mert ha lerakom az öt *egyet* három sorba

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ugyanezt másként így mondhatom: a' három *egyet* leraktam öt sorba, 's akármellyik rendel számláljam összve azokat, az eredmény 15 lesz. — Innen látni való, hogy a' két kiadott számok közül akármellyiket nevezzük sokszorozandónak vagy sokszorozónak —, és akármellyikkel sokszorozzuk a' másikat, mindegy, — és azokat közös névvel *sokszorozók*-nak (factores) nevezzük. Innen a' sokszorozást így is határozhatjuk meg: *a' sokszorozás ollyan számolási műtétel, mellyel, kiadatván két szám, keresünk egy harmadikat, mellyben a' kiadottak közül akármellyik annyiszor legyen meg, a' hány egy van a' másikban.*

23. §.

Hogy a' sokszorozás' műtételéről helyes fogalmunk legyen: jegyezzük meg ezeket:

1) Legyen két sokszorozó, 2 és 3; ez azt teszi hogy 2-t 3-szor, vagy 3-t 2-szer kell önmagához adni. A' sokszorozmány = 6, melly tehát 2-szer nagyobb mint 3, és 3-szor nagyobb mint 2. — Már ha vagy a' 2tő tízeseket jelentene (= 20) a' 3 pedig egyeseket; v. a' 3 jelentene tízeseket (= 30), a' 2 pedig egyeseket: mindenik esetben a' sokszorozmány 6-tíz (= 60) lenne. — Tegyük fel, a' 2 jelentsen százasokat, a' 3 egyeseket: a' sokszorozmány lesz 6-száz. Ha már most a' 3 tízszerte nagyobbá lesz, azaz tízeseket jelent: úgy a' szokszorozmány is tízszerte lesz nagyobbá = 6-ezer. Ha a' 3 ismét tízszerte nagyobbá lesz, azaz százasokat jelent: úgy a' sokszorozmány ismét tízszerte növekszik = 6 tízezer (60.000). És ha most a' sokszorozandó (2) tízszerte nagyobbá lesz (6000): ez által a' sokszorozmány ismét tízszerte növekszik, 's lesz = 6-százezer. — Szóval a' hányszorta nagyobbá lesz egyik, vagy másik sokszorozó: annyiszorta nagyobbá lesz a' sokszorozmány is, péld. a' hányszor tízszerte nagyobbá lesz egyik, vagy másik sokszorozó: annyiszor tízszerte növekszik a' sokszorozmány.

2) Akármelly számot, és így a' sokszorozók közül akármellyiket, vagy mind kettőt is nézhetjük úgy mint sokszorozmányt, 's elszakgathatjuk sokszorozókra, miről hátrább bővebben lesz szó. p. o. legyen ezen sokszorozási egyenlet: 12 . 15 = 180. A' 12-t nézhetem úgy mint 2-nek és 6-nak sokszorozmányát, 's helyette tehetem ezt: 2 . 6, midőn így lesz az egyenlet: $2 \times 6 \times 15 = 180$. Hasonlólag a' 15-öt kifejezhetem sokszorozókkal, p. 3 . 5, 's akkor így lesz az előbbi egyenlet:

2.6.3.5 = 180. — És ezen sokszorozók akárminő rendben legyenek egymás után, mindegy. p. o. 2.6.3.5 = 6.5.3.2. = 3.2.5.6. 'sat.; minden esetben, ha a' két első' sokszorozmányát a' harmadikkal, — 's az itt eredt sokszorozmányt a' 4-dikkel sokszorozzuk: lesz = 180.

3) Az ollyan számokat, mellyeknek végén egy vagy több *0*-ok vannak, legkönnyebb elszakgatni sokszorozókra, mert azoknak egyik sokszorozójok áll jelentő jegyeikből, úgy tekintvén azokat mint egyeket; másik pedig 10, 100, 1000, 's a' t. a' szerint, a' mint egy- két- három 's a' többi 0 van bennök. példának o. 360' sokszorozói 36, és 10, — 3600-éi 36 és 100. Innen ha illynemü számokat kell sokszorozni: szakgassuk el mindig sokszorozókra, 's előbb a' jelentő jegyü sokszorozókat sokszorozzuk; azután menjünk a' *0* jegyüekre. — Ezekkel pedig a' sokszorozás csak úgy esik, hogy a' hány *0* van bennök, annyit irunk az előbbi sokszorozmány után, mert minden 0 tízszerte nagyobb értekűvé teszi a' sokszorozmány' minden jegyeit, és így az egész sokszorozmányt. p. o. 360.5 = 36.10.5. = 36.5.10. sokszorozom a' 36-t 5-tel = 180, ezt ismét 10-el mi csak úgy esik hogy egy *0*-t utána teszek, = 1800. — Igy 360.50 = 36.10.5.10 = 36.5.10.10 = 18000. — Igy 3600.50 = 36.100.5.10 = 36.5.100.10 = 180000. — Igy 3600.5 = 36.5.100 = 18000.

4) Ha valamelly szám, úgy tekintetvén mint sokszorozmány, sokszorozókkal van kifejezve: sokszorozzuk annak egyik sokszorozóját valamivel; ez által az egész szám, vagy sokszorozmány sokszorozva lesz. p. o. A.B = X, A.a.B = X.a, A.B.a = X.a. Igy ha 36-ot sokszorozókkal fejezem ki, 3.12 = 36, 's akár a' 3-at, akár a' 12-őt sokszorozom 4-el, ez által az egész sokszorozmány 4-szerte nagyobbá lesz. 3.4.12 = 36. és 4.3.12.4 = 36.4 = 144.

5) Ha valamelly számot egy másik számmal sokszorozni kell: mindegy akár azon számmal egyszerre, — akár annak sokszorozóival egymás után sokszorozzuk p. o. $8.6=8.3.2$.

6) Midőn valamelly számot sokszorozókra szakgatunk: gyakran még ezen sokszorozókat is sokszorozókra szakgathatni. p. o. 12-nek sokszorozói 6, és 2; ismét a' 6-nak sokszorozói 3, és 2. Már 12-t így fejezhetem ki: $12=6.2$, vagy $12=3.2.2$. Ha már 12-vel sokszorozni kellene valamelly számot: mindegy lesz, akár egyszerre 12-vel, akár egymás után az ő sokszorozóival vigyem azt végbe. p. $8.12=8.6.2=8.3.2.2$. — Így a' 8-t is lehet elszakgatni 4.2-re, ismét a' 4-t 2.2-re, és így $8=2.2.2$; és $8.12=2.2.2.3.2.2$.

7) Mivel akármelly számot nézhetünk úgy mint összeget, 's elszakgathatjuk azt tetszésünk szerint részekre: mindegy akár az egész számot sokszorozzuk valamivel, — akár külön külön annak részeit, 's az így nyert részleges sokszorozmányokat összeadjuk. Mert p. o. $12=8+4$, — már $12.3=12+12+12$, vagy $8+4+8+4+8+4$, vagy $8.3+4.3$. Így $236.5=200.5+30.5+6.5$. Sajátlag az arabjegyekkel kifejezett (10-nél nagyobb) számok' sokszorozásában mindig ezt cselekesszük; de a' jegyek' helyértékénél fogva a' részekre szakgatás, és a' munka' rövidítése miatt a' részleges sokszorozmányok' összeadatása nem szembetünő. p. o.

$$\begin{array}{rrrr} 236.5 = & 200 & + 30 & + 6 \\ & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 1000 & + 150 & + 30 = 1180. \end{array}$$

vagy 236
5
30
150
1000
1180

de, mint mindjárt látándjuk, a' műtétel rövidebben megy véghez. A' betűs mennyiségeknél pedig egyebet nem is lehet tenni, mint a' részeket külön külön sokszorozni. p. o. $(a+b+c)$. d. lesz $= a.d+b.d+c.d.$

8) Mivel akármelly számot nézhetünk úgy, mint más két szám közötti különbséget, p. o. $12 = 20-8$: mindegy akár a' 12-t sokszorozzam valamelly számmal, — akár külön a' 20-t is, a' 8-t is; és a' 8 sokszorozmányát a' 20-éből kivonjam. p. o. $12.3 = 36$, $-20.3 = 60$, és $8.3 = 24$; $60-24 = 36$. — Így: legyen $a-b = c$, innen $a = c+b$, — már d-vel sokszorozva: $a.d = c.d+b.d$. és: $ad-bd = cd$; honnan látni való, hogy mindegy, akár magát a' c-t sokszorozzam d-vel, akár külön az a-t is, a' b-t is, és a' $b.d$-t az $a.d$-ből ki vonjam.

24. §.

Az elvont, vagy egynemű számok' sokszorozási műtételét illetőleg:

1) Az egyjegyü számok' egymással sokszorozásában kell készséget szerezni; miben segíthet e' következő táblácska.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	9	12	15	18	21	24	27	30	
	4	16	20	24	28	32	36	40	
		5	25	30	35	40	45	50	
			6	36	42	48	54	60	
				7	49	56	63	70	
					8	64	72	80	
						9	81	90	
							10	100	

2) Ha az egyik sokszorozó egyjegyű: írjuk le azt a' másik sokszorozó' egyese alá, és sokszorozzuk vele sorba amannak minden jegyeit; 's az eredményt írjuk le a' vonal alá, úgy hogy az egyes a' felső sokszorozónak egyese alá, a' tízes tízese alá, 'sat. essenek. Ha valamelly sokszorozmányt egy jeggyel nem lehet leírni: akkor csak a' jobb felőli jegy irassék az illető helyre; a' többiek pedig a' következő sokszorozmányhoz számláltassanak. p. o.

3652	96983
5	4
18260.	387932.

3) Ha a' felső sokszoróban középett *0* van: annak sokszorozmánya *0*. p. o.

9602	9609
3	7
28806	67263.

4) Ha mind a' két sokszorozó több jegyű: külön mindenik jeggyel kell azt cselekedni, mit az egy jegyről mondánk; arra vigyázván, hogy mindenik jeggyel leendő sokszorozmányt az alsó sokszorozó' jegye alatt kell kezdeni. Mert midőn az alsónak tízes jegyével, a' felső' egyes jegyét sokszorozzuk: ezeknek sokszorozmánya tízes lesz; — midőn az alsónak százas jegyével a' felsőnek egyesét sokszorozzuk, itt a' sokszorozmány százas. — Innen

5) Ha az alsó sokszorozóban középett *0* van: azzal nem sokszorozunk; hanem megyünk a' következő jegyre, — ennek sokszorozmányát ez alá irván. —

6) Végre az így nyert részleges sokszorozmányokat összeadjuk: 's ezen összeg lesz a' kívánt fősokszorozmány. p. o.

3956	2562	3684
42	243	305
7912	7686	18420
15824	10248	11052
166152	5124	1123620.
	622566	

7) Ha valamelly számot 10-el kell sokszorozni: csak egy *0*-t tegyünk utána, — ha 100-al, — két *0*-t, ha ezerrel, — három *0*-t 'sat; mert minden jobbról oda tett *0* tízszerte tízszerte nagyobbá teszi minden jegyeknek, és így az egész számnak is értekét. p. o.

$352 . 100 = 35200$; $-248 . 1000 = 248000$.

8) Ha vagy egyik, vagy mind a' két sokszorozó' végén egy vagy több *0* van: azokat a' sokszorozás közben elmellőzzük, 's csak a' jelentő jegyekkel sokszorozunk, — de a' fősokszorozmány' végére annyi *0*-t teszünk, a' hány volt a' két sokszorozóban mindössze.

p. o. $35600 . 250 = 35600$

250

1780

712

8'900.000

mivel a' *0*-al bíró sokszorozót úgy nézzük, mintha két sokszorozóból állna: $35600 = 356 . 100$, és $250 = 25 . 10$. Tehát ezek lesznek a' sokszorozók: $356 . 100 . 25 . 10$; vagy $356 . 25 . 100 . 10$. És így sokszorozzuk a' 356-ot 25-el $= 8900$, ezt ismét 100-al, — azaz két *0*-t teszünk utána $= 890000$, — ezt ismét 10-el, azaz még egy *0*-t teszünk utána $= 8'900.000$.

9) Próbája a' sokszorozásnak a' műtétel' ismétlése; vagy pedig az elosztás, mivel $A . B = X$, innen $A = \frac{X}{B}$, és $B = \frac{X}{A}$ levén, látni való, hogy ha a' sokszoroz-

mányt (X) egyik sokszorozóval elosztjuk, a' másik sokszorozót nyerjük.

25. §.

4-szer. Elosztás.

Miután látánk, miként lehet két sokszorozóból sokszorozmányt csinálni: kérdés már miként lehet akármelly számot, úgy tekintvén mint sokszorozmányt, sokszorozókra fejteni; jelesen ha kiadatik annak egyik sokszorozója, miként lehet a' másikat megtalálni? — vagy miként lehet találni egy ollyan számot, melly a' maga egységeivel azt mutassa ki, hányszor van meg a' kiadott sokszorozó, a' kiadott sokszorozmányban? — vagy miként lehet találni egy ollyan számot, melly azt mutassa, hogy a' kiadott sokszorozónak minden külön egységére, a' kiadott sokszorozmányból minő nagy szám esik?, vagy miként lehet találni ollyan számot, melly a' kiadott sokszormánynál annyiszorta kisebb legyen, a' hány egy van a' kiadott sokszorozóban? Ezen keresett számot megtalálhatnánk ugyan több ízbeli kivonás által is, ha t. i. a' kiadott sokszorozmányból a' kiadott sokszorozót kivonnánk annyiszor, a' mennyiszer csak lehet. Ugyan is a' hány egyszer kivonhatjuk belőle: annyi egyből álló szám lesz a' keresett másik sokszorozó; — mert a' hányszor kivonhatjuk, anyiszor van meg benne; — ezt szokta pedig mutatni a' másik sokszorozó, p. o. ki adatván 20 mint sokszorozmány, és 5 mint annak egyik sokszorozója, kérdés mi a' másik sokszorozó? — kivonom 20-ból 5-t egyszer, marad 15, ebből ismét kivonom 5-t, marad 10, ebből már 3-adszor vonom ki 5-t, marad 5, — ebből ismét 4-edszer, 's marad = 0. És így 20-ból 5-t kivonhatom 4-szer, vagyis 5 a' 20-ban meg van 4-szer, — azaz: 20-nak ha egyik sokszoro-

zója 5: úgy a' másik 4. — De mivel ezen kivonás általi munka hosszas volna: könnyebben czélt érünk, ha azt keressük, hogy a' kiadott sokszorozmányból, a' kiadott sokszorozónak minden külön egységére mi esik?, vagyis ha a' sokszorozmányt elosztjuk annyi egyenlő részekre, a' hány egy van a' kiadott sokszorozóban, 's azt kérdjük: minő nagy szám lesz egyegy rész? p. o. 2-t elosztván 5 egyenlő részre, egyegy rész lesz 4. — És ezen műtétel neveztetik *elosztás*-nak (divisio); a' kiadott sokszorozmány *osztandónak* (dividendus), a' kiadott sokszorozó *osztó*-nak (divisor), a' keresett sokszorozó pedig *hányados*-nak (quotus, quotiens), — Az elosztás *tehát ollyan számolási műtétel, mellyben kiadatván valamelly sokszorozmány, és annak egyik sokszorozója, keressük a' másik sokszorozót.*

Ámbár az elosztásban sajátlag mindig ez a' kérdés: *a' kiadott sokszorozmánynak (osztandónak) kiadatván egyik sokszorozója (osztó); mi a' másik sokszorozó (hányados)?* mindazáltal ezen kérdést többnyire két különböző alakban szoktuk feltenni, — jelesen:

1) vagy azt kérdjük, hogy az osztót hányszor találhathi meg az osztandóban? 's ezt mutatja a' hányados.

2) vagy azt kérdjük, hogy ha az osztandót annyi egyenlő részekre osztjuk fel, a' hány egy van az osztóban: minő nagy fog lenni egyegy rész? 's ezt mutatja a' hányados.

p. o. 36 : 3 = 12, — vagy ezt kérdem: 36-*ban* 3 *hányszor van meg?* a' hányados mutatja hogy 12-szer. — Vagy pedig ezt kérdem: *ha* 36-*t* 3 *egyenlő részre osztok: minő nagy lesz egyegy rész?* vagy 36-*nak egy egy harmadrésze minő nagy?* a' hányados mutatja hogy 12. — És a' kérdést ezen utolsó alakban tesszük fel, könnyebb belátás' okáért, mind annyiszor, valahányszor

az osztó nagyobb mint az osztandó. p. o. 3 : 5, így kérdjük: ha 3-t öt egyenlő részre osztunk, mi esik egyegy részre?, mi lesz 3-nak egyegy ötöd része?

26. §.

Hogy azon esetekben, midőn az osztó nagyobb mint az osztandó, a' hányadost számmal kifejezhessük: erre nézve a' törtszámok' hátrább előadandó tudományából itt előlegesen valamit meg kell tanulnunk.

A' törtszám, mint felebb mondatott, abban különbözik az épszámtól, hogy ez, egész egységek' sokaságát, — amaz pedig t. i. a' törtszám, az egység' egyenlő részeinek sokaságát jelenti. A' törtszám két, egymás felibe irt, 's közbe tett vonallal elválasztott számjegyekkel fejeztetik ki, mellyek közűl az alsó, vagy is a' *nevező* (denominator) azt mutatja: hány egyenlő részre van felosztva egy egész?, — a' felső pedig, vagy is a' *számláló* (numerator), azt mutatja, hány illyen részeket foglal magában a' törtszám? — p. o. $^3/_5$ egy törtszám, mellynek *nevezője* 5 azt mutatja, hogy egy egész felvan osztva öt egyenlő részekre, — *számlálója* 3 pedig azt, hogy ezen törtszám három ötödrészeket foglal magában. Azonban a' törtszám kétféle, *közönséges* és *tizedes*. Amannak nevezője lehet akármi szám, azaz jelentheti az egynek akárhány egyenlő részekre osztatását. p. o. $^3/_5$, $^7/_8$ 'sat.; a' tizedesnek nevezője pedig csak az 1 mellé tett egy vagy több *0*, és így 10, 100, 1000 'sat. lehet, és így az egynek csak 10-, 100-, 1000-, 'sat. egyenlő részekre osztatását jelenti.

Ha az ember 3 egészet, $^3/_5$ törtszámmal összehasonlít; 's meggondolja hogy a' 3 három egész egységeket, — a' $^3/_5$ pedig az egységnek három ötödrészét, vagy is három egység közűl mindenikből különkülön

egyegy ötödrészt fogal magába: látni való, hogy 3,ötszörte nagyobb mint $^3/_5$, vagy $^3/_5$ a' 3-nak egy ötödrészét jelenti; — és így ha a' felebbi példában 3-t elakarunk osztani 5 egyenlő részre, esik egyegy részre $^3/_5$.

Valahányszor tehát az osztó nagyobb mint az osztandó: mindannyiszor a' hányados törtszám lesz, mellynek *számlálója* az osztandó, — *nevezője* pedig az osztó. p. $12 : 25 = \frac{12}{25}$.

27. §.

Ha az osztó az osztandóban tökéletesen megtaláltatik, vagyis ha az osztó a' hányados épszámmal sokszoroztatván tökéletesen ki csinálják az osztandót: akkor az osztó és hányados az osztandónak *mérő-részei* (mensura, pars aliquota),- az osztandó pedig ezeknek *sokszorosa*, vagy *sokasa* (multiplum). p. 36-nak 12 és 3, mérő részei, — és 36 ezeknek sokszorosa.

Ha pedig az osztó az osztandóban tökéletesen fel nem találtatik, azaz semmi épszám sincs, mellyel sokszoroztatva, kicsinálná az osztandót: akkor az osztandónak *valamelly részének* (pars aliquanta) mondatik. Ezen esetben tehát a' hányados nem épszám — hanem mivel az osztás' végén az osztónál kisebb szám marad, ennek elosztását törtszám-alakban fejezzük ki, alá irván az osztót nevező gyanánt, 's ezen törtszámot a' hányados' épszámai mellé tesszük. p. o. 41 : 12, 12 a' 41-ben megtaláltatik 3-szor, — de 3-szor 12 csak 36 levén, még 5 az osztandóból fennmarad; — ezen maradék 12-vel elosztatván, hányadosa lesz $^5/_{12}$. Tehát 41 : 12-nek teljes hányadosa $= 3^5/_{12}$.

28. §.

Az elosztás' természetét illető néhány alaptételek:

1) Nyilván van, hogy ugyanazon osztó mellett minél nagyobb az osztandó: annál nagyobb lesz a' hányados; — mert ugyanazon osztó nagyobb osztandóban többször találtatik fel, mint kisebben. p. o. 12 : 3 = 4, ha a' 12-t kétszerte nagyobbá teszem, a' 4 is kétszer-nagyobbá lesz. 24 : 3 = 8.

2) Ugyanazon osztandó mellett minél nagyobb az osztó: annál kisebb a' hányados; mert ugyanazon osztandóban nagyobb osztó kevesebbszer találtatik, mint kisebb. p. o. 12 : 3 = 4, ha az osztó kétszerte nagyobb, úgy a' hányados kétszerte kisebb lesz: 12 : 6 = 2.

3) Innen egyenesen foly, hogy ha mind az osztó mind az osztandó, egyszerre, és egyenlően növesztetik, vagy fogyasztatik, azaz mindkettő ugyanannyiszor nagyobbá, vagy kisebbé tétetik: ugy a' hányados változatlan marad. Mert az osztó' növesztése által, a' hányados épen úgy fogy, a' mint nő az osztandó' növesztése által. És viszont az osztó' fogyasztása által, a' hányados épen úgy nő, a' mint fogy az osztandó' fogyasztása által. És így mindenik esetben a' hányados a' mennyit nő, — annyit fogy egyszerre, — azaz változatlan marad. p. o. 12 : 4 = 3; 24 : 8 = 3; 6 : 2 = 3.

4) Mivel a' törtszámot p. o. $^4/_{12}$ úgy nézhetni mint osztást, mellyben a' nevezőt (12) osztónak, — a' számlálót (4) osztandónak, — és magát a' $^4/_{12}$-t hányadosnak tekinthetjük: innen az előbbi pontokban előadott tételek a' törtszámokra is illenek. Jelesen ha a' nevező (osztó) nem változik: a' számláló' (osztandó') növekedésével 's fogyásával együtt nő v. fogy a' törtszám' értéke. $^4/_{12} < {}^5/_{12} > {}^3/_{12}$. És ha a' számláló (osztandó) nem változik: a' nevező' (osztó') növekedésével fogy, — fogyásával pedig nő a' törtszám' értéke. p. $^4/_{12} > {}^4/_{13} < {}^4/_{10}$ — Végre ha mind a' számláló mind a' nevező egyenlően nő' vagy fogy, azaz ugyanannyiszorta lesz na-

gyobbá vagy kisebbé: úgy a' törtszám' értéke nem változik. p. o. $^4/_{12} = {}^8/_{24} = {}^2/_6$.

5) Ha valamelly számot egy másik számmal sokszorozunk, és ugyanazzal elosztjuk: a' szám ez által a' mennyit nő, annyit fogy, és így nem változik. p. o. $\frac{2.3}{3} = 2, \frac{a.b}{b} = a.$

6) Ha valamelly szám sokszorozókkal van kifejezve, valamint a' sokszorozásnál, úgy az osztásnál is mindegy, akár az egész számon, akár annak egyik sokszorozóján vigyük végbe a' műtételt. p. o. $36 = 2.18$; — ha elakarom 2-vel osztani, mindegy akár $\frac{36}{2}$, akár $\frac{2}{2}.18$, akár $2.\frac{18}{2}$, a' hányados mindenképen $= 18$.— Mert midőn 2. 18-at osztok 2-vel, ha csak 2-t osztanám el, úgy a' hányados $\frac{2}{2}$, 18szorta kisebb mint kellene lennie, és így sokszorozni kell 18-al; ha pedig csak 18-at osztanám, úgy a' hányados 2-szerte kisebb mint kellene lennie, és így sokszorozni kell 2-vel.

7) Ha az osztót fejezem ki sokszorozókkal: mindegy lesz, akár az egész osztóval egyszerre, akár annak sokszorozóival egymás után viszem végbe az osztást, — mint ugyanez a' sokszorozásról is mondatott, p. o. 36:12, ha 12-t kifejezem sokszorozókkal $= 3.4$, így lesz: $36 : 3 : 4$, vagy $\frac{36}{3} : 4$, t. i. $36 : 3 = 12$, ezt ismét elosztván 4-el, $12 : 4 = 3$; és $36 : 12 = 3$. Ha 36-ot csak 3-al osztanám el: úgy a' hányados 4-szerte nagyobb lenne mint kell lennie, — és így még 4-el el kell osztanom.

8) Ha az osztandó' végén zerusok vannak: sokszorozókra fejtvén azt, csak a' jelentő jegyeit osztom el az osztóval, 's ezen hányadost a' zerusos sok-

szorozóval sokszorozom, vagy is azon esetben, ha épszám hányadosom van, annyi zerust teszek utána, a' hány van az osztandóban. — p. o.

$$3600 : 12, \text{ vagy } \frac{36.100}{12} = \frac{36}{12}.100 = 300.$$

9. Ha pedig az osztó' végén vannak zerusok: sokszorozókra fejtvén az osztót, elosztom az osztandót előbb a' jelentő jegyű-, azután a' zerusos sokszorozóval. Zerusos sokszorozóval t. i. 10-, 100-, 1000-el 'sat. az osztás csak annyiból áll, hogy a' hány *0* van, annyi jegyet szakasztok el az osztandó' jobbjáról tizedes törtszámi jegyek gyanánt. Mert midőn onnan egy jegyet elszakasztok: az által minden jegy' értéke, 's így az egész mennyiség tízszerte kevesedik, és annyi, mintha tízzel elosztanám; — ha két jegyet szakasztok el; az által százszorta kevesedik, és így százzal osztatik el minden jegy' értéke, és így az egész szám. p. o. 365 = 3 száz, 6 tíz, 5 egy, — de 36,5 = 3 tíz, 6 egy, 5 tizedrész, — 3,65 = 3 egy, 6 tized,- 5 századrész, — 0,365 = 0 egy, 3 tized-, 6 század-, 5 ezredrész. Így ha 365-t 10000-el kell elosztani: akkor, hogy minden jegy' értéke tízezerszerte kevesedjék, balfelől 0-sal is kell pótolni: 0, 0365, azaz 0 egy, 0 tized-, 3 század-, 6 ezred-, 5 tízezredrész. 'sat. És így 425 : 50 = 425 : 5 : 10, előbb elosztom 425-t 5-el, lesz = 85, — ezt ismét 10-el, lesz = 8, 5. — Igy 425 : 500 = 425 : 5 : 100, előbb 425 : 5 = 85, ezt ismét elosztva 100-al = 0,85.

10. Valamelly számot akár magát egészen, akár részekre szakgatva, ezen részeket külön külön osszuk el az osztóval, 's akkor ezen részleges hányadosokat össze adjuk mindegy. p. o. 36 : 3 = (24 + 12) : 3 = 8 + 4. = 12. Igy 864 : 2 = (800 + 60 + 4) : 2.

$\left.\begin{array}{l} 800:2=400 \\ 60:2=30 \\ 4:2=2 \end{array}\right\} = 432$. Ha valamelly rész' osztásánál maradék van: azt a' következő kisebb részhez adjuk, 's azzal együtt elosztjuk. p. o. 6835 : 5. =

(6000 + 800 + 30 + 5) : 5 . . .				1000
5000				
1000	1800			300
marad	1500			
	300	330		60
	marad	300		
		30	35 . . .	7
		marad	35	1367
			00	*hányados.*

Az arabjegyekkeli leírásban ezen részeket összefoglalva látjuk, — 's a' munka rövidül az által, hogy a' zerusok csak alatta értetnek; — egyébiránt pedig épen ez történik, a' mit most cselekvénk. t. i.

5	6835	1367
	5	
	18	
	15	
	33	
	30	
	35	
	35	
	00	

11) Mivel a' sokszorozók közül minél kisebb az egyik, annál nagyobb a' másik: megeshetik hogy midőn az osztót az osztandónak részeiben keressük, a' hányados épen ollyan rangú szám lesz, mint az osztandónak azon része, mellyben az osztót keressük, mint az

előbbi példábani 800 : 2 = 400, 6000 : 5 = 1000. — De az is gyakori eset, hogy az osztót nem találjuk meg az osztandó részében ugyanazon rangú számszor mint az osztandó' azon része. p. o. 1568 : 2, vagy az osztandót részekre szakgatva: (1000 + 500 + 60 + 8) — ennek első részében, az 1000-ben, a' 2-t nem találom meg ezres rangú számszor, azaz hogy a' hányados ezres legyen; -- itt hát hányados lesz = 0 ezres; — illyenkor tehát ezen felsőbb rangút a' következő alsóbb rangúval összefogom, p. itt lesz 1500, 's illyen rangú hányadost keresek, vagyis azt kérdem: hány *százszor* találom meg a' 2-t 1500-ban? — *felelet:* 700-szor, és így a' második résznek, az elsővel összefogva, hányadosa 700. Úgyde 2szer 700 csak 1400, és így még az 1500-ból fennmarad 100, mellyben már a' 2tő, százszor nem találtatik, tehát azt a' következő alsóbb rangúhoz adom = 160; már ebben is illyen rangú, t. i. tízes hányadost keresek, — vagy is kérdem: hány *tízszer* találtatik 2 a' 160-ban? *felel:* 8 tízszer, az az itt a' hányados = 80. — Végre a' 8 egyben keresek ugyan azon rangú, t. i. egyes hányadost, — vagy kérdem: hány *egy*-szer találtatik abban a' 2? *fel.* 4 egyszer. E' szerint az egész példa így lesz:

(1000 + 500 + 60 + 8) : 2 = 0000

0000

1000

marad 1500 700

1400

100

marad 160 80

160

--- 8 . . 4

8 0784

-

Ugyanez a' *0*-sok' kihagyásával rövidítve:

2 | 1568 | 0784 vagy 784 mivel az elől álló
0 *0* elmaradhat.
15
14
16
16
8
8
-

Más példa: **624 : 3.** részekre szakgatva így osztom el:

(600 + 20 + 4) : 3 = 200
600
---
20 00
24 8
24 208
--

t. i. 3-t 600-ban megtalálom 2-százszor, úgy hogy semmi maradék nincs; — 3-t 2-tízben 0 tízszer, — tehát a' hányadosba jő 0 tíz (00), 's maradék = 20. Ezt összefogván a' 4 eggyel: 3-t 24 egyben 8-szor.

Más példa: **6325 : 253.** vagy

(6000 + 300 + 20 + 5) : 253 = 0000
0000
6000
marad 6300 000
000
6300
marad 6320 20
5060
1260
marad 1265 . . . 5
1265 25
---- *hányados*

t. i. 253-t 6000-ben 0-ezerszer, — 6300ban 0-százszor, — 6320ban már megtalálom 2-tízszer, 's lesz 253.20 = 5060, — maradék 1260; végre 1265-ben 5 egyszer, — 's így a' hányados = 25. — Ugyanez rövidítve:

253 | 6325 | 0025 vagy 25.
0
63
00
632
506
1265
1265

Más példa. 634:36. vagy

(600 + 30 + 4) : 36 = 000
000
600
marad 630 10
360
270
marad 274 . . . 7
252
22 17, 22/36
marad *hányados.*

ugyanez rövidítve:

36 | 634 | 017 22/36 vagy 17 22/36.
0
63
36
274
252
22

12) Látni való tehát, hogy az arabjegyekkel röviden leírt számoknál, az osztandónak minden külön jegyéhez, vele ugyanazon rangú hányadost keresünk, — és ez gyakran = 0, — mert az osztót benne nem talál-

juk meg ugyanazon rangú számszor; — és ezen *0* legelől elmaradhat, de középett nem. — Innen ha valamelly épszám mellett tizedes törtszám van: annak is tizedrészes jegyében tizedrészes hányadost, századrészes jegyében századrészes hányadost 'sat. kereshetünk. p. o. a' törtszámot apróbb jegyekkel irván:

1266,15 : 5. — részekre szakgatva:

(1000 + 200 + 60 + 6, + 1 + 5) : 5 = 0000

0000

1000 *marad* 1200 200

1000

200 *marad* 260 50

250

10 *marad* 16 3

15

1 *marad* 1,1 2

10

1 *marad* 15 . 3

15 253,23

-- *hányad.*

Ugyan ez rövidítve:

5 | 1266,15 | 0253,23 — v. 253,23.

0

12

10

26

25

16

15

1 1

10

15

15

--

13) Akármelly számnak egyes jegye után tehetünk, tized részes-, századrészes- 'sat. gyanánt, egy v. több zerusokat, a' nélkül hogy azon számnak értéke változnék. p. o. ha 274 után 0-kat teszünk: 247,000, ezt teszi: 274 egész, semmi tized-, semmi század-, semmi ezredrész, és így csak 274. — Már felebb azt mondánk, hogy ha az osztásban utóljára maradék van, melly kisebb az osztónál: azt, aláirván az osztót, közönséges törtszám-alakban a' hányados mellé kell tenni. — Most azt tegyük hozzá, hogy ugyanezt tizedes-törtszám-alakban is kifejezhetjük; vagyis azon esetben, mikor utoljára maradék van, folytathatjuk az osztást, olly móddal, hogy a' maradékhoz tizedrészes 0-t teszünk; melly által az *egyes* jegy tized-részessé válik, (p. 3 egy = 30 tizedrész), 's ebből tizedrészes hányadost keresünk; — ha akkor is maradék van, annak ismét századrészes 0-t teszünk utána, 's ebből a' hányados századrészes lesz, 'sat. 's ezt minél tovább folytatjuk, annál inkább közelítünk azon közönséges törtszám' értekéhez, melly helyett lesz ezen tizedes. p. 557:4.

(500 + 50 + 7, +0+0··) : 4 = 100
400
100
mar. 150 30
120
30
mar. 37 9
36
1 *)
mar. 10 2
8
2
mar. 20 . . 5
20
-- 139,25 *hányados*

*) 1 egészben 4-et meg nem találok úgy hogy a' hányados egyes legyen; de mellé tevén 10-edrészes 0-t, 10 tizedrészben (melly = 1 egész) megtalálom 2 tizedrész-szer.

rövidítve.

4 | 557 | 139,25.

4
15
12
37
36
10
8
20
20
--

vagy 4 | 557 | 139¼

4
15
12
37
36
1

Más példa: 242 : 12

(200 + 40 + 2, . . .) 12 = . . 000
000
200

mar. 240 20
240
---

mar. 2 0,
0
2

mar. 20 1
12
8

mar. 80 6
72
8

mar. 80 . . 6
80
--

20,166
hányad.

rövidítve.

12 | 242 | 020, 166....
24 vagy 20, 166....
--2
0
20
12
80
27
80

Más példa: 3 : 17 = 3,000... : 17

17 | 3,000... | 0,176...
0
30
17
130
119
110

17-et 3 egyben megtalálom 0 egyszer; 30 tizedrészben 1 tizedrészszer, 's marad 13 tizedrész = 130 századrész, — ebben megtalálom 7 századrészszer, 's marad 11 századrész = 110 ezredrész, ebben megtalálom 6 ezredrészszer. Így folytathatnám az osztást tovább is; de valahol meg kell állapodni, 's pontokat tenni utána, annak jeleül, hogy a' hányados még hiányos; — bár a' hiány már olly csekélység, hogy bizvást elmaradhat.

Más példa: 4 : 283 = 4,000... : 283

283 | 4,000... | 0,0141....
0
40
00
400
283
1170
1132
380
...

29. §.

Egész elvont, vagy egynemű számok' elosztása tehát így megy véghez:

1) Leiratnak az elosztás' három tagjai, akár úgy, hogy az osztandónak jobbról essék mind az osztó, mind a' hányados, egymás felett, vonalok által elkülönítve, — illy alakban: *osztandó* | $\frac{\text{osztó}}{\text{hányados}}$; akár úgy, hogy balról elől az osztó, utána az osztandó, utána a' hányados, vonalokkal elkülönítve álljanak, — illy alakban: *osztó* | *osztandó* | *hányados.*

2) Az osztót keressük az osztandónak első jegyében, 's ha megtaláljuk: — ezen hányados az osztandó' első jegyével egy rangú szám lesz. Ha nem találjuk: úgy a' hányadosba 0-t kellene tenni, annak jeleül, hogy ollyan rangú hányados-jegy, a' minő rangú az osztandónak első jegye, nincs; — de itt elől 0-t kitenni szükségtelen. — Összefogjuk tehát illyenkor az osztandó' legfelső jegyét a' közelebbi kisebb rangúval, vagyis a' két első jegyben keressük az osztót, 's ha megtaláljuk, a' hányados ollyan rangú jegy lesz, mint az osztandó' második jegye; — ha ezekben sem találjuk, — ekkor is 0-t kellene tenni a' hányadosba, de ez is elmaradhat, 's ezen nem-találás' esetében összefogunk három jegyet, 's azokban keressük az osztót, és a' hányados a' 3-dik jegy' rangján lesz; — így tovább.

3) A' talált hányadossal az osztót sokszorozzuk, 's a' sokszorozmányt az elosztott jegyekből kivonjuk; a' maradékhoz lehozzuk az osztandó' következő jegyét; — 's most ezen, a' lehozott jeggyel együvé vett maradékban, vagy ha maradék nincs, magában a' lehozott következő jegyben keressük az osztót, 's a' hányados ollyan rangú lesz, *mint* a' lehozott jegy; — ha pedig

az osztót ebben meg nem találjuk, a' hányadosba 0-t teszünk, melly már itt el nem maradhat, mivel e' nélkül a' hányados' jegyei helyértéköket eltévesztenék. — Az új hányados-jeggyel ismét sokszorozzuk az osztót, az elosztott jegyekből kivesszük, — 's a' maradékhoz a' következő jegyet lehozzuk. — Ha pedig 0 van itt a' hányadosban, mivel ezt az osztóval sokszorozván, a' sokszorozmány csak 0 lesz: ezt ha kivonnánk az elosztott jegyekből, látnivaló hogy az elosztott jegyek épen tennék a' maradékot: tehát rövidség' okáért az előbbi osztandó jegyekhez a' következő jegyet lehozzuk, — 's az előadott módon folytatjuk az osztást.

p. o. 5 | 645 | 129 *más* 12 | 648 | 054

5	60
14	48
10	48
45	--
45	
--	

más 254 | 6350 | 0025

508
1270
1270
----

más 4 | 1232 | 0308 *más* 12 | 24060 | 2005

12	24
--32	--0
32	60
--	60
	--

4) Ha a' legutolsó osztás, és sokszorozmány' kivonása után is marad fenn valami: ezen maradéknak az

osztót alá irjuk, 's közönséges törtszám-alakban a' hányados után tesszük. — Vagy pedig ezen maradék mellé egy 0-t teszünk, 's így elosztván ezt a' osztóval, a' hányados tizedrész lesz, mellytől az megelőző hányadosi jegyeket vonással el kell választani; — ezzel sokszorozván az osztót, 's kivevén az osztandóból, — ha még is van maradék, ahoz ismét 0-t teszünk, elosztjuk, 's a' hányados századrész lesz, — 's így tovább. (lásd 28 §. 13-ik sz.) p. o.

243 | 6587935 | $27110\frac{205}{243}$

486

1727

1701 *vagy* 27110,8436····

269

243

263

243

205 *maradék.*

2050

1944

1060

972

880

729

1510

1458

--52

5) Ha mind az osztó' mind az osztandó' végén 0-ok vannak: ezeket egyenlő számmal el lehet hagyni mindkettőből; mert a' hanyados azért nem változik. Ugyan is egyegy 0' kigyása mindkettőt tízszerte, — kétkét 0' kihagyása százszorta teszi kisebbé 'sat. Már pedig ha mind az osztó, mind az osztandó egyformán fogy, a' hányados nem változik. (lásd 28 §.)

p. o. 50 | 1250 | 25 *más* 140 | 12600 | 90

10			126
25			--0
25			
--			

más 2500 | 3589000 | $1435^{15}/_{25}$

25	v.	1435,6
108		
100		
89		
75		
140		
125		
15 *mar.*		
150		
150		
---		

6) Ha csak az osztandó' végén vannak 0-ok: elosztván a' jelentő jegyeket, ha maradék nélkül találunk hányadost, ennek utána tesszük az osztandó' 0-sait (lásd 28. §. 8-dik szám). Ha pedig maradék van: ahoz lehozzuk a' következő 0-t, 's folytatjuk az osztást rendesen.

p. o. 5 | 12500 | 2500 *más* 6 | 7600 | 1266,6...

10			6
25			16
25			12
--			40
			36
			40
			36
			40
			36
			4

7) Végre ha csak az osztó' végén van, vagy vannak 0-ok: ezeket is elhagyhatjuk, olly móddal, hogy a' mennyi 0-t az osztóból, ugyan annyi jegyet az osztandóból jobbról elszakasztunk, 's csak a' megmaradtakkal dolgozunk; — a' hányados nem változik, mert mind az osztót, mind az osztandót ugyanannyiszorta kevesítettük. — A' munkát pedig vagy úgy tesszük, hogy az osztandó' megmaradt jegyeiből hányadost keresvén, — utána tesszük ennek az elhagyott jegyeket, a' maradékkal együtt, közönséges törtszám-alakban, mellynek nevezője az egész osztó; — vagy pedig mivel az osztandó' végén elkülönített jegyek tizedes törtszámmá váltak, folytatjuk velök az osztást, 's az ezékből hányados tizedes törtszám lesz. p. o.

25,0	1684,5	67 $^{95}/_{250}$ *vagy*	25,0	1684,5	67,38
	150			150	
	184			184	
	175			175	
	9			95	
				75	
				200	
				200	
				---	

8) Ha az osztó nagyobb mint az osztandó: akkor a' hányados törtszám lesz; mert az osztónak külön egységeire, vagy egyenlő részeire, az osztandóból egy egész nem esik, csak annak valami része; — vagy az osztót az osztandóban nem találjuk meg egyszer, hanem kevesebbszer, és így törtszámszor. — Illyenkor tehát a' hányadost vagy közönséges törtszámmal fejezzük ki, úgy hogy az osztandónak az osztót alá irjuk, p. o. 63 : 258 = $^{63}/_{258}$; vagy kicsináljuk a' hányadost tizedes törtszám-alakban, olly móddal hogy tized-szá-

zad- 'sat. rész jelentésü 0-sokat teszünk az osztandó' jobbjára, melly által az osztandó is tized-század — 'sat. résszé lesz, úgy azonban, hogy előbbi értéke nem változik, p. o. 5 egyhez ha egy tized részes 0-t adok, lesz = 50 tizedrész = 5 egy, 's ekkor az innen eredő hányados is tizedrészes 'sat. lesz.

p. o. 13 | 5,0 | 0,384 ....
39
110
104
60
52
8....

9. Próbája az elosztásnak a' sokszorozás, t. i. mivel az osztó és hányados az osztandónak sokszorozói: ha ezek egymással sokszoroztatván kicsinálják az osztandót, úgy a' dolgozatban nincs hiba. — Vagy pedig ha a' hányadossal az osztandót elosztván, kijő az osztó: ez is a' dolgozat' helyes voltát mutatja. — Viszont a' sokszorozásnak próbája az elosztás, mint felebb mondatott. p. o.

12 | 276 | 23 *prób.* 23 *vagy* 23 | 276 | 12
24 12 23
36 46 46
36 23 46
-- 276 --

és 125 *próba* 125 | 5375 | 43 *vagy* 43 | 5375 | 125
43 500 43
375 375 107
500 375 86
5375 --- 215
215

HARMADIK CZIKKELY.

A' számok' oszthatásáról; — és sokszorozókra fejtéséről.

30. §.

Minden számot nézhetünk úgy mint sokszorozmányt, 's kifejthetünk sokszorozókra, olly móddal, hogy felvévén egyik sokszorozójaúl akármelly számot, kikeressük annak sokszorozótársát elosztás által; a' midőn a' kiadott szám lesz osztandó, — a' felvett sokszorozó lesz osztó — annak sokszorozótársát pedig az osztásban előálló hányados mutatja. p. o. **36**-nak sokszorozói lehetnek **1** és $^{36}/_{1} = 36$; — **2** és $^{36}/_{2} = 18$; **3** és $^{36}/_{3} = 12$; — **4** és $^{36}/_{4} = 9$; **5** és $^{36}/_{5} = 7\ ^{1}/_{5}$; **6** és $^{36}/_{6} = 6$; **7** és $^{36}/_{7} = 5\ ^{1}/_{7}$; — **8** és $^{36}/_{8} = 4\ ^{4}/_{8}$; **35** és $^{36}/_{35} = 1\ ^{1}/_{35}$; — **36** és $^{36}/_{36} = 1$; **37** és $^{36}/_{37}$; — **255** és $^{36}/_{255}$.

Azonban midőn valamelly számnak sokszorozóit v. osztóit említjük, — mindig csak az épszámúakat értjük, vagy is ollyakat, mellyek azt maradék nélkül osztják el; — és így annak, mint felebb mondatott, *mérő részei* (mensura); és ezekhez képest a' szám *sokszoros*nak v. *sokas*-nak (multiplum) neveztetik. p. o. **36**-nak sokszorozói vagy osztói **2**, **3**, **4**, **6**, **9**, **12**, **18**, és ezek közül mindegyiknek a' **36** sokszorosa, vagy sokasa. —

Minden számot el lehet osztani az **1**-el és önmagával, midőn egyik a' másikhoz képest hányados; — vagy minden számnak sokszorozói az **1** és önmaga.

A' melly számnak az **1**-en és önmagán kívül más sokszorozói nincsenek; vagy is a' mellyet az egyen kívül semmi számmal sem lehet elosztani maradék nélkül: az *egyszerű* vagy *első* számnak (numerus simplex vagy

primus) neveztetik, p. o. 1, 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 'sat.

Ellenben minden ollyan szám, melly az 1-en kívül más szám-, vagy számok által is elosztható, maradék nélkül, *összetett* számnak (numerus compositus) neveztetik, p. o. 210 összetett szám, mert 2, 3, 5, 7 'sat. által maradék nélkül elosztatik.

Ha egy szám két vagy több számot eloszt maradék nélkül: az ezeknek *közös osztója*, vagy *közös mérője*, (communis mensura.) p. o. 7 közös mérője 14-nek, 35-nek 'sat. Ha két vagy több számnak több közös mérői is vannak: azok közt a' legnagyobb neveztetik *legnagyobb közös mérőnek* (communis maxima mensura).

A' melly számok külön tekintve ugyan összetettek, — de közös mérőjök nincs: azok *viszonyos első számok*-nak neveztetnek. p. o. illyenek 12 és 35, mellyek közül az elsőnek mérői 2, 3, 4, 6, a' másiknak 5, 7, — de ollyan szám nincs, melly mindkettőt elosztaná.

Az ollyan számok, mellyek 2-vel oszthatók maradék nélkül, *párosok*-nak, — a' mellyek pedig nem oszthatók, *páratlanok*-nak neveztetnek. p. 2, 4, 6, 8, 'sat. párosok, 3, 5, 7, 9, 11, 'sat. páratlanok.

31. §.

A' számoknak mérői (vagy sokszorozói, vagy osztói) vagy *összetettek*, — mellyeket még ismét lehet mérőkre fejteni; — vagy *elsők*, mellyeket már tovább fejteni nem lehet. p. o. $360 = 20 . 18$, mind a' 20, mind a' 18 összetett mérők; ha ezeket ismét mérőkre fejtjük: $20 = 4 . 5$, és $18 = 3 . 6$, — lesz $360 = 4 . 5 . 3 . 6$. — Még ezek közt is a' 4 és 6 tovább fejthetők 2.2-re, és 2.3-ra; — és így $360 = 2 . 2 . 5 . 3 . 2 . 3$, mellyek már mind első mérők. És így 360-nak első mérői vagy

osztói: három 2, két 3, egy 5. Ugyanezen első osztókra más úton is eljuthatni; — jelesen: $360 = 24.15$, vagy $360 = 4.6.3.5 = 2.2.2.3.3.5$. — Azonban legkönnyebb módja az osztók' kikeresésének az, ha az ember legelőször is a' legkisebb, vagy is első osztókat keresi fel p. $360 = 2.180 = 2.2.90 = 2.2.2.45 = 2.2.2.3.15 = 2.2.2.3.3.5$; vagy világosság' okaért így írhatni le:

$360 = 2.2.2.3.3.5.$
180
90
45
15

Hasonlólag:

$144 = 2.2.2.2.3.3.$
72
36
18
9

így: $125 = 5.5.5.$
$512 = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.$

Miután valamelly számnak első osztóit felkerestük: azokból ugyanazon számnak összetett osztóit könnyü kicsinálni, — sokszorozván az első osztókat egymással, minden lehető változatok szerint. p. 30-nak első osztói, az 1et is oda vévén, ezek: 1, 2, 3, 5, — összetettek ezek: $2.3 = 6$; $2.5 = 10$; $3.5 = 15$; $2.3.5 = 30$. Így 420-nak első osztói: $1.2.2.5.3.7$; — összetett osztói: $2.2 = 4$, — $2.5 = 10$, — $2.3 = 6$; $2.7 = 14$ — $5.3 = 15$, — $3.7 = 21$; $5.7 = 35$; — $2.2.5 = 20$, — $2.2.3 = 12$, — $2.5.3 = 30$; $2.2.7 = 28$, — $2.3.7 = 42$; $5.3.7 = 105$, — $2.2.5.3 = 60$, — $2.2.5.7 = 140$; — $2.2.3.7 = 84$; $2.5.3.7 =$

210; — 2.2.5.3.7=420. — Ugyanis a' számban, annak akármelly osztója annyiszor van meg, a' hány egy van a' többi osztók' sokszorozmányában; — és két v. több osztók' sokszorozmánya annyiszor van meg, a' hány egy van az azokon kívüli osztók' sokszorozmányában; — és így akármelly első osztóiból csinált sokszorozmány a' számnak osztója. p. 30=5.6, a' 30-ban 5 megvan 6-szor, — a' 6, 5-ször; 30=2.3.5, — a' 2 meg van benne 3.5=15-ször, — 2.5=10 megvan benne 3-szor, — 3.5=15 meg van benne 2-szer.

Valamelly szám tehát elosztható, nem csak az ő első osztóival, — hanem ezek közül akárhánynak sokszorozmányával is.

Viszont valamelly szám elosztható nem csak összetett osztójával, hanem mind azon osztókkal is, mellyekre azon összetett osztót kifejthetni. p. 42 elosztható 6-al, és így 2-vel is, 3-al is, mivel 6=2.3. Igy tehát 48= 6-szor 8, vagy is=2-szer 3szor 8, az az 48ban a' 8 megvan 6-szor, — vagy 3-szor nyolcz megvan 2szer, — vagy 2-szer 8 megvan 3-szor.

32. §.

Mivel gyakran igen érdekes tudni vallyon valamelly szám első-e, vagy összetett? szükséges némelly szabályokat adni, mellyek szerint megismerhessük, mellyik számnak mi osztója lehet? De mielőtt azokat adhatnánk: lássunk néhány azokra vezető tételeket.

1) *Ha két vagy több számnak ugyanazon osztója van: ezen osztó eloszlja azoknak összegét is.* Mert az emlitett két vagy több számok nem egyebek, mint az ő közös osztójok mindenikben néhányszor kereken véve; — és igy azoknak összegük nem egyéb, mint ugyan

azon osztó annyiszor véve mindössze, a' hányszor a' külön számokban vétetik; honnan látni való hogy azon osztó az összegnek is osztója. p. o. mivel 12, 15, 21 mindenik elosztható 3-al: 48 is, = azoknak összege, 3-al osztható, t. i.

$$12 = 3.4$$
$$15 = 3.5$$
$$21 = 3.7$$

innen $12+15+21 = 3.4+3.5+3.7$

vagy $48 = 3.(4+5+7)$

$$48 = 3.16.$$

vagy egyetemes mennyiségekkel:

$$a = d.n$$
$$b = d.m$$
$$c = d.p$$

$$a+b+c = d.n+d.m+d.p$$
$$a+b+c = d\,(m+n+p.)$$

2. *Ha két számnak ugyan-azon osztója van: ezen osztó elosztja azoknak különbségét is.* Mert azon két szám különkülön nem egyéb levén, mint ugyanazon osztó nehányszor kereken véve mindenikben: látni való hogy midőn a' kisebbiket a' nagyobbikból kivonom, nem egyebet teszek, mint ugyanazon osztót, annyiszor kereken véve, a' hányszor a' kisebbikben van, kivonom ugyanazon osztónak annyiszor kereken vételéből, a' hányszor a' nagyobbikban meg van; — és így a' különbség is ugyanazon osztó néhányszor kereken véve lesz, — vagyis a' különbségnek is ugyanazon osztója lesz. p. o. 27, és 15 oszthatók levén 3-al: ezeknek különbségök is $27-15 = 12$, osztható 3-al t. i.

$$27 = 3.9$$
$$15 = 3.5$$

$$27-15 = 3.9-3.5$$
$$27-15 = 3\,(9-5.)$$
$$12 = 3.4.$$

vagy egyetemes mennyiségekkel:

$$a = d.n$$
$$b = d.m$$
$$a - b = d.n - d.m$$
$$a - b = d.(n - m.)$$

3. *Valamelly szám' több sokasainak összege, sokasa ezen számnak; — és két sokasainak különbsége sokasa ezen számnak.* — Ez csak az más szavakkal, a' mi az 1-ső és 2-dik szám alatt mondatott, — tudván hogy a' számnak minden sokasa azon szám által osztható. p. o. 3-nak sokasa 12, 18, és így ezeknek összege 30, 's különbsége 6, a' 3-nak sokasa.

4. *Ha két számnak (A, és B) összege (C), és közűlök egyik (A) közös osztóval (d) bir: ezen közös osztó osztója a' másik (B) számnak is.* Mert midőn ezen két szám közűl egyiket az összegből kivonom, ott marad a' másik. Már ha C-ből A-t kivonom: akkor nem egyebet csinálok, mint ugyanazon *d*-nek sokasából, ugyanazon *d*-nek másik sokasát vonom ki, — és így ott ugyancsak *d*-nek sokasa maradt, (l. 3k sz.) vagy is a' B is sokasa *d*-nek; azaz a' B elosztható *d*-vel. p. o. $35 = 20 + 15$; -'s mivel 35 és 20 elosztható 5-el: tehát 15 is osztható, t. i.

$$35 = 20 + 15$$
$$35 - 20 = 15$$
$$35 = 5.7$$
$$20 = 5.4$$
$$35 - 20 = 15 = 5.7 - 5.4$$
$$= 5(7 - 4)$$

vagy egyetemileg:

$$C = A + B$$
$$C - A = B$$
$$C = d.n$$
$$A = d.m$$
$$C - A = d.(n - m) = B.$$

5. *Ha egy összeg két részből áll, mellyeknek egyike bizonyos szám által el nem osztható: ezen szám az összeget sem osztja el.* Mert ha az összeget elosztaná: úgy annak másik részét is el kellene oszthatnia; pedig ez épen a' feltétel ellen van. p. o. 6 elosztván 24-et, de 7-et nem: ezeknek összegét = 31-et sem osztja el. — *Valamint megfordítva: ha két szám' összegét eloszt valamelly szám, — de a' két szám közül egyiket nem osztja, tehát a' másikat sem.* p. o. 44 = 28 + 16, — 44-et eloszt 11, de 28-at nem, — és így 16-ot sem.

6. *Valamelly számnak osztója felénél nagyobb nem lehet.* Mert ha felével osztom el: a' hányados = 2. Ha felénél nagyobbal osztanám: a' hányados lenne 1 és valami törtszám.

7. Minden ollyan számot, melly egy más kisebb szám által nem osztható, 's így az osztáskor maradékot hagy, úgy tekinthetni, mintha két részből állana, mellyek közül egyik az említett szám által osztható, másik nem osztható. p. o. 25-t ha 7-el osztok, megtalálom benne 3-szor, de marad fenn 4; és így 25 = 7.3 + 4; melly két részek közül az első 7.3, osztható 7-el, — a' másik 4, nem osztható. — Ha tehát két, vagy több ollyan számaim vannak, — mellyek közül egy bizonyos osztóval egyik sem osztható; de a' maradékaik' összege elosztható: úgy azon osztóval az említett számoknak összege is elosztható. Mert ezen számoknak fő összegét úgy tekinthetni, mint két részből állót, mellyeknek egyike minden osztható részeknek, — másika pedig minden nem osztható részeknek összege. Ha tehát ezen utóbbi része a' fő összegnek, az osztó által elosztható: úgy maga a' fő összeg is elosztható, — mivel két elosztható részből áll. p. o. 25 nem osztható 7-el, — maradék = 4; — 66 sem osztható 7-el, — maradék = 3; — de

mivel a' maradékok' összege, $4+3=7$ osztható 7el: tehát a' számok' összege is $=91$ osztható. t. i.

$$25=7.3+4$$
$$66=7.9+3$$
$$25+66=7.3+7.9+(4+3)$$
$$91=7.(3.9)+7$$

látni való, hogy mind a' $7.(3+9)$, mind a' 7, az az mind a' két rész osztható 7el: és így az összeg, 91 is osztható. — Hasonlólag: 9, 12, 24, egyik sem osztható 5-el: de mivel maradékaik' 4, 2, 4 összege $=10$, osztható: tehát fő összegük is $=45$ osztható.

33. §.

A' mondottakból egyenesen folynak ezek:

1) *két vagy több páros számoknak összegök is páros szám.* Mert ezen tétel más szavakkal ide megy ki: ha két vagy több számok külön külön 2-vel eloszthatók: úgy azoknak összegök is elosztható 2-vel.

2) *páratlan számoknak páros sokasága páros összeget ad.* Mert minden páratlan szám 2-vel elosztatván, 1 maradékot hagy. Ha tehát a' páratlan számok' sokasága páros: a' maradékok' összege is páros: az az 2-vel osztható; következőleg a' fő összeg is elosztható kettővel, az az páros. p. o. $3+11+15+17=46$.

3) *ellenben páratlan számoknak páratlan sokasága páratlan összeget ad.* — Mert itt a' maradékok' összege páratlan. 'sat.

4) *két páros számoknak különbsége is páros.* Mert ezen tétel más szavakkal ide megy ki: ha két szám, külön mindegyik, 2-vel osztható: azoknak különbségök is osztható.

5) *ellenben egy páros, és egy páratlan számoknak különbsége páratlan.* — Mert ez más szókkal ide megy

ki: ha két szám egy harmadikkal (2-vel) nem osztható: azoknak különbsége sem.

6) *két páratlan számnak különbsége páros.* Mert a' nagyobbik szám annyi mint a' kisebbik és a' különbség együtt. Már miután a' kisebbik páratlan, ha még a' különbség is páratlan volna: úgy két páratlan számnak, vagy is páros sokaságú páratlan számoknak összege, t. i. a' nagyobbik szám páros tartoznék lenni; — ez pedig a' feltétel ellen van. — *Vagy:* minden páratlan számot úgy nézhetni, mint két részből állót, mellyeknek egyike páros, másika = 1; már midőn páratlan számot páratlanból kivonok: ennek eggye amannak eggyét megsemmíti, — páros részeiknek különbsége pedig páros. p. o. 27 — 15 másként (26 + 1) — (14 + 1.)

$$\begin{array}{r} 26+1 \\ -(14+1) \\ \hline 12+0 \end{array}$$

34. §.

A' melly számmal valamelly sokszorozmánynak valamelly sokszorozója eloszlható: azzal maga a' sokszorozmány is eloszlható. Mert a' sokszorozmány nem egyéb, mint ollyan összeg, mellyben valamellyik sokszorozó maga magához van adva annyiszor, a' hány egy van a' másik sokszorozóban, vagy a' többi sokszorozók' sokszorozmányában. Már a' melly számmal a' részek, vagyis az összeadandók oszthatók: azzal az összeg is osztható; — azaz a' melly számmal a' maga magához néhányszor adandó sokszorozó osztható, azzal a' sokszorozmány is osztható. p. o. 7 . 6 . 10 = 420, elosztható 7-el, mert 7 azzal eloszlható, már pedig 420 ollyan összeg, mellyben 7 magához van adva 6 . 10, = 60-szor, — és így a' melly 7, minden összeadandóit

elosztja, az elosztja az összeget = 420-t is. Ugyan ezen 420-t elosztja 3 is, mert 6-t az elosztja, — már pedig 420 áll 70-szer magához adott 6-ból; — ugyan azt elosztja 5 is, mert 10-t az elosztja, már pedig 420 áll 6 . 7 = 42-szer magához adott 10-ből.

Innen foly, hogy *két páros*, — vagy *egy páros és egy páratlan sokszorozóknak sokszorozmánya mindig páros.* Mert mindenik esetben a' sokszorozmányt úgy tekinthetni, mint ollyan összeget, melly néhányszor magához adott páros részekből származik.

Ellenben két páratlan számnak sokszorozmánya páratlan. Mert itt a' sokszorozmányt úgy tekinthetni, mint páratlan számnak önmagához páratlan számszor adatásából származott összeget, vagy is páratlan számoknak páratlan sokaságából származott összeget. (33 §. 3 szám.)

35. §.

Ha egy szokszorozmánynak két sokszorozói külön-külön egy harmadik számmal nem oszthatók: azoknak sokszorozmányok még is osztható lesz, ha maradékaiknak sokszorozmánya azzal osztható. Mert mind a' két sokszorozót úgy nézhetni, mint két részből állót, mellyeknek egyike az említett harmadik számmal osztható, — másika pedig a' nem osztható maradék. Már ezeknek sokszorozásánál négy részletes sokszorozmány áll elő, mellyek közül három az osztható részeknek sokasa, 's így a' felvett szám által osztható; 's csak a' negyedik rész, t. i. az oszthatlan maradékok' sokszorozmánya ollyan, melly lehet azon szám által osztható is, nem is; — és azon esetben ha ez is osztható: látni való hogy a' fő sokszorozmány négy ollyan részekből áll, mellyek a' felvett szám által mind oszthatók, és így azoknak összegök is, az az a' fő sokszorozmány osztható. p. o.

legyenek a' két sokszorozók 16 és 9, a' harmadik szám pedig 6, melly sem 16-t sem 9-t nem oszt. Mindenik ezen két sokszorozók közűl áll tehát két részből 12 + 4, és 6 + 3-ból, mellyek közűl a' 12 és 6 oszthatók a' 6 által, a' 4 és 3 pedig nem osztható maradékok. Már ha ezen két sokszorozót, így két-két részre szakgatva, egymással sokszorozzuk: így lesz a' számítás:

$$\begin{array}{l}(12+4)\\(6\ +3)\\\hline(6.12)+(6.4)+(3.12)+(3.4)\end{array}$$

mellyek közül a' 3 első tag látni való hogy 6-nak sokasa, és így 6 által osztható; és mivel most a' 4-dik tag is, $3.4=12$, osztható 6 által: tehát a' 4 tagnak összege is, t. i. $16.9=144$ osztható.

36. §.

Két számnak közös osztója, azon két számnak egymással elosztásából származható maradékot is elosztja. Vagy más szókkal: *az osztandónak és osztónak közös osztója, vagy méröje, a' maradéknak is osztója.* Mert elosztván a' kisebbikkel a' nagyobbikat, (akár az osztóval az osztandót, akár az osztandóval az osztót, mint a' törtszámoknál), kijő bizonyos hányados, és marad fenn (most ez az eset lévén feltéve) bizonyos maradék; tudjuk hogy a' mit elosztottunk (vagy is a' nagyobbik), annyi mint az a' mivel osztottuk (vagyis a' kisebbik) sokszorozva a' hányadossal, + maradék. És így a' nagyobbik olyan összeg, mellynek két része, vagy összeadandója van, t. i. egyik a' kisebbik szám, szokszorozva a' hányadossal, — másik a' maradék. Már mivel a' felvett közös osztó elosztja a' nagyobbikat, vagy itt az összeget, és annak egyik részét, vagy itt a' kisebbiknek sokasát: tehát elosztja az összegnek másik

részét is, t. i. a' maradékot. (32 §. 4 szám) p. o. 36- és 15-nek közös osztója 3; ha 15-el elosztom 36-t, hányados lesz 2, maradék 6, — és a' 3 ezen maradékot is elosztja. Mert

$$36 = (2 . 15) + 6$$

a' 36 ollyan összeg mellynek két része van, egyik 2 . 15, másik 6; — és mivel a' 36-nak és 15-nek közös osztója, t. i. a' 3, elosztja mind az összeget, t. i. 36-t, mind annak egyik részét, 2 . 15-t, mint a' 15-nek sokasát: tehát az összegnek másik részét is, a' 6-t, t. i. a' maradékot tartozik elosztani.

Innen viszont látni való, hogy a' melly szám a' maradékot, és a' kisebbiknek sokasát, vagyis magát a' kisebbiket elosztja, az a' nagyobbikat is elosztja; mert ez más szókkal ezt teszi: két számnak osztója, azok' összegének is osztója. (32 §. 1 szám).

Innen, ha egy nagyobb számnak egy kisebbeli elosztásában ollyan maradékra jövünk, melly a' kisebbet, vagy is az osztót elosztja: az a' nagyobbikat, vagy az osztandót is elosztja; mert maga magát is elosztja; már pedig ő belőle, és a' kisebbiknek a' hányadossali sokszorozmányából, mint két részekből áll a' nagyobbik, mint összeg. p. o. 64 : 12, ha elosztom 64-t 12-vel, hányados lesz 5, maradék 4, és mivel ezen 4 elosztja mind önmagát, mind a' 12-t, tehát a' 64-t is elosztja, mert $64 = 5 . 12 + 4$.

Ha két szám közül a' kisebbik a' nagyobbikat maradék nélkül elosztja: úgy ezen két számnak legnagyobb közös osztója maga a' kisebbik szám, mert ennek önmagánál nagyobb osztója nem lehet. p. o. 18-nak és 9-nek legnagyobb közös osztója 9, — mert az mind magát, mind a' 18-at maradék nélkül osztja. Ha pedig a' kisebbik a' nagyobbikat nem osztja el maradék nélkül; de ollyan maradékot hagy, melly a' kisebbiket el-

osztja: akkor ezen maradék lesz a' két számnak legnagyobb közös osztója, p. 64 : 12 a' maradék = 4, lesz legnagyobb közös osztó; mert a' közös osztónak ollyannak kell lenni, melly a' maradékot is elossza, mint az imént megmutatánk; már pedig a' maradékot nem oszthatja el nagyobb szám, mint maga a' maradék, és így ama két számnak a' maradéknál nagyobb közös osztója nem lehet.

Ha pedig az első osztásban ollyan maradék maradna, melly az osztót, vagy is a' kisebbiket nem osztaná, — de annak osztásában ollyan maradékot hagyna, melly őtet, t. i. az előbbi maradékot, mint már ezen második osztásban osztót, maradék nélkül osztaná: akkor ezen második maradék lenne a' két kiadott számnak legnagyobb közös osztója. p. o. 81- és 12-nek mi a' legnagyobb közös osztója?

$$\begin{array}{r|l|l} 12 & 81 & 6 \\ & 72 & \\ \hline & 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 9 & 12 & 1 \\ & 9 & \\ \hline & 3 & \end{array} \qquad 3 \mid 9 \mid 3$$

legnagyobb közös osztó 3, mert

$$81 = 12.6 + 9$$
$$12 = 9.1 + 3$$

ollyannak kell lenni a' közös osztónak melly ezen utolsó maradék 3-t, 's egyszersmind a' 9-t is elossza, mert ha ezeket elosztja: úgy elosztja a' 12-t is, — mint a' második egyenlet mutatja; — továbbá ha a' 9-et és 12-t elosztja: úgy elosztja a' 81-et is, mint az első egyenlet mutatja (32 §. 1 sz.). Mivel pedig az utolsó maradékot, 3at, nem oszthat el nagyobb szám 3nál: látnivaló, hogy 81- és 12-nek 3-nál nagyobb közös osztója nem lehet.

Innen két szám' legnagyobb közös osztója' kikeresésének legbiztosabb 's legegyszerűbb módja ez: a' kisebbik számmal el kell osztani a' nagyobbikat; ha nincs

maradék: úgy a' kisebbik szám maga a' legnagyobb közös osztó; — ha pedig maradék van, azzal az előbbi osztót el kell osztani, 's ha elosztja: ez a' legnagyobb közös osztó; — ha pedig maradékot hagy, azon maradékkal el kell osztani az előbbi osztót; 's ha itt is maradék lesz, azzal ismét a' megelőző osztót, mind addig míg vagy ollyan maradékra nem találunk, melly az előbbi osztót maradék nélkül elosztja, — melly esetben ezen utolsó maradék lesz a' feltett két számnak legnagyobb közös osztója; — vagy pedig utolsó maradék 1 lesz, melly azt mutatja, hogy azon két számnak nincs közös osztója, hanem azok viszonyos első számok. — p. o. 8172-nek, és 729-nek mi a' legnagyobb közös osztója?

$$729 \mid \underline{8172} \mid 11 \qquad 153 \mid \underline{729} \mid 4 \qquad 117 \mid \underline{153} \mid 1$$
$$\underline{153} \qquad\qquad \underline{117} \qquad\qquad \underline{36}$$
$$36 \mid \underline{117} \mid 3 \qquad 9 \mid \underline{36} \mid 4$$
$$\underline{9} \qquad\qquad \underline{0}$$

legnagyobb közös osztó 9, mert

$$8172 = 11.729 + 153$$
$$729 = 4.153 + 117$$
$$153 = 1.117 + 36$$
$$117 = 3.36 + 9$$

a' 9 elosztja a' 9-et is, a' 36-ot is, és így a' 117-et is, a' 4-dik egyenlet szerint; ha 36-t és 117-et eloszt: úgy eloszt 153-t is, a' 3-dik egyenlet szerint; ha 117-et és 153-t eloszt, úgy eloszt 729-et is, a' 2-dik egyenlet szerint; ha 153-t és 729-t eloszt, úgy eloszt 8172-t is, az első egyenlet szerint; — és mivel ezen közös osztónak, a' legutolsó maradékot, 9-et is elkell osztani: látni való hogy 8172-nek és 729-nek legnagyobb közös osztója 9-nél nagyobb nem lehet.

Más példa: 205-, és 97-nek mi a' legnagyobb közös osztója?

97 | 205 | 2
194
11 | 97 | 8
88
9 | 11 | 1
9
2 | 9 | 4
8
1

itt negyedik maradékul 1-et nyertünk, melly azt mutatja, hogy 205-nek és 97-nek közös osztójok nincs, — és így azok viszonyos elsőszámok.

Más példa: 203-, és 91-nek mi a. l. n. k. o-ja?

91 | 203 | 2
182
21 | 91 | 4
84
7 | 21 | 3
21
00

legnagyobb közös osztó 7, — ha ezzel a' 203-t és 91-et elosztom: hányadosok lesznek 29, és 13; mellyek, valamint minden legnagyobb közös osztó által nyert hányadosok, mindenkor viszonyos első számok; — mert ha azok nem volnának, p. o. ha 13-t és 29-et még 2-vel el lehetne osztani, úgy nem 7, hanem 7 . 2 = 14 volna a' legnagyobb közös osztó; — már pedig, mint látánk, az előadott módon talált közös osztó minden lehetők közt legnagyobb.

37. §.

Az előadottakból folynak a' számok' oszthatósá-

gát, vagy is az osztók' felkeresését illető néhány szabályok:

1) *Minden szám, mellynek egyes helyén 0 van: osztható 2-vel, 5-el és 10-zel.* Mert minden illyen számot úgy tekinthetünk, mint sokszorozmányát 10-nek; mellynek tehát egyik sokszorozója 10, — másik pedig a' 0-on kivűli jegyei. p. o. $250 = 25 . 10$. Már a' melly számok 10-t elosztják, azok annak sokasát is elosztják (34 §.); elosztják pedig 10-et: 2, 5, 10: és így ezek akármelly 0-on végződő számot elosztanak.

2) *Minden szám, mellynek egyes helyén 5 van, osztható 5-el.* — Mert az illyen számot úgy tekinthetni mint összeget, mellynek egyik része az 5ön kivűli jegyek, 0-al pótolva az 5' helyét, — másik része pedig az 5. p. o. $265 = 260 + 5$, — már mind a' két rész osztható levén 5-el: az összeg is 265 ugyanazzal osztható. (37 §. 1 szám, és 32 §. 1 szám.)

3) *Minden szám, mellynek egyes helyén páros szám van, osztható 2-vel.* Mert az illyen szám két részek' összege, t. i. a' páros számnak, és az azt megelőzőknek, 0-al pótolva a' páros' helyét. p. o. $278 = 270 + 8$. Már mind a' két rész osztható levén 2-vel: ugyanazzal az összeg 278 is osztható.

4) *Minden szám, mellynek végén két 0 van, osztható 2-vel, 4-el, 5-el, 10-el, 20-al, 25-el, 50el, 100-al.* Mert minden illyen szám a' száznak sokasa, p. o. $26800 = 268 . 100$; és így a' melly számok a' 100-at elosztják: azok annak minden sokasait elosztják. Már pedig 100-nak a' nevezett számok mind osztói, mert $100 = 2 . 50 = 4 . 25 = 5 . 20 = 1 . 100$.

5) *Minden szám, mellynek végén három 0 van, osztható ezekkel: 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000.* Mert minden illyen szám

sokasa 1000-nek, p. o. $258000 = 258 . 1000$. Már pedig az 1000 mind ezekkel osztható, mert: $1000 = 2 . 500 = 4 . 250 = 5 . 200 = 8 . 125 = 10 . 100 = 20 . 50 = 25 . 40$.

6) *A' melly szám 25-ön végződik: osztható 25-el.* Mert két ollyan részekből áll, mellyek 25-el oszthatók. p. $1625 = 16 . 100 + 25$, vagy $= 16 . 4 . 25 + 25$; mind az első rész $(16 . 4 . 25)$, mind a' második $= 25$, osztható lévén 25-el: az összeg is 1625 azzal osztható.

7) *A' melly számnak egyes jegye, és kétszer vett tízes jegye (nem hely-, csak idom értékét tekintve) összeadatván, olly összeget állít elő, melly 4-el osztható: azon egész szám is osztható 4el.* Mert az illynemű számot olly részekre lehet szakgatni, mellyek különkülön mind oszthatók néggyel; és így azoknak összege, vagy az egész szám is, azzal osztható. Csak ezt jegyezzük megelőre, hogy $10 = 2 . 4 + 2$; $100 = 4 . 25$; $1000 = 4 . 250$ 'sat. — Legyen tehát például ezen szám, 54376, — részekre szakgatva:

$$543 . 100 + 7 . 10 + 6$$
vagy $$543 . 4 . 25 + 7 . (4 . 2 + 2) + 6$$
vagy $$543 . 4 . 25 + 7 . 4 . 2 + 7 . 2 + 6$$

áll tehát 54376 ezen részekből: $(543 . 4 . 25) + (7 . 4 . 2) + (7 . 2) + 6$; mellyek közül a' két első látnivaló hogy 4-nek sokasa, és így azzal osztható; csak a' két utolsórol van kérdés, melly két utolsó tag nem egyéb, mint a' kiadott szám' tizesjegyének kettőzete, — és annak egyes jegye; — ha még ezek is összeadatván 4-el oszthatók: akkor az egész szám osztható; már pedig $2 . 7 = 14$, és $14 + 6 = 20$ elosztható néggyel; és így 54376 is osztható.

8) *A' melly számnak egyes jegye, — továbbá tízes jegye kétszer véve, — és végre százas jegye négyszer véve olly összeget állít elő, melly 8-al osztható: azon egész szám is osztható 8-al.* Mert az illynemü számot olly részekre lehet szakgatni, mellyek különvéve 8-al mind oszthatók, és így azoknak összege, vagy a' kiadott szám is ugyanazzal osztható. Csak ezt jegyezzük meg előre: hogy $10=8+2$; $100=8.12+4$; $1000=8.125$. — Legyen tehát például ezen szám: **437256**, — részekre szakgatva:

$$437.1000+2.100+5.10+6$$
vagy $$437.125.8+2.(8.12+4)+5.(8+2)+6$$
vagy $$437.125.8+2.8.12+5.8\ldots.$$
$$+2.4+5.2+6.$$

áll tehát **437256** ezen részekből: $437.125.8+2.8.12+5.8+2.4+5.2+6$. mellyek közül a' három első látnivaló hogy 8-nak sokasa, és így azzal osztható; csak a' három utolsórol van kérdés, mellyek is nem egyebek, mint a' kiadott szám' százas jegyének négyzete (2.4), — tízes jegyének kettőzete (5.2), és egyes jegye (6); ha összeadva ezek is oszthatók 8-al, úgy az egész kiadott szám is, mint 8-al osztható részek' összege, 8-al osztható; — és most $2.4=8$; $5.2=10$; és $8+10+6=24$, 8al osztható: és így **437256** is osztható.

9) *A' melly számnak jegyei, idomértékök szerint összeadatván, 9-el osztható összeget csinálnak: azon szám elosztható 9-el.* p. o. **37854** osztható 9-el, mert $3+7+8+5+4=27$, osztható 9el. Oka pedig ennek az, mert az illyen számot úgy tekinthetni, mint ollyan összeget, mellyet 9-el osztható részekre lehet szakgatni. Csak ezt jegyezzük meg előre hogy: $10=9+1$; $100=99+1$; $1000=999+1$; $10000=9999+1$.

A' fentebbi példa 37854 részekre szakgatva így lesz:

$$30000+7000+800+50+4$$

vagy $3.(9999+1)+7.(999+1)+8.(99+1)+5.(9+1)+4$

vagy $3.9999+7.999+8.99+5.9\ldots$
$+3 \quad +7 \quad +8 \quad +5 \quad +4$

által tehát 37854 ezen részekből: $3.9999+7.999+8.99+5.9+3+7+8+5+4$, mellyek közül a' négy első rész látni való hogy 9-nek sokasa, és így azzal osztható; csak az öt utolsó részről $(3+7+8+5+4)$ van kérdés, mellyek épen a' kiadott számnak jegyei; és mivel azok is összevéve $=27$-et tesznek, melly 9-el osztható, tehát ezen számnak minden részei, és így az egész szám is 9-el osztható.

A' melly szám 9-el osztható, az 3-al is osztható, mert 9 a' 3-nak sokasa.

10) *A' melly szám' jegyeinek összege 3-al osztható: azon szám maga is osztható 3-al.* p. o. 84252 osztható 3-al, mert: $8+4+2+5+2=21$ osztható 3-al. Csak ezt jegyezzük meg előre hogy: $10=3.3+1$; $-100=3.33+1$; $-1000=3.333+1$; $-10000=3.3333+1$ 'sat. E' szerint az előbbi példa 84252 részekre szakgatva így lesz:

$$80000+4000+200+50+2$$

vagy $8.(3.3333+1)+4.(3.333+1)+2.(3.33+1)+5.(3.3+1)+2$

vagy $8.3.3333+4.3.333+2.3.33+5.33\ldots.$
$+8 \quad +4 \quad +2 \quad +5 \quad +2$

mellyek közül a' négy első részek látnivaló hogy 3-al oszthatók; és mivel az öt utolsó részeknek $(8+4+2+5+2)$ t. i. a' kiadott szám' jegyeinek összege $=21$ is osztható 3-al, tehát az egész szám is osztható.

11) *A' melly szám' páros rangú jegyeinek összegéből, páratlan rangú jegyeinek összege kivételtén, a' különb-*

ség vagy 0, vagy 11-el osztható szám: azon egész szám 11-el osztható. p. o. 78958 mivel

$$\begin{array}{r} 8+9+7=24 \\ 5+8=13 \\ \hline \text{különbség}=11, \end{array}$$

tehát az egész osztható 11-el; mert ollyan részekre szakgatható, mellyeket 11-el osztani lehet. Csak ezt jegyezzük meg előre hogy:

$$\begin{array}{rl} 10= & \ldots\ldots 11-1 \\ 100= & 99+1= 9.11+1 \\ 1000= & 1001-1= 91.11-1 \\ 10000= & 9999+1=909.11+1 \end{array}$$

E' szerint a' példaúl vett szám 78958 részekre szakgatva lesz:

$$70000+8000+900+50+8$$

vagy $7.(9999+1)+8.(1001-1)+9.(99+1)+5.(11-1)+8$

vagy $\begin{array}{rl} 7.(909.11+1)= & 7.909.11+7 \\ 8.(91.11-1)= & 8.91.11 \quad -8 \\ 9.(9.11+1)= & 9.9.11 \quad +9 \\ 5.(11-1)= & 5.11 \quad -5 \\ \ldots\ldots\ldots & \quad +8 \end{array}$

E' szerint a' felvett szám áll 4 ollyan részekből, mellyek 11-nek sokasai, és így azzal oszthatók, $7.909.11$, $+8.91.11$, $+9.9.11$, $+5.11$; ezenkívül öt ollyan részekből, mellyek összeadatván egy 11-el osztható részt adnak: $+7-8+9-5+8=24-13=11$. Úgyde ezen utolsó rész nem egyéb, mint a' páros és páratlan rangú jegyek' összegének különbsége.

38. §.

Miként tudhatni meg, ha valamelly szám *első*-e? vagy *összetett?*

Próbálni kell elosztani a' számot az alsóbb első számokkal, elkezdve a' legkisebbiken, egymásután, mindaddig míg vagy ollyanra nem akadunk, melly maradék nélkül oszt; vagy ollyanra, melly mellett kijövő hányadosnak épszáma kisebb mint az osztó. — *Az első* esetben a' szám *összetett;* mert azon első szám, melly őtet maradék nélkül osztja, és annak illető hányadosa, a' számnak osztói. — A' második esetben a' szám *első;* mert mikor már ollyan osztóra (v. sokszorozóra) mentünk, mellynek hányadosa (v. sokszorozótársa) ő nála kisebb: akkor már túl vagyunk mind azokon az osztókon, mellyekkel a' feltett számot kereken lehetne elosztani; mert minden számnak osztója és hányadosa nem egyéb, mint két sokszorozói, mellyek vagy egyenlők, vagy nem egyenlők; ha egyenlők volnának, már rájok találtunk volna; ha nem egyenlők volnának, úgy is a' kisebbik, mint osztó, a' nagyobbikat, mint hányadost, már kimutatta volna, 's nem szükség ott keresni tovább őket, a' hol már az osztó nagyobb mint a' hányados.

Azonban nem szükség az osztást összetett számokkal próbálni; mert ha valamelly ollyannal a' feltett szám osztható volna: úgy osztható volna annak első osztóival is, és arra már rá akadtunk volna.

A' felebb mondottak szerint megismerhetjük, ha valamelly szám osztható-e **2**-vel, **3**-al, **5**-el, **11**-el.

Példa. Kivánnám tudni, valljon **547** első szám-e?

Látván hogy **2**-, **3**-, **5**-, **11**-el nem osztható: próbálom elosztani sorba az első számokkal: **7**, **13**, **17**, **19**, **23**, **29**, és miután a' **29**-eli osztásban hányados lesz $18+\frac{25}{29}$, melly a' **29**-nél kisebb: innen biztoson mondhatom, hogy **547** *első szám.*

39. §.

A' számok' első osztóinak felkeresését láttuk **32** §.

Most lássunk egy példát arra, miként könnyíthetik ezen felkeresést a' 37, 38 §-ban mondottak.

Példa. 145860-nak első osztóit kikeresni.

$145860 = 2.2.3.5.11.13.17.$
72930
36465
12155
2431
221

Ugyan is: 145860, 0-on végződvén, elosztható 2-vel, és $= 2 \times 72930$; ezen 72930 ismét osztható 2-vel, és $= 2 \times 36465$; — ezen 36465, mivel jegyei' összege, $3+6+4+6+5 = 24$, sokasa 3-nak, elosztható 3-mal, és $= 3 \times 12155$; ezen 12155 osztható 5-el, és $= 5 \times 2431$; — ezen 2431 osztható 11-el, mert páros és páratlan jegyei' összegeinek különbsége $= 0$, $(1+4)-(2+3) = 0$; és valóban $2431 = 11 \times 221$. Végre 221-et probálván elosztani az első számokkal, úgy találjuk hogy 13-al osztható, 's $= 13 \times 17$.

40. §.

Az előadott elvek' alkalmazása által lehetne készíteni a' számok' osztható ságát mutató táblát, illy formán:

1	$10 = 2.5$
2	11
3	$12 = 2.2.3$
$4 = 2.2$	13
5	$14 = 2.7$
$6 = 2.3$	$15 = 3.5$
7	$16 = 2.2.2.2$
$8 = 2.2.2$	17
$9 = 3.3$	$18 = 2.3.3$

19
20 = 2.2.5
21 = 3.7
22 = 2.11
23
24 = 2.2.2.3
25 = 5.5
26 = 2.13
27 = 3.3.3
28 = 2.2.7
29
30 = 2.3.5
31
32 = 2.2.2.2.2
33 = 3.11
34 = 2.17
35 = 5.7
36 = 2.2.3.3
37
38 = 2.19
39 = 3.13
40 = 2.2.2.5
41
42 = 2.3.7
43
44 = 2.2.11
45 = 3.3.5
46 = 2.23
47
48 = 2.2.2.2.3
49 = 7.7
50 = 2.5.5
51 = 3.17
52 = 2.2.13
53
54 = 2.3.3.3
55 = 5.11
56 = 2.2.2.7
57 = 3.19
58 = 2.29
59
60 = 2.2.3.5
61
62 = 2.31
63 = 3.3.7
64 = 2.2.2.2.2.2
65 = 5.13
66 = 2.3.11
67
68 = 2.2.17
69 = 3.23
70 = 2.5.7
71
72 = 2.2.2.3.3
73
74 = 2.37
75 = 3.5.5
76 = 2.2.19
77 = 7.11
78 = 2.3.13
79
80 = 2.2.2.2.5
81 = 3.3.3.3
82 = 2.41
83
84 = 2.2.3.7
85 = 5.17
86 = 2.43
87 = 3.29
88 = 2.2.2.11
89
90 = 2.3.3.5
91 = 7.13
92 = 2.2.23

$93 = 3.31$
$94 = 2.47$
$95 = 5.19$
$96 = 2.2.2.2.2.3$
'sat.

97
$98 = 2.7.7$
$99 = 3.3.11$
$100 = 2.2.5.5$
'sat.

41. §.

Több számok' *közös sokasának* neveztetik azon szám, mellyet azok közül mindenikkel eloszthatni. Ha több számoknak több közös sokasai vannak: azok közt a' legkisebbet felkeresni gyakran érdekes. p. o. 8-nak és 12nek közös sokasai: 96, 72, 48, 24, mert mindezeket el lehet osztani 8-al is, 12-vel is; és legkisebb közös sokasuk 24. — Miképen lehet ezt felkeresni?

Tudjuk hogy valamelly szám, sokasa mindazon számoknak, mellyek, vagy mellyeknek első osztói, az ő első osztói közt feltaláltatnak. p. o. 48, — kifejtvén azt első osztóira $= 2.2.2.2.3$, látni való hogy sokasa 2-nek, mert osztói közt ott van 2; sokasa 4-nek, mert osztói közt ott van $2.2 = 4$; — sokasa 8-nak, mert osztói közt van $2.2.2 = 8$; sokasa 16nak, mert osztói közt van $2.2.2.2 = 16$; — sokasa 6-nak, mert osztói közt van $2.3 = 6$; sokasa 12-nek, mert osztói közt van $2.2.3 = 12$; sokasa 24-nek, mert osztói közt van $2.2.2.3 = 24$. Innen ha több számoknak első osztóiból, sokszorozás által csinálunk egy számot: az mindnyájoknak közös sokasa lesz. p. o. $8 = 2.2.2$, és $12 = 2.2.3$, ezeknek első osztóit egymással sokszorozván: $2.2.2.2.2.3 = 96$, ez a' 8-nak és 12-nek közös sokasa. — Azonban midőn több számoknak közös sokasát akarunk csinálni: elég lesz csak arra vigyázni, hogy az alkalmazandó első osztók között mindenik számnak első osztói meglegyenek, — 's így a' többször előforduló, ugyanazon első osztók kö-

zűl néhány kimarad; 's ez által a' számoknak lehető legkisebb közös sokasát feltaláljuk. p. o. a' fentebbi példában 2.2.2 már meg van a' 8; ha még ehez 3-at adok = 2.2.2.3, már ott lesz a' 12 is = 2.2.3; és így csak ezekből: 2.2.2.3 csinálok közös sokast = 24, melly tehát a' 8-nak és 12nek legkisebb közös sokasa.

Példa: 8-, 12-, 15-, 18-, 20- és 27-nek legkisebb közös sokasát kikeresni:

$$8 = 2.2.2$$
$$12 = 2.2.3$$
$$15 = 3.5$$
$$18 = 2.3.3$$
$$20 = 2.2.5$$
$$27 = 3.3.3$$

szedjünk össze nem több, csak annyi első osztókat ezekből, hogy azok közt mindeniknek első osztói meglegyenek:

$$2.2.2.3.5.3.3$$

t. i. a' 8' — első osztói = 2.2.2; — ha ezekhez 3-at teszek, (2.2.2.3) meglesznek a' 12-éi; — ha ezekhez egy 5-t teszek, (2.2.2.3.5), meglesznek a' 15-éi; — ha ezekhez még egy 3t teszek, (2.2.2.3.5.3); meglesznek a' 18-éi; — a' 20-éi már megvannak; — a' 27-re nézve pedig még egy 3-t kell hozzá tennem, 's lesz = 2.2.2.3.5.3.3 = 1080, melly a' feladott számoknak legkisebb közös sokasa.

Több számok' legkisebb közös sokasát így lehet tehát kikeresni: a' kiadott számok fejtessenek ki első osztóikra; 's ezekből vétessenek annyi és ollyan első osztók', hogy azok közt minden kiadott számnak első osztói feltaláltassanak; — ezeknek sokszorozmánya lesz a' kiadott számoknak legkisebb közös sokasa. — Még egy példa:

12-, 15-, 20-, 30-, 36-, 48-, 60-, 72-nek legkisebb közös sokasát kikeresni:

$12 = 2.2.3$
$15 = 3.5$
$20 = 2.2.5$
$30 = 2.3.5$
$36 = 2.2.3.3$
$48 = 2.2.2.2.3$
$60 = 2.2.3.5$
$72 = 2.2.2.3.3$

keresett szám:

$2.2.3.5.3.2.2 = 720.$

42. §.

Midőn valamelly szám sokszorozókkal van kifejezve, annak sokszorozói közül egyet, vagy néhánynak sokszorozmányát, úgy nézhetem mint osztót, a' többit pedig, vagy a' többinek sokszorozmányát, mint hányadost; mert az osztónak és hányadosnak (itt pedig mind ezen sokszorozóknak) sokszorozmánya minden szám. Ha tehát a' számnak sokszorozói közül egyet, vagy többet elhagyok: az annyit tesz, mint azon számot az elhagyott sokszorozókkal elosztani; mert az ott maradt sokszorozó, v. sokszorozók' sokszorozmánya, a' kihagyottak' sokszorozó társát, vagy is az illető hányadost képezi. p. $210 = 2.3.5.7$; ha az 2 osztó: úgy $3.5.7 =$ hányados; — ha $2.3 =$ osztó: úgy $5.7 =$ hányados; ha $2.5 =$ osztó: úgy $3.7 =$ hányados; ha $2.7 =$ osztó: úgy $3.5 =$ hányados; ha $7 =$ osztó: úgy $2.3.5 =$ hányados. És *így* ha akármellyikkel, vagy ha többekkel is el akarom osztani: csak kitörlöm azokat; 's a' megmaradtak mutatják a' hányadost. p. o. $210 = 2.3.5.7$ elosztom

2-vel, hányados lesz = 3 . 5 . 7 = 105; — elosztom 15 = 3 . 5-el, hányados = 2 . 7 = 14 'sat.

Így a' betüs mennyiségeknél, mivel a' betük' jegy nélküli egymásmellé írása sokszorozást jelent; p. abcd ezt teszi: a . b . c . d; és így azon mennyiség négy sokszorozókkal van kifejezve, a-, b-, c-, és d-vel: ha ezek közül akármellyikkel el akarom azt osztani, csak hagygyam ki az osztót belőle, az ott maradtak mutatják a' hányadost; így: abcd : a = bcd; abcd : b = acd; abcd : ac = bd; abcd: ad = bc; abcd: bd = ac; abcd: abc = d.

43. §.

Midőn több számok osztókkal (sokszorozókkal) vannak kifejezve: azoknak közös osztói elosztják mindnyáját; és így ezen közös osztók' sokszorozmánya a' mondott számoknak legnagyobb közös osztójok. — 'S itt egy új, még pedig néha a' 36 §. előadottnál könyebb módját találunk a' legnagyobb közös osztó' kikeresésének. T. i. fejtsük ki a' számokat első osztóikra, — a' közös osztókat sokszorozzuk egymással, 's készen van a' *legnagyobb közös osztó*. p. o. 175-nek, 203-nak és 91-nek mi a' l. n. k. osztójok?

175 = 5 . 5 . 7
203 = 7 . 29
91 = 7 . 13 legnagyobb közös osztó = 7.

más 1092-nek és 1248-nak mi a' l. n. k. o.?

1092 = 2 . 2 . 7 . 3 . 13
546
273
39
13

1248 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 13
624
312 közös osztók: 2, 2, 3, 13,
156 ezeknek sokszorozmánya, t. i.
78
39 2 . 2 . 3 . 13 = 156 = legnagy.
13 közös osztó.

Ha pedig az a' kérdés, hogy két, vagy több nagyobb számokból, ha a' legnagyobb közös osztójokkal elosztatnak, hányados gyanánt micsoda kisebb számok állnak elö: tudjuk hogy a' közös osztók' kihagyása után, a' melly osztók még fenn maradnak, azoknak sokszorozmánya lesz a' hányados, vagy is a' nagy számok ezen kisebbekre vonattak le. p. o. 1092 és 1248 közös osztóikkal elosztatván, így:

$$1092 = 2 . 2 . 7 . 3 . 13$$
$$1248 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 13$$

az egyikből 7, a' másikból $2 . 2 . 2 = 8$, lesznek hányadosok, vagy is azon legkisebb számok, mellyekre ama nagy számok levonattak.

NEGYEDIK CZIKKELY.

A' tört számok' számolásáról.

44. §.

Valahányszor az osztó ollyan szám, melly az osztandóban kereken nem találtatik: mindannyiszor az osztás' végzetével marad fenn valami, mellyben már az osztó egynél kevesebbszer találtatik; és ezt a' hányados' egységei után olly alakban irjuk, melly kimutassa, hogy ezen maradékot is az ő nála nagyobb osztóval elkell osztani; 's mivel ezen osztásnak hányadosa egynél kisebb: innen ezen hányados, vagy ennek kifejezete neveztetik törtszámnak. p. o. 29-et ha 8al elosztok, megtalálom benne 3-szor; de mivel $3 . 8$ csak 24, fenn marad 5, mellyben már a' 8 egyszer nem találtatik; és így annak osztását kijelentem így: $\frac{5}{8}$, mellynek hányadosa kevesebb egynél, 's innen neveztetik törtszám-

nak; — és így $29 : 8 = 3\frac{5}{8}$, — 4-nél kevesebb, 3-nál több.

Innen a' törtszám nem egyéb, mint ollyan hányados, melly származik, midőn kisebb osztandót nagyobb osztóval elosztunk. Vagy

A' törtszám egy egésznél kevesebbet jelentő menynyiség.

Hogy a' törtszámról, p. $\frac{5}{8}$, tiszta fogalmunk legyen: vegyük figyelemre, hogy $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; elosztván 8-al, lesz $\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; és így $\frac{5}{8}$ nem egyéb, mint $\frac{1}{8}$, 5-ször véve $= 5 . \frac{1}{8}$; vagy is az egynek nyólcz egyenlő részeiből 5, mellyet így mondunk ki: *öt nyólczadrész.*

Mindegy tehát akár 5-öt osszak el 8 egyenlő részre, és abból vegyek egy részt; — akár egyet osszak 8 felé, és ollyan részt 5öt vegyek. Így $\frac{7}{12} = 7 . \frac{1}{12}$, az- az egy egészet 12 egyenlő részre osztván, egyegy rész lesz $\frac{1}{12}$, 's illyet veszek 7-szer. Így $\frac{9}{14} = 9 . \frac{1}{14}$, egy egészét 14 egyenlő részre osztván, egy-egy rész lesz $\frac{1}{14}$, 's illyet veszek 9-szer.

Innen látnivaló, hogy a' törtszámnak is vannak *egységei*, mellyek abban többször-kevesebbszer vétetnek, p. o. az utóbbi törtszámnak egységei az $\frac{1}{14}$-ek; — azonban ezek az egy egésznek csak valahányad, — p. o. most tizennegyed részei.

A' törtszámot két számmal lehet kifejezni, mellyek közül egyik azt mutatja, hány részre van fel osztva az egész? vagyis, hogy a' törtszám' egységei hányad részét teszik az egy egésznek? — és így mekkorák? — vagy mik? — 's ez igen helyesen neveztetik *nevezőnek;* — a' másik pedig azt mutatja, hogy a' törtszám' egységeiből hányat kell venni? — 's ez neveztetik *számlálónak.* A' vonalnak felibe a' számláló, alá a' nevező iratik. p. legyen az egész = egy forint, — ekkor $\frac{6}{20}$-ben

a' 20 *(nevező)* azt mutatja, hogy egy forint el van osztva 20 egyenlő részre, — vagy ezen törtszámnak egységei, $= \frac{1}{20}$, t. i. egyforintnak huszadrészei, vagy is egy egy garasok; a' 6 *(számláló)* pedig azt mutatja, hogy 6 illyen egységeket, t. i. garasokat kell venni.

A' melly törtszámoknak egységei ugyanazok, vagy is a' mellyeknek ugyanazon nevezőjök van: azok *egyfajta törtszámok* (fractiones homogeneae), p. o. $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, mindeniknek egységei az egésznek $\frac{1}{12}$-edrészei; — ellenben a' mellyeknek egységei különbözők, vagy is a' mellyeknek különböző nevezőjök van: azok *különfajták* (heterogeneae) p. o. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{13}$, 'sat. itt az elsőnek egysége az egésznek *ötöd-*, másodiké *heted-*, harmadiké *12-ed*, negyediké *13-ad* része.

45. §.

Valóságos törtszám (fractio genuina) az, mellynek számlálója kisebb mint nevezője, p. o. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ 'sat. mert az illyen jelent valósággal kevesebbet egy egésznél. — A' mellynek pedig számlálója vagy épen akkora, vagy még nagyobb mint nevezője: az neveztetik *látvás törtszámnak* (fractio spuria, vagy impropria), mivel abban egész is lappang. Jelesen ha a' számláló a' nevezővel épen egyenlő: akkor a' törtszám' értéke $=$ *egy egész*, p. $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{100}{100} = 1$; mert a' hány részre van elosztva az egész, épen annyit kell venni; vagy az osztó az osztandóban *egyszer* találtatik. — Ha a' számláló két akkora mint a' nevező; vagy más szókkal, ha az osztandó két akkora, mint az osztó: akkor a' törtszám' értéke két egész; — ha három akkora: akkor három egész; szóval a' hányszorta nagyobb a' számláló a' nevezőnél, annyi egész van a' törtszámban, — mit úgy tudunk meg, ha a' számlálót a' nevezővel elosztjuk. p. $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{20}{4} = 4$. Az illy elosztásban, vagy kereken ép-

szám jő ki, — vagy mellette törtszám is, p. $^{25}/_{5} = 5$, $— ^{27}/_{5} = 5 + {}^{2}/_{5}$.

Követk. Akármelly egész vagy ép számot kifejezhetni lárvás törtszámmal, felvévén nevezőül, vagy számlálóul akármelly számot; — csak arra vigyázzunk, hogy a' számláló a' nevezőnél annyiszorta legyen nagyobb, a' hány egyet akar jelenteni a' lárvás törtszám. p. o. $5 = {}^{20}/_{4} = {}^{25}/_{5} = {}^{30}/_{6} = {}^{35}/_{7} = {}^{40}/_{8}$ 'sat. $6 = {}^{24}/_{4} = {}^{60}/_{10}$ 'sat. Ha tehát nevezőül adatik ki valamelly szám: sokszorozni kell azzal az egészet, 's ezen sokszorozmány lesz a' számlálója. p. o. 7-et tegyünk 3 nevezőjü törtszámmá, $7 \times 3 = 21$, $^{21}/_{3}$; mit így is magyarázhatunk: ha valamelly számot ugyanazon számmal mind sokszorozzuk, mind elosztjuk, nem változik: $\frac{7 \times 3}{3} = 7$.

46. §.

A' *valóságos törtszámban* a' hányad része a' számláló a' nevezőnek, vagy a' hányszorta kisebb a' számláló a' nevezőnél: annyid része a' törtszám' értéke a' maga egészének. p. $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{6}$, $^{4}/_{8}$, $^{25}/_{50}$, $^{42}/_{84}$, $^{105}/_{210}$ mindnyájának értéke = fél, mert mindben fele a' számláló a' nevezőnek, vagy mindben fele kivántatik azon részeknek, mellyekre az egész felosztatott. Így $^{2}/_{6}$, $^{3}/_{9}$, $^{4}/_{12}$, $^{12}/_{36}$, $^{25}/_{75}$ mind = egyharmadrésze az egésznek.

Követk. 1) A' törtszám' értéke tehát függ a' számláló és nevező közti viszonytól.

2) Több törtszámok közül mellyiknek legyen nagyobb, vagy kisebb értéke: által fogjuk látni, ha megvi'sgáljuk, mi viszonyban légyenek számlálóik nevezőikhöz. p. o. $^{2}/_{6} > {}^{5}/_{20} < {}^{8}/_{16} < {}^{7}/_{12}$.

3) Az ollyan törtszámoknak, mellyeknek számlálóik nevezőikhöz egyenlő viszonyban vannak, értékök is egyenlő. p. o. $^{2}/_{8} = {}^{5}/_{20} = {}^{4}/_{16}$; és $^{5}/_{15} = {}^{3}/_{9} = {}^{12}/_{36}$.

4) Ha két egyenlő törtszámnak számlálóit nevezőivel felcseréljük: akkor is egyenlők maradnak, — mert azoknak viszonyuk ugyanaz marad; csak hogy most a' valóságos törtszám lárvássá, a' lárvás valóságossá lesz. p. o. $^3/_9 = {}^4/_{12}$; és $^9/_3 = {}^{12}/_4$.

5) Akármelly törtszám helyett lehet más, egyenlő értékű törtszámot csinálni; csak arra kell vigyázni, hogy a' minő viszonyban van a' kiadott törtszám' számlálója nevezőjéhez, ugyanollyanban legyenek azok egymáshoz az új törtszámban is. Erre nézve ha kiadatik az új törtszám' számlálója, vagy nevezője: aranyszabályon (mellyről alább lesz ugyan szó, de kétség kívül a' tanuló előtt már nem ismeretlen), kell a' számlálóhoz nevezőt, és viszont, keresni, — főként ha a' köztök levő viszony könnyen szembe nem tünik. p. o. $^2/_6$ helyett kell csinálni ollyat, mellynek számlálója legyen 24; mivel 6-nál 2 háromszorta kisebb: tehát 24-nél is a' számlálónak háromszorta kell kisebbnek lenni $= 8$, és így az új törtszám lesz $^8/_{24}$. — Ha $^9/_{18}$ helyett kell csinálni ollyan törtszámot, mellynek nevezője 60, kereshetek annak számlálóját így: $18 : 9 = 60 : x. = 30$, és így az új törtszám $= {}^{30}/_{60}$.

Jegyz. Midőn valamelly törtszám ollyan nevezőjü, vagyis annyi részre osztja fel az egészet, a' mennyire azt rendesen nem szokták felosztani: az illyen törtszám helyett, az előadott módon kell csinálni ollyan nevezőjüt, mellyre azon egészet szokták osztani. p. o. $^3/_{12}$ forint, — a' forintot 12 részre nem szokták osztani, — de szokták 60 részre; csinálok hát a' $^3/_{12}$ helyett 60 nevezőjü törtszámot így:

$12 : 3 = 60 : x. = 15$; $^{15}/_{60} = 15$ kr.

12 | 180 | 15
12
60
60
00

47. §.

Közönséges törtszám (fractio vulgaris) az, mellynek nevezője lehet akárminő szám; *Tizedes* (decimalis) pedig az, mellynek nevezője csak 1, néhány mellé tett zerusokkal lehet. (lásd 26 §.)

I. *Közönséges törtszámok.*

48. §.

A' mondottakból egyenesen folynak ezek:

1) *Ha nem változván a' nevező; a' számlálót neveljük: nő a' törtszám' értéke;* mert ugyanakkora részekből többet veszünk p. $^2/_{12} < {}^3/_{12} < {}^5/_{12} < {}^7/_{12}$. És viszont *ha fogyasztjuk a' számlálót: fogy a' törtszám' értéke*, mert ugyanakkora részekből kevesebbet veszünk. p. o. $^8/_{12} > {}^5/_{12}$.

2) *Ha nem változván a' számláló; a' nevezőt neveljük: fogy a' törtszám' értéke.* Mert a' nevezőt nevelni, annyit tesz, mint az egészet több részre osztani; — ha több részre oszlik: kisebbek lesznek a' részek; — már ha azon kisebb részekből csak annyit veszek, mint előbb a' nagyobbakból: természetesen kevesebbet veszek, mint előbb, azaz a' törtszám' értéke fogy. p. o. $^2/_4 > {}^2/_5 > {}^2/_6 > {}^2/_7$. — *És viszont ha a' nevezőt fogyasztjuk: nő a' törtszám' értéke*, mert most a' részek nagyobbakká lesznek. p. o. $^2/_{16} < {}^2/_8 < {}^2/_4$.

3) *Ha mind a' számlálót, mind a' nevezőt ugyanannyiszorta nagyobbá tesszük, azaz ugyanazon számmal sokszorozzuk; a' törtszám' értéke nem változik.* Mert növén a' számláló: nő a' törtszám' értéke: — de növén a' nevező: fogy a' törtszám' értéke. Már ha a' mennyit nő, annyit fogy: nem változik. p. o.

$$\frac{2\times4}{3\times4} = {}^8/_{12} = {}^2/_3; \quad \frac{3\times3\times2}{4\times3\times2} = {}^{18}/_{24} = {}^3/_4.$$

4) Hasonlólag *ha mind a' számlálót mind a' nevezőt ugyanannyiszorta kisebbé tesszük, azaz ugyanazon számmal elosztjuk: a' törtszám' értéke nem változik.* Mert fogyván a' számláló: fogy a' törtszám' értéke: de fogyván a' nevező: nő a' törtszám' értéke. Már ha a' menynyit fogy, annyit nő: nem változik. p. o. $\frac{20:5}{60:5} = \frac{4}{12}$ $= {}^{20}/_{60}$; $\frac{32:8:2}{64:8:2}$ vagy $\frac{32:(8\times2)}{64:(8\times2)} = {}^{2}/_{4} = {}^{32}/_{64}$.

49. §.

Ezekből folynak ismét e' következők:

1) Valamelly törtszám' értékét nehányszorta *nagyobbá* lehet tenni kétképen, t. i. vagy a' számláló' sokszorozása-, vagy a' nevező' elosztása által. p. o. ${}^{10}/_{25}$ ötszörte nagyobbá lesz, vagy így: $\frac{10.5}{25} = {}^{50}/_{25}$, vagy így: $\frac{10}{25:5} = {}^{10}/_{5} = {}^{50}/_{25}$.

2) Valamelly törtszám' értékét valahányszorta *kisebbé* tenni hasonlólag kétképen lehet, t. i. vagy a' számláló' elosztása-, vagy a' nevező' sokszorozása által. p. ${}^{10}/_{25}$ ötszörte kisebbé lesz, vagy így: $\frac{10:5}{25} = {}^{2}/_{25}$, vagy így: $\frac{10}{25.5} = {}^{10}/_{125} = {}^{2}/_{25}$.

3) Valamelly nagyobb számokkal kifejezett törtszámot kisebb számokkal kifejezhetünk, *(kisebb tagokra vonhatunk)*, a' nélkül hogy értéke változnék, — ha mind számlálóját, mind nevezőjét ugyanazon számmal maradék nélkül eloszthatjuk. p. o. $\frac{150:5}{345:5} = \frac{30:3}{69:3} = {}^{10}/_{23}$. Itt tehát a' számlálónak és nevezőnek közös osztójára, még pedig hogy a' lehető legkisebb tagokra vonhas-

suk, *legnagyobb közös osztójára* levén szükség: vegyük hasznát azon szabályoknak, mellyeket felebb (§. 36, 37, 43) a' közös osztó', és legnagyobb közös osztó' kikeréséről tanulánk. Ezek közt főként ajánlható az, melly a' 43§. előadatott, hogy t. i. mind a' számláló, mind a' nevező fejtessenek ki első osztóikra, — a' közös osztók, mellyeknek sokszorozmánya lenne a' legnagyobb közös osztó, hagyassanak ki, — 's az ott maradt osztók' sokszorozmányai lesznek a' hányadosok, azaz ezekre lesz levonva a' törtszám, mint legkisebb tagokra. p.

$$\frac{1760}{4620} = \frac{2.2.2.2.11.2.5}{2.2.5.7.11.3}$$

közös osztók: 2.2.5.11 (legn. k. o. = 220)

maradt osztók: számlálóban: 2.2.2 = 8
nevezőben: 7.3 = 21

és így hányadosok, vagyis a' levont törtszám = $^8/_{21}$.

Így: $\frac{1386}{2457} = \frac{2.3.3.11.7}{3.3.3.7.13} = {}^{22}/_{39}$

Így: $\frac{3685}{5263} = \frac{5.11.67}{19.277}$ kisebbre nem vehető.

50. §.

Különfajta törtszámokat *egyfajtákká* lehet tenni így: mindenik törtszámnak mind számlálóját, mind nevezőjét sokszorozni kell a' többiek' nevezőivel; így mindenik törtszámnak ugyanazon nevezője lesz; azonban értéke sem változik, mert mind a' számlálók, mind a' nevezők ugyanannyiszor nagyobbakká lettek p. o.

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} = \frac{48}{72}, \frac{54}{72}, \frac{60}{72}.$$

Itt látni való hogy az új nevező, t. i. 72, a' kiadott törtszámok' nevezőinek, t. i. 3-, 4-, 6-nak legnagyobb közös sokasa; és a' hányszorta nagyobb ez mindenik

törtszám' nevezőjénél: annyiszorta nagyobbá kell tenni mindeniknek számlálóját is, hogy értékök ne változzék; jelesen a' 3-nál 72 nagyobb $4 \times 6 = 24$-szerte, és így a' 2-t is 24-szerte kell nagyobbá tenni; a' másodikban a' 4-nél 72 nagyobb $3 \times 6 = 18$-szorta; és így a' 3-at is 18-szorta kell nagyobbá tenni 'sat. — Azonban mivel, ha a' nevezőknek legnagyobb közös sokasát vesszük új közös nevező gyanánt; ez által az új törtszámok gyakran igen nagy számokkal lesznek kifejezve: innen helyesebb lesz, valahányszor lehet, (t. i. ha a' kiadott törtszámok' nevezői nem viszonyos első számok), a' kiadott törtszámok' nevezőinek legkisebb közös sokasát venni új és közös nevező gyanánt, 's a' hányszorta ez nagyobb különkülön mindeniknek nevezőjénél, annyiszorta tegyük nagyobbá mindeniknek számlálóját is. Erre nézve a' nevezők' legkisebb közös sokasát, a' fentebb (41 §.) előadott módon kikeresvén: nézzük meg hányszorta nagyobb ez különkülön mindeniknek nevezőjénél, 's tegyük annyiszorta nagyobbá számlálóját is, azaz mindenik nevezőjével osszuk el a' legkisebb közös sokast, vagy is az új nevezőt, 's a' hányadossal sokszorozzuk a' számlálót, az lesz az új számláló. p. o. $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_8$, $^{11}/_{12}$-t egyfajtákká kell tenni. Erre nézve a' nevezőket kifejtem első osztóikra:

$$3$$
$$4 = 2.2$$
$$6 = 2.3$$
$$8 = 2.2.2$$
$$12 = 2.2.3$$

legkisebb közös sokast csinálok így:

$$2.2.3.2 = 24$$

$24 : 3 = 8$, és $8 \times 2 = 16$, első törtszám: $^{16}/_{24}$
$24 : 4 = 6$, és $6 \times 3 = 18$, második: $^{18}/_{24}$

24 : 6 = 4, és 4 × 5 = 20, harmadik: $^{20}/_{24}$
24 : 8 = 3, és 7 × 3 = 21, negyedik: $^{21}/_{24}$
24 : 12 = 2, és 11 × 2 = 22, ötödik: $^{22}/_{24}$.

Más példa: adott törtszámok

$^{3}/_{4}$, $^{5}/_{6}$, $^{11}/_{20}$, $^{4}/_{15}$, $^{7}/_{30}$, $^{13}/_{24}$, $^{7}/_{36}$

közös nevező:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 = 360$$

egyfajtává tett törtszámok:

$\frac{270}{360}$, $\frac{300}{360}$, $\frac{198}{360}$, $\frac{96}{360}$, $\frac{84}{360}$, $\frac{195}{360}$, $\frac{70}{360}$

51. §.

Elegyes törtszám az, melly mellett egész is van. Azon egészet törtszámmá lehet változtatni, vagy úgy hogy alá, nevező gyanánt, 1 íratik; vagy úgy hogy nevezője az legyen, mi a' mellette levő törtszámé, — midőn a' számlálónak annyiszor nagyobbnak kell lenni a' nevezőnél, a' hány egy van az egészben; és így a' törtszám' nevezőjével az egészet sokszorozni kell, 's a' nevezőt alá irni. p. o. $5 + {}^{2}/_{3} = {}^{5}/_{1} + {}^{2}/_{3}$ vagy $^{15}/_{3} + {}^{2}/_{3}$ v. összevéve $= {}^{17}/_{3}$.

Közönséges törtszámok' algorithmusai.

52. §.

1) *Összeadás:*

1) Ha egyfajták a' törtszámok: csak számlálóikat kell összeadni; 's ezen összegnek a' közös nevezőt alá írni; mivel a' nevező csak azt mutatja, minemü mennyiségek-, vagy az egésznek minemü egyenlő részei forognak fenn, mint törtszámi egységek?, azt pedig, hogy hány illynemü törtszámi egységet kelljen összeadni, csak a' számlálók mutatják. p. $^{17}/_{60} + {}^{5}/_{60} + {}^{8}/_{60}$ forint

hány 60-adrész forint, vagyis hány krajczár? $= {}^{30}/_{60}$ $= 30$ kr.

2) Ha a' törtszámok különfajták: változtassanak egyfajtákká; a' számlálók adassanak össze; a' közös nevező irassék alá az összegnek. p. o.

$${}^{2}/_{3} + {}^{3}/_{4} + {}^{5}/_{6} + {}^{7}/_{8} + {}^{11}/_{12} = {}^{16}/_{24} + {}^{18}/_{24} + {}^{20}/_{24} + {}^{21}/_{24} + {}^{22}/_{24}$$

$$= \frac{16+18+20+21+22}{24} = {}^{97}/_{24}$$

A' műtétel illy alakú is lehet:

kiadott törtszámok:

$${}^{2}/_{3} + {}^{3}/_{4} + {}^{5}/_{6} + {}^{7}/_{8} + {}^{11}/_{12}$$

közös nevező:

$$2.2.2.3 = 24$$

átalakitás:

16	
18	
20	24
21	
22	

összeg: ${}^{97}/_{24}$

más példa: *összeadandók:*

$${}^{7}/_{12} + {}^{8}/_{15} + {}^{3}/_{20} + {}^{11}/_{30} + {}^{19}/_{36} + {}^{13}/_{48} + {}^{29}/_{60} + {}^{31}/_{72}$$

közös nevező:

$$2.2.3.5.3.2.2 = 720$$

átalakitás:

420	
384	
108	
264	720
380	
195	
348	
310	

összeg $= {}^{2409}/_{720}$

3) Ha a' törtszámok közt egészek is vannak: azok vagy adassanak össze külön egymással; vagy változtassanak törtszámokká, 's az előadott módon történjék a' műtétel. p. o.

$$7 + {}^{4}/_{5} + {}^{3}/_{4} + 2 + 5 + {}^{7}/_{8}$$

a' törtszámok' összege $= 32 \mid 30 \mid 35$ | 40 közös nevező

egészek' összege $= 14$; ${}^{97}/_{40}$

ezt 40 nevezőjü törtszámmá tévén $14 \times 40 = 560$, lesz ${}^{560}/_{40}$; együtt $560 \mid 97 \mid 40 = {}^{657}/_{40}$, vagy a' lárvás törtszámból az egészet kikeresvén:

$$40 \mid 657 \mid 16 + {}^{17}/_{40}.$$

40
257
240
17

53. §.

2) *Kivonás.*

1) Ha egyfajták a' törtszámok: a' kivonandó' számlálóját ki kell vonni a' kisebbítendő' számlálójából; 's a' különbségnek a' közös nevezőt aláírni: p. o.

$${}^{8}/_{9} - {}^{5}/_{9} = {}^{3}/_{9}$$

2) ha különfajták: előbb változtassanak egyfajtákká, — 's azután vonjuk ki, úgy mint mondánk. p. o.

$${}^{5}/_{7} - {}^{3}/_{5} = {}^{25}/_{35} - {}^{21}/_{35} = {}^{4}/_{35}$$

3) ha több tagjai vannak mind a' kisebbítendőnek, mind a' kivonandónak: azoknak számlálói az egyfajtára átalakitás után külön adassanak össze, 's a' kivonandók' számlálóinak összege, a' kisebbitendőkéből vonassék ki; 's ezen különbségnek a' közös nevező irassék alá. p. o.

$(\frac{4}{5}+\frac{3}{4})-(\frac{3}{6}+\frac{5}{8})=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$. *Közös nevező* = 120. *átalakítás:* $^{96}/_{120}+{}^{90}/_{120}-{}^{40}/_{120}-{}^{75}/_{120}$.

$$\begin{array}{r|l} 96-40 & 120 \\ 90-75 & \end{array}$$
$$\overline{186}-\overline{115}$$

különbség $= {}^{71}/_{120}$

más példa. *adott törtszámok:*

$$^{4}/_{15}+{}^{13}/_{20}-{}^{7}/_{30}+{}^{19}/_{72}-{}^{4}/_{45}-{}^{7}/_{36}+{}^{11}/_{60}$$

közös nevező:

$$3\times5\times2\times2\times2\times3=360$$

átalakítás:

$$\begin{array}{r|l} 96-84 & \\ 234-32 & 360 \\ 95-70 & \\ 66 & \end{array}$$
$$\overline{491}-\overline{186}$$

különbség: $\dfrac{491-186}{360}={}^{305}/_{360}={}^{61}/_{72}$

4) Ha egészek is vannak: azokat tetszés szerint, vagy meghagyván, egymásból ki vonjuk, — vagy törtszámokká változtatván, úgy bánunk velök mint a' többiekkel. p. o.

$$8+{}^{5}/_{7}-5-{}^{3}/_{8}=3+\frac{40-21}{56}=3+{}^{19}/_{56}.$$

5) Az egészeket külön akarván kivonni, (a' mi leghelyesebb), ha megesik, hogy a' kivonandó törtszám nagyobb értekü, mint a' kisebbítendő: illyenkor a' kisebbítendő egészből a' törtszámhoz *egy*-et adjunk, 's törtszámmá változtatván, azzal összefogjunk, hogy a' kivonás megtörténhessék. p. o. $6+{}^{2}/_{7}-4-{}^{3}/_{4}=5+{}^{9}/_{7}-4-{}^{3}/_{4}=1+\frac{36-21}{28}=1+{}^{15}/_{28}$.

más. $3 - {}^2/_3 + 4 - {}^2/_5 - {}^3/_7 = {}^3/_1 - {}^2/_3 + {}^4/_1 - {}^2/_5 - {}^3/_7$

$$\begin{array}{r|l} = 315 - 70 & \\ 420 - 42 & 105 \\ -45 & \\ \hline 735 - 157 & = {}^{578}/_{105} = 5 + {}^{53}/_{105} \\ \hline 105 & \end{array}$$

54. §.

3) *Sokszorozás.*

A' sokszorozás' fogalma ez: *annyiszor vétetik (v. annyiszor van meg a' sokszorozmányban) a' sokszorozandó, a' hányszor az egy meg van a' sokszorozóban.* p. o. $12 \times 3 = 36$, a' sokszorozmány- t. i. 36-ban 3szor van meg a' sokszorozandó 12, mert a' sokszorozó- 3-ban az egy 3-szor van meg.

Alkalmazzuk ezen elvet a' törtszámokra is: Ha ${}^1/_3$-el akarunk sokszorozni: a' sokszorozandónak harmadrészét kell venni, vagy is a' sokszorozmány a' sokszorozandónak egy harmadrésze lesz, — mivel a' sokszorozóban az egynek harmadrésze van meg. Ha sokszorozunk ${}^1/_7$-el: a' sokszorozmány a' sokszorozandónak hetedrésze lesz. p. o. $12 \times {}^1/_3 = {}^{12}/_3 = 4$.

$$12 \times {}^1/_7 = {}^{12}/_7.$$

E' szerint a' törtszámmali sokszorozás valósággal kevesebbszerezés.

Ha már sokszorozni akarunk ${}^3/_4$-el: most a' sokszorozandó' negyedrészét háromszor kell venni; mert a' sokszorozóban az egynek negyedrésze háromszor van meg. E' szerint $12 \times {}^3/_4 = {}^{12}/_4$ 3-szor véve $= \frac{12 \times 3}{4} = 9$. T. i. 12-őt elosztjuk 4-el, 's ez a' sokszorozandónak negyedrésze; 's ezt háromszor úgy veszszük, ha számlálóját sokszorozzuk 3-al.

E' szerint a' sokszorozás' szabályai ezek:

1) Ha épszámot kell sokszorozni törtszámmal: sokszorozzuk a' számlálóval az épszámot, 's ezen sokszorozmánynak irjuk alá a' nevezőt. p. $5 \times {}^{3}/_{7} = {}^{15}/_{7}$

2) Ha törtszámot kell épszámmal sokszorozni: ez ugyan épen csak az előbbi eset, mert a' kiadott számok közül akármellyiket nevezzük sokszorozónak, vagy sokszorozandónak, mindegy; és így itt is csak azt tegyük, mit az első szám alatt. — Egyébaránt így is magyarázhatjuk: épszámmal sokszorozni törtszámot annyi, mint a' törtszámot néhányszor nagyobbá tenni; azt pedig kétképen tehetjük: vagy úgy, hogy az épszámmal a' számlálót sokszorozzuk, — vagy úgy, hogy a' nevezőt elosztjuk. És ezt az előbbi esetre is alkalmazhatjuk. p. o. ${}^{3}/_{12} \times 4 = {}^{12}/_{12} = {}^{3}/_{3} = 1$.

3) Ha törtszámot kell törtszámmal sokszorozni: a' számlálók' sokszorozmányának aláiratik a' nevezők' sokszorozmánya. p. o. ${}^{5}/_{7} \times {}^{3}/_{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = {}^{15}/_{28}$. Ugyanis ${}^{5}/_{7}$-t ${}^{3}/_{4}$-el sokszorozni annyit tesz, mint ${}^{5}/_{7}$-nek negyedrészét venni háromszor. Már sokszorozván a' nevezőt 4el, lesz $\frac{5}{7 \times 4} = {}^{5}/_{28}$, melly ${}^{5}/_{7}$-nél négyszer kisebb, vagyis annak negyedrésze; hátra van hát hogy ezen mennyiséget 3-szor vegyük, mi az által lesz, ha számlálóját 3-al sokszorozzuk $= \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = {}^{15}/_{28}$. — E' szerint ${}^{15}/_{28}$ az ${}^{5}/_{7}$-nek ${}^{3}/_{4}$ része; és az illyen törtszám neveztetik *törtszám' törtszámának.*

Ezen módon sokszoroztatnak több törtszámok is egymással, t. i. a' két első' sokszorozmánya a' harmadikkal, — a' három elsőjé a' negyedikkel 'sat. p. o. ${}^{2}/_{3} \cdot {}^{3}/_{4} \cdot {}^{5}/_{6} = \frac{2.3.5}{3.4.6} = {}^{30}/_{27} = {}^{5}/_{12}$. — És midőn meges-

hetik, mind a' számlálókat, mind a' nevezőket kifejtjük első sokszorozóikra, 's a' közösöket ki hagyjuk. p. o.

$$^4/_5 \times {}^3/_8 \times {}^{11}/_{20} \times {}^{15}/_{22} = \frac{4.3.11.15}{5.8.20.22}$$

$$= \frac{2.2.3.11.3.5}{5.2.2.2.2.2.5.2.11} = {}^9/_{80}.$$

55. §.

4) *Elosztás.*

Tudjuk hogy az osztó és hányados, az osztandónak, mint sokszorozmánynak, sokszorozói levén: minél kisebb az osztó, annál nagyobb a' hányados; ha az osztó = 1: akkor a' hányados az osztandóval egyenlő; — ha pedig az osztó kevesebb egynél: akkor a' hányados az osztandónál nagyobb. p. o. 12 : $^1/_2$ = 24, t. i. 12-ben $^1/_2$ megvan 24-szer. Innen valahányszor valóságos törtszám az osztó: mindannyiszor a' hányados nagyobb mint az osztandó.

A' törtszámok' osztásában e' következő esetek jöhetnek elő:

1) Ha törtszámot kell osztani épszámmal: vagy elosztjuk vele a' számlálót, vagy sokszorozzuk a' nevezőt; mindkétképen annyiszorta lesz kisebbé a' törtszám' értéke; mi épen az osztásban céloztatik. p. o.

$$^8/_{12} : 4 = \frac{8:4}{12} = {}^2/_{12}; \text{ vagy } \frac{8}{12.4} = {}^8/_{48}.$$

2) Ha épszámot kell osztani törtszámmal: elosztjuk azt a' számlálóval, és sokszorozzuk a' nevezővel. p. $8 : {}^2/_3 = \frac{8.3}{2}$. Ugyanis ha a' 8at 2vel elosztom: a' hányados $^8/_2$ kelletinél kisebb lesz, mert kelletinél nagyobbal osztottam, t. i. nem 2vel kèll osztanom, hanem 3szor kisebbel, vagyis a' 2-nek 3-adrészével; hogy hát a' hányadost jóvá tegyem, 3-al sokszoroznom kell. Elosztjuk hát az

épszámot a' számlálóval, (ha lehet, valósággal, — ha nem lehet, csak kijelentve), és sokszorozzuk a' nevezővel. p. $8 : {}^{2}/_{3} = 8 : 2 = 4$, $4 . 3 = 12$, és így a' hányados $= 12$, vagy $\frac{8 . 3}{2} = {}^{24}/_{2} = 12$. Mindenkor tehetjük hát ezt, hogy az osztó' számlálóját nevezőjével felcserélvén, sokszorozást csinálunk, — azaz a' mostani számlálót az épszámmal sokszorozzuk, 's a' mostani nevezőt alá irjuk. p. $7 : {}^{4}/_{5} = 7 \times {}^{5}/_{4} = {}^{35}/_{4} = 8 + {}^{3}/_{4}$.

3) Ha törtszámot kell törtszámmal elosztani: akkor is épen azt tesszük, mit az imént; t. i. az osztó' számlálójával osztunk, nevezőjével sokszorozunk; épen azon okon, mit az imént mondánk. Kettőt teszünk tehát: 1) az osztó' számlálójával az osztandót elosztjuk, még pedig vagy úgy, hogy annak számlálóját elosztjuk, — vagy úgy, hogy nevezőjét sokszorozzuk; az előbbit nem mindig tehetvén kereken, többnyire az utóbbit tesszük, — 2) az osztó' nevezőjével az osztandót sokszorozzuk, — még pedig vagy úgy, hogy sokszorozzuk vele az osztandó számlálóját, — vagy úgy, hogy elosztjuk annak nevezőjét; az utóbbit nem mindig tehetvén kereken, többnyire az előbbit tesszük. p. o. ${}^{8}/_{24} : {}^{4}/_{6} = {}^{2}/_{4} = {}^{48}/_{96}$; így ${}^{5}/_{7} : {}^{2}/_{3} = {}^{15}/_{14}$. Ez tehát az osztás' szabálya: *ha lehet, el kell osztani számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel; — ha pedig, — mint legtöbbször szokott, — ez nem történhetik kereken: sokszorozni kell az osztó' számlálójával az osztandó' nevezőjét, — és az osztó' nevezőjével az osztandó' számlálóját; — vagy könnyebbség végett, az osztó' számlálóját nevezőjével fel kell cserélni, 's ekkor számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel sokszorozni.* p. o. ${}^{3}/_{5} : {}^{2}/_{4} = {}^{3}/_{5} \times {}^{4}/_{2} = {}^{12}/_{10}$

így: ${}^{7}/_{8} : {}^{3}/_{5} = {}^{7}/_{8} \times {}^{5}/_{3} = {}^{35}/_{24} = 1 + {}^{11}/_{24}$

56. §.

Gyakran megesik, hogy ugyanazon számvetésben az előadott műtételek közűl többek elő fordulnak; a' ki az előbbieket, és a' kapcsok' használatát érti, az ezeken nem fog fennakadni. p. o.

$$(5+{}^{3}/_{4})\times(7+{}^{5}/_{6}):(3-{}^{7}/_{9})=$$
$$={}^{23}/_{4}\times{}^{47}/_{6}:{}^{20}/_{9}={}^{23}/_{4}\times{}^{47}/_{6}\times{}^{9}/_{20}$$
$$=\frac{23.47.9}{4.6.20}=\frac{23.47.3.3}{2.2.2.3.2.2.5}={}^{3243}/_{160}$$

más példa:

$$\frac{(3+{}^{5}/_{6}+{}^{7}/_{12})\times(9-{}^{2}/_{3}+{}^{3}/_{5})}{(12+{}^{5}/_{6}-{}^{7}/_{9})}={}^{53}/_{12}\times{}^{134}/_{15}:{}^{217}/_{18}$$
$$=\frac{53\times134\times18}{12\times15\times217}={}^{3551}/_{1085}.$$

Megesik az is, hogy több tagokból álló mennyiség, sokszoroztatván, vagy elosztatván másik, 's talán ismét több tagokból állóval, egy mennyiség gyanánt vétetik; 's ez ismét sokszoroztatván, vagy osztatván egy harmadikkal, újjolag egy gyanánt vétetik a' negyedikre nézve 'sat. Illyenkor a' zavar' elkerülése végett, különböző idomú kapcsok használtatnak. p. o.

$$\{[(3+{}^{2}/_{5})\times4+{}^{5}/_{6}]\times2+{}^{3}/_{4}\}\times7+{}^{1}/_{3}={}^{12459}/_{60}$$

Ezen példában $(3+{}^{2}/_{5})\times4$, és ${}^{5}/_{6}$, két tagjai egy mennyiségnek, melly sokszoroztatván 2-vel, ismét első tagja lesz egy másik mennyiségnek, mellynek másik tagja ${}^{3}/_{4}$; ez ismét sokszoroztatván 7-el, első tagja lesz egy harmadik mennyiségnek, mellynek másik tagja ${}^{1}/_{3}$. — Műtétele így esik: először $3+{}^{2}/_{5}$-t összeveszem egy törtszámba $={}^{17}/_{5}$, ezt sokszorozom 4-el $={}^{68}/_{5}$; továbbá ehez hozzáadom ${}^{5}/_{6}$-t, előbb egyfajtára vévén így: ${}^{68}/_{5}+{}^{5}/_{6}={}^{408}/_{30}+{}^{25}/_{30}={}^{433}/_{30}$; ezt sokszorozom 2-vel $={}^{433}/_{15}$, ehez adom ${}^{3}/_{4}$-t, egyfajtára vévén $={}^{1777}/_{60}$; — ezt sokszorozom 7el $={}^{12439}/_{60}$, vég-

re ehez adok $^1/_3$-t $= {}^{20}/_{60}$-t, 's lesz a' végeredmény $= {}^{12459}/_{60} = 207 + {}^{39}/_{60}$.

más példa:

$$\frac{\left\{\frac{(3+{}^2/_3)\times 4}{5}+2\right\}\times 3-(4+{}^2/_3)}{(7+{}^5/_6)}+2 = {}^{774}/_{235}$$

mütétele: $\frac{{}^{74}/_5 - {}^{14}/_3}{{}^{47}/_6}+2 = ({}^{74}/_5 - {}^{14}/_3) : {}^{47}/_6 + 2$

$= {}^{152}/_{15} : {}^{47}/_6 + 2 = {}^{304}/_{235} + 2 = {}^{774}/_{235}$.

más példa:

$$\cfrac{3+2}{\cfrac{5+3}{\cfrac{4+1}{\cfrac{2+5}{6}}}}$$

ezen példában $^5/_6$ összeadatván **2**-vel, alkot egy számot $= {}^{17}/_6$, melly elosztja az *egy*-et; ezen hányados, $1 : {}^{17}/_6 = 1 \times {}^6/_{17} = {}^6/_{17}$, összeadatván **4**-el, alkot ismét egy számot $^{74}/_{17}$, melly elosztja a' **3**-at, $= 3 : {}^{74}/_{17} = 3 \times {}^{17}/_{74} = {}^{51}/_{74}$; ez ismét összeadatván **5**el, alkot egy számot, $= {}^{421}/_{74}$, melly elosztja a' **2**-t, $= 2 : {}^{421}/_{74} = 2 \times {}^{74}/_{421} = {}^{148}/_{421}$, ehez adatván a' **3**, lesz $^{1411}/_{421} = 3 + {}^{148}/_{421}$ végeredmény.

Az illy alakú törtszámok neveztetnek *lánctörteknek* (fractiones catenatae), mellyekről alább bővebben fogunk tanulni.

II. *Tizedes törtszámok.*

57. §.

Tizedes törtszám az, mellynek nevezője az egyen kívül nehány **0**, és így **10**, **100**, **1000** 'sat. És így a' tizedes törtszám' egységei, az *egy*-nek, vagy egésznek *tized-*, *század-*, *ezred-* 'sat. részei.

A' tizedes törtszám' eredete ez: a' tizedes számlálási rendszerben, valamelly jegy, minden jobbra következő helyen, tízszer kevesebbet jelent, mint a' balra megelőzőn, — vagyis az ottani jelentésének itt tizedrészét jelenti; így következik az *ezres* érték után *százas*, melly amannak tizedrésze; a' *százas* után *tizes*, melly amannak tizedrésze; a' *tizes* után *egyes*, melly amannak tizedrésze. Itt már tovább is ugyanezen rend szerint folytathatjuk, t. i. az *egyes* után jobbra következő helyen, jelent akármelly jegy tízszer kevesebbet, mint az egyes helyen, vagyis az *egyesnek tizedrészét;* a' következő helyen ismét tízszer kevesebbet, és így tizedrésznek tizedrészét, vagyis az egyesnek *század*-részét; a' következőn ismét tízszer kevesebbet, és így a' századrésznek tizedrészét, vagyis az egyesnek *ezred*-részét, 's így tovább. Az egyesen túl jobbra tehát valóságos törtszámok vannak; mellyeket hogy az egészektől elkülönítsünk: az egyes mellé vonást szoktunk tenni; 's az illyen számot, mellyben egész is van, tört is, nevezzük *tizedes-számnak*, p. o. **35,2345**. — Ha pedig egész szám nincs: az egyes helyre *0*-t teszünk, így: **0,234** = semmi egész, **2** tized-, **3** század-, 4 ezredrész. Még pedig ezen törtszámok, a' tizedes rendszer' törvénye szerint, természetesen mindig így mennek: az egyes utáni első jegy jelent *tized-*, a' **2**-dik *század-*, a' **3**-dik *ezred-*, a' 4-dik *tízezred* — 'sat. részeket; — épen úgy mint az egyestől balra *tízesek*, *százasok*, *ezresek* 'sat. következnek. — Innen ezen törtszámok alá nevezőt írni nem szükség; mert maga a' helyök megmutatja, — valamint az épszámoknál, — mellyiknek mi jelentése legyen, és mellyiknek mi nevező kellene; t. i. az egyes utáni első helyen levőnek jelentése *tizedrész*, és így nevezője volna **10**, vagy az 1-en kívül egy *0;* a' másodiknak jelentése *századrész*, és így ne-

vezője volna 100, vagyis az 1-en kívül két 0. — Innen a' hányadik hellyen áll a' törtjegy: annyi 0 volna a' nevezőjében; vagy a' hány tört jegy van a' számlálóban: annyi 0 van a' nevezőben. — Azonban mivel ezek valóságos törtszámok; 's műtételeik a' közönséges törtszámok' műtételi szabályain alapulnak: innen ezeknek nevezőit mindig alattok értjük; 's ha szükség, ki is irjuk.

58. §.

A' tizedes törtszámot kimondani kétképen lehet: vagy úgy, hogy elkülönitjük azon részeket, mellyekből áll, p. 7,473 = 7 egész, 4 tized, 7 század-, 3 ezred-rész. Vagy pedig, mivel ezek közt épen azon fokozat uralkodik, melly az épszámok közt, — valamint ott, úgy itt is, a' felsőbbeket a' legalsó' nevezete alá vehetjük. p. 243,579 = 243 *egy*, 579 *ezredrész*. Ugyanis $\frac{579}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{9}{1000}$; és $\frac{500}{1000} = \frac{5}{10}$, $\frac{70}{1000} = \frac{7}{100}$.

59. §.

Az előadattakból önként folynak e' közetkezők:

1) A' tizedes tört' jobbjára akárhány 0-t tegyünk: annak értekét nem változtatja. p. o. 2,34 = 2,34000 = 2 egész, 3 tized-, 4 század-, semmi ezred-, semmi tizezred, semmi százezred-rész.

2) Ellenben minden balfelöl tett 0, tízszer lejebb szállitja minden törtjegy' értekét. p. o. 2,34 = 2 egész, 3 tized- és 4 századrész; de 2,034 = 2 egész, 0 tized-, 3 század-, 4 ezred-rész; — és 2,0034 = 2 egész, 0 tized-, 0 század-, 3 ezred-, 4 tizezredrész.

3) Az épszámoknál, épen ellenkezőleg, a' jobbra tett 0-ok tízszer fölebb emelik minden jegy' értekét; ellenben a' balról tett akárhány 0-ok a' szám' értekét nem változtatják. p. o. 254 = 00254.

4) Ha az épszám' egyese mellé vonást tévén, utána egy vagy több 0-t teszünk: ez által sem változik annak értéke, — azonban úgy tekinthetjük azt, mint lárvás törtszámot. p. o. 23,00 = 23 *egy*, vagy 2300 *század-rész*. — És ez különös figyelmet érdemel az elosztásnál, — holott, mint tudjuk, a' hányados mindig ollyan rangú, a' millyen az osztandó. — Igy ha az osztót az osztandó' egyesében nem találnám meg egyes hányados-szor: utána tévén egy tizedrészes 0-t, keresem benne, mint tizedrészben, — midőn a' hányados lesz tizedrész; — ha így sem találom meg: teszek utána még egy századrészes 0-t, 's a' hányados lesz századrész, 'sat. — p. o. 2 : 225; 2 egyben 225-t nem találom, keresem 2,0 = 20 tizedrészben; abban sem találván: keresem 2,00 = 200 századrészben; — abban sem találván, keresem 2,000 = 2000 ezredrészben, 's meg találom 8 ezredrész-szer, 's így a' hányados = 0,008 = $\frac{8}{1000}$.

5) Ha tized-, század-, ezred-, v. akárhányadrész értékü helyen jelentő jegy nincs: azon helyre 0 tétessék, hogy a' következő jegyek' értéke szembe tünjék. p. o. ezt: $\frac{5}{100}$, így írom le: 0,05; ezt: $\frac{42}{10000}$ így: 0,0042.

6) A' különfajta tizedes törteket igen könnyü egyfajtákká, azaz egy nevezőjüekké tenni. Ugyanis egyfajták azok, mellyekben ugyanannyi törtjegy van, — mivel csak úgy lehet nevezőjök ugyanaz. Tehát a' mellyikben kevesebb törtjegy van: pótoljuk ki 0-okkal jobb felöl, annyira mint a' másik. p. o. 2,35 és 3,4235 különfajták, mert az első' nevezője 100, a' másiké 10000; — egyfajtákká lesznek, ha az első után két 0-t teszek = 2,3500, mert már ennek nevezője is 10000, a' nélkül hogy értéke változott volna.

7) Valamint a' tizedestört-, úgy az egész számok-

nál is, minden jegyeknek, és így az egész mennyiségnek értekét, tizszerte, százszorta, 'sat. lehet a' vonás' jobbfele tovább taszitása által növeszteni, — balfele tovább tétele által pedig kevesítni. p. o. 232, 345 = 232 egy, 3 tized-, 4 század-, 5 ezredrész; 2323, 45 = 2323 egy, 4 tized, 5 századrész; 23234,5 = 23234 egy, 5 tizedrész; — 232345 = 232345 egy; — és 23, 2345 = 23 egy, 2 tized-, 3 század-, 4 ezred-, 5 tízezredrész; — 2,32345 = 2 egy-, 3 tized-, 2 század-, 3 ezred 'sat. rész; — 0,232345 = 0 egy, 2 tized-, 3 század-, 2 ezred-, 3 tízezred 'sat. rész. Így 352 = 352 egy; 35,2 = 35 egy és 2 tizedrész; 3,52 = 3 egy, 5 tized-, 2 századrész; — 0,352 = 0 egy, 3 tized-, 5 század-, 2 ezredrész; — és 352 egyenlő lévén 352,000....-vel, ha a' vonást jobb felé taszitom, lesz: 3520,00... = 3520 egy; — 35200,00.. = 35200 egy.

8) Az elegyes törtszámot itt igen könnyü tisztává tenni, t. i. az egész össze iratik a' törtszámjegyekkel, — de a' nevező nem növekszik, *sőt illyenkor alá kell irni* p. o. 2,34 = $^{234}/_{100}$.

60. §.

Közönséges törtszámot vele egyenlő értekü tizedessé változtatni így lehet: Mivel a' törtszám nem egyéb mint osztás, mellyben a' számláló = osztandó, — a' nevező pedig = osztó: tehát osszuk el a' nevezővel a' számlálót, a' 59. §. 4ik sz. előadott módon; t. i. ha a' nevezőt a' számlálóban, mint egyesben, meg nem találjuk: tegyünk utána egy tizedrészes 0-t, 's a' hányados lesz *tizedrész;* — ha ismét ebben, vagy pedig a' maradék tizedrészben meg nem találjuk: tegyünk utána századrészes 0-t, 's a' hányados lesz *századrész*, 'sat. p. o. $^4/_5$-t tizedes törtszámmá változtatom így: 5 | 4,0 | 0,8;
40
--

— így $^3/_4$-t. 4 | 3,0 | 0,75; és így $^4/_5 = 0{,}8$; $^3/_4 = 0{,}75$.
28
20

Így megy a' műtétel akkor is, ha a' számláló nagyobb mint a' nevező. p. o. $^{23}/_{16}$
$= 16$ | 23,0 | 1,4375. innen $^{23}/_{16} = 1$, 4375.
16
70
64
60
48
120
112
80
80
- -

Azonban meg kell jegyezni, hogy csak az ollyan közönséges törtszámot lehet teljesen kimerítő tizedes törté változtatni, mellynek nevezője vagy csupán a' 2nek, vagy csupán az 5nek sokszorosa, — vagy a' 2nek és 5-nek sokszorozmánya. p. o. $^{23}/_{16}$-t lehet, mert $16 = 2.2.2.2$; $^6/_{25}$-t lehet, mert $25 = 5.5$; $^8/_{50}$-t lehet, mert $50 = 2.5.5$. — De már $^{13}/_{15}$-t nem lehet, — mert $15 = 3.5$. — Ugyanis mikor közönséges törtszámot tizedessé változtatunk: a' nevezővel mindenkor nehányszor tízet, vagy százat, vagy ezret 'sat. kell elosztani; a' tíz, száz, ezer 'sat. pedig, ha első osztóikra kifejtetnek, semmi más-, mint 2 és 5 első osztókból állanak; — és így semmi más által nem oszthatók maradék nélkül, csupán a' 2 és 5, vagy ezeknek sokszorozmányai által.

A' melly közönséges törtszám' nevezőjében tehát a' 2-n és 5-n kívül más első osztó van: azt midőn tizedes törté akarjuk tenni, folytathatjuk osztás által a' tört jegyek' kifejtését, a' meddig akarjuk; de soha vé-

get nem érünk, — 's valahol megállapodván, utána pontokat teszünk, — v. az utolsó törtjegyet eggyel nagyobbítjuk, főként ha az az után következő jegy 5nél nagyobb: mivel minden következő jegy a' megelőzőnek tizedrésze levén, ha 5-nél nagyobb, úgy a' megelőző osztálybeli egynek felinél nagyobb. p. o. 0,2579....., meg állhatok három jegynél így 0,258. — És az illynemü tizedes tört jegyek mindenkor, hol előbb hol utóbb, *periodicusokká* lesznek, az az ugyanazon jegyek, ugyanazon rendel újra meg újra előjőnek. p. $^2/_3 = 0{,}6666....$, $^4/_{11} = 0{,}363636.....$, $^5/_{37} = 0{,}135135.....$, $^5/_7 = 0{,}714285714285.....$ Még pedig az illyenek, melyekben legelöl kezdve jőnek újra elő ugyanazon jegyek, neveztetnek *egyszerü periodicusoknak*. Az ollyanok pedig mellyekben néhány jegy után következnek ollyan jegyek, mellyek azután újra meg újra elő jönek, neveztetnek *elegyes periodicusoknak*. p. o.

$$^{379}/_{792} = 0{,}478535353.....$$

61. §.

Tizedes törtszámot vele egyenlő értekü közönséges törtszámmá változtatni így lehet:

1) ha a' tizedes tört bevégzett, p. o. 0,75: akkor csak az illető tizedes' nevezőjét, t. i. az 1-en kívül annyi 0-t, a' hány tört jegye van, alá kell irni, — mindjárt közönséges törtszámmá lesz, — mellyet aztán a' közös osztók' kihagyásával kisebb tagokra vonhatunk; így $0{,}75 = {}^{75}/_{100}$, v. kisebb tagokra vonva: $\frac{5 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 4} = {}^3/_4$; — így $0{,}7408 = {}^{7408}/_{10000} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 463}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 625} = {}^{463}/_{625}$; — így $3{,}47 = {}^{347}/_{100}$.

2) ha a' be nem végzett tizedes törtszám egyszerü periodicus: akkor a' helyette formálandó közönséges

törtszámnak számlálóját teszik az újra előjövő jegyek, — nevezőjét pedig annyi 9, a' hány jegy van a' számlálóban. p. $0{,}66\ldots = {}^{6}/_{9}$; $-0{,}676767\ldots = {}^{67}/_{99}$, $-0{,}617617\ldots = {}^{617}/_{999}$; $= 0{,}00030003\ldots = {}^{3}/_{9999}$, így: $73{,}217217\ldots = 73 + {}^{217}/_{999}$ vagy összevéve: $\frac{73 \times 999 + 217}{999} = \frac{73144}{999}$. — Ugyanis ha az illyen egyszerü periodicus törtszám' értekét kifejezzük x-el, p. o. $x = 0{,}676767\ldots$ innen $100x = 67{,}6767\ldots$,

ebből kivonatván $x = 0{,}676767\ldots$

lesz $99x = 67$

és $x = {}^{67}/_{99}$.

Így: $x = 0{,}617617617\ldots$

és $1000x = 617{,}617617\ldots$

kivévén $x = 0{,}617617\ldots$

lesz $999x = 617$

és $x = {}^{617}/_{999}$.

Így: $x = 0{,}714285714285\ldots$

és $1000000x = 714285{,}714285\ldots$

kivévén $x = 0{,}714285\ldots$

lesz $999999x = 714285$

és $x = {}^{714285}/_{999999}$, mellyet kisebb tagokra vehetünk: $\frac{714285}{999999} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 37} = {}^{5}/_{7}$

3) ha pedig a' be nem végzett tizedes törtszám elegyes periodicus: p. o. $0{,}4785353\ldots$: itt is a' törtszám' értekét x-el fejezvén ki, lesz $x = 0{,}46853$; ebből

$100000x = 47853{,}5353\ldots$

kivévén $100x = 478{,}3535\ldots$

lesz $99000x = 47375$

és $x = {}^{47375}/_{99000}$;

szóval, az egyenlő értekü közönséges törtszám' számlálója lesz azon különbség, melly származik, ha a' nem

periodicus jegyeket kivesszük a' nem periodicus jegyek mellé ragasztott egy falka periodicus jegyekből; — nevezője pedig lesz annyi 9-es jegy, a' hány periodicus, — és azok mellett annyi *0*, a' hány nem periodicus jegy van a' tizedes törtszámban; — 's az így megtalált közönséges törtszámot néha kisebb tagokra is levonhatjuk. p. o. az előbbi példát:

$$\frac{47375}{99000} = \frac{5.5.5.379}{5.5.5.792} = \frac{379}{792}$$

Példák: 0,2135353.... köz. törtté változtatni:

$$x = 0{,}2135353.....$$
$$100000\,x = 21353{,}5353.....$$
kivéven $1000\,x = 213{,}5353.....$
lesz $99000\,x = 21140$

$$\text{és} \quad x = \frac{21140 = 5.2.2.1057}{99000 = 5.2.2.4950} = \frac{1057}{4950}$$

más. $0{,}387777..... = \frac{387-38}{900} = \frac{349}{900}$

$$0{,}952312312.... = \frac{95231-95}{99900} = \frac{95136}{99900} = \frac{7928}{8325}$$

Tizedes törtszámok' algorithmusai.

62. §.

1) *Összeadás.*

A' tizedes számok' összeadása végett, leirjuk az összeadandókat egymás alá, olly móddal, hogy az egyrangú jegyek egymás alá-, t. i. valamint az egészeknél százas százas alá, tizes tizes alá, egyes egyes alá —: úgy a' törteknél is tizedrészes tizedrészes alá, századrészes századrészes alá 'sat. essenek; — 's a' mütétel épen úgy esik, mint az épszámoknál, elkezdvén a' leg-

alsó rangúakon, — 's tudván hogy minden ranguakból tíz, a' következő felsőbb rangon egyet, — és így a' tizedrészesekből tíz, az egyeseknél egyet tesz. — Azonban hogy a' mütétel rendesebb legyen: nem árt a' külön fajtákat egy fajtákká változtatni. p. o.

7,435 + 18,3 + 0,0032 + 6,49 + 17,8

egymás alá irva, 's egyfajtákká téve:

7, 4350
18, 3000
0, 0032
6, 4900
17, 8000

Összeg: 50, 0282

63. §.

2) *Kivonás.*

A' tizedes számok' kivonása is, az előbbi jegyzetek mellett, épen úgy megy, mint az épszámoké. p. o.

43,732 — 21,38574

mütétel:

43, 73200
21, 38574

különbség: 22, 34626

64. §.

3) *Sokszorozás:*

A' sokszorozás' szabályai ezek:

1) A' sokszorozók sokszoroztassanak egymással, mintha épszámok volnának, nem figyelmezvén a' törteket az épektől elválasztó vonásra; vagy is úgy tekintvén a' tizedes számot, mint lárvás törtet.

2) A' sokszorozmányban annyi jegyek választassanak el, jobbról kezdve, törtek gyanánt, a' hány tört jegy van a' két sokszorozóban mindössze. p. o.

$$28{,}432 \times 3{,}74$$

mütétel

28,432
3,74
113728
199024
85296
106,33568

Ugyanis a' törtszámok' sokszorozásában, számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel kell sokszorozni, — 's a' nevezők' sokszorozmányával a' számlálókét elosztani. Itt csak a' számlálókat sokszorozzuk; a' nevezők' sokszorozását pedig alatta értjük, — 's azoknak sokszorozmányával a' számlálókét elosztani el nem mulaszthatjuk. — A' nevezők' sokszorozása itt annyiból áll, hogy a' hány 0 van a' kettőben, annyit irunk össze a' sokszorozmányban. — Azonban mindenik sokszorozó' nevezőjében annyi 0 van, a' hány törtjegy van számlálójában; — és így a' hány törtjegy van a' két sokszorozóban, annyi 0-ból álló nevezővel kell azt elosztani; vagy is mivel a' hány 0 van a' nevezőben, annyi törtjegynek kell lenni a' számlálóban, tehát a' sokszorozmányból annyi jegyet kell elválasztani, jobbról, törtek gyanánt. p. o. $28{,}432 \times 3{,}74 = \frac{28432}{1000} \times \frac{374}{100} = \frac{10633568}{100000}$ $= 106{,}33568$.

3) Ha a' sokszorozmányban nincs annyi jegy, a' hány tört jegye van a' két sokszorozónak: balról tett zerusokkal pótoltassék ki. p. o. $0{,}002 \times 0{,}0007 = \frac{2 \times 7}{1000 \times 10000} = \frac{14}{10000000} = 0{,}0000014$.

Látni való hogy itt a' sokszorozmány 14 tíz-milliód-rész, — azt pedig úgy jelenthetjük ki, ha azon helyekre, mellyeken jelentő jegyek nincsenek, zerusokat rakunk.

Példák:

2,32 × 3,234. *mütétel:* 3234
232
6468
9702
6468
sokszorozmány: 7,50288

0,23 × 0,05. *mütétel:* 23
5
115
sokszorozmány: 0,115

3 × 2,3. *mütétel:* 23
3
69
sokszorozmány: 6,9

4,32 × 3 = 432
3
12,96

3,0002 × 0,00007 = 30002
7
210014
sokszorozmány: 0,000210014

0,00003 × 2,005 = 2005
3
6015
sokszorozmány: 0,00006015

0,000005 × 0,0000008 = 8
5
40
sokszorozmány: 0,0000000000040

4) Ha két ollyan tizedes számot kellene egymással sokszorozni, mellyeknek sok törtjegyeik vannak; és nincs szükség teljesen kimerítő, — csak közelítő sokszorozmányra: rövidíthetjük a' mütételt következő módon. Tegyük fel p. o. hogy ezen két sokszorozónak: 7,486258, és 3,392456 sokszorozmánya közelítőleg, legalább csak az egynek tizedrészéig kivántatnék. Ezt cselekedjük:

		7,486258
		2,392546
7,486	× 2 =	14,972
7,48	× 0,3 =	2,244
7,4	× 0,09 =	0,666
7	× 0,002 =	0,014
		17,896

lesz a' közelítő sokszorozmány: 17,8.....,

65. §.

4) *Elosztás.*

Láttuk a' közönséges törtszámok' elosztásánál, hogy helyesen történik az osztás úgy is, ha számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel osztunk el. A' tizedes törtszámoknál épen ezt cselekesszük; azon megjegyzéssel, hogy itt sajátlag csak számlálót osztunk számlálóval, — a' nevezők' elosztását pedig alatta értjük, és azok' hányadosára számot tartunk; innen a' hány zerus lenne a' nevezők' hányadosában, annyi törtjegy lesz a' számlálók' hányadosában is. Azonban a' nevezők' elosztása úgy esik, hogy a' hány zerus van az osztójában, annyit az osztandójából letörlünk; — 's a' hány zerus még ekkor marad az osztandójában, — vagyis a' hány zerussal több van az osztandó' nevezőjében, mint az osztójában, — annyi zerus lesz a' hányados' ne-

vezőjében; — és így a' hányados' számlálójából annyi jegyet kell, jobbról, törtjegyek gyanánt, elkülönítni. Mivel pedig mind az osztó', mind az osztandó' nevezőjében annyi zerus van, a' hány törtjegy van számlálójokban: innen a' hányadosban annyi törtjegy lesz jobbról elkülönitendő, a' hánnyal több törtjegye van az osztandónak, mint az osztónak. p. o.

$$2{,}76 : 1{,}2 = \tfrac{276}{100} : \tfrac{12}{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} 276 : 12 = 23 \\ 100 : 10 = 10 \end{array}\right\} \textit{hányados: } {}^{23}/_{10} = 2{,}3.$$

Innen ha az osztandóban és osztóban egyenlő számu törtjegyek vannak: akkor a' hányadosban törtjegy nincs.

$$\text{p. o. } 4{,}68 : 0{,}26 = \tfrac{462}{100} : \tfrac{26}{100}$$

$$\left.\begin{array}{l} 468 : 26 = 18 \\ 100 : 100 = 1 \end{array}\right\} \textit{hányados: } {}^{18}/_{1} = 18.$$

Innen minden előfordulható esetekre alkalmazandó szabály ez: az osztó' és osztandó' törtjegyeit egyenlő számra kell kipótolni, — 's úgy osztani mint az épszámokat szoktuk; — a' melly hányados ebből kijő, az egész szám lesz. — Ha pedig az osztás' végén oszthatlan maradék marad fenn: azzal úgy bánjunk, mint a' rendes osztásnál, t. i. tizedrészes zerust tegyünk utána, 's ebből a' hányados lesz tizedrész, 'sat.

$$\text{p. o. } 11{,}2 : 0{,}32 = 11{,}20 : 0{,}32$$

$$\begin{array}{l} 32 \mid 1120 \mid . = 35 \\ \quad\;\; 96 \\ \quad\;\; \overline{160} \\ \quad\;\; 160 \\ \quad\;\; \overline{---} \end{array}$$

$$\textit{más példa: } 7482{,}4 : 3{,}436 = \frac{7482400}{3436} = 2177{,}64$$

3436 | 7482400 | 2177,64....
6872
6104
3436
26680
24052
26280
24052
22280
20616
16640
13744
---

más példa: ha egészet kell osztani tizedes számmal: tegyünk az egész mellé is annyi tört zerusokat, a' hány törtjegy van az osztóban. p. o.

35 : 2,34 = 35,00 : 2,34 = 14,95

234 | 3500 | 14,95....
234
1160
936
2240
2106
1340
1170
170....

más példa: 3 : 0,00027 = 11111,11

27 | 3,0000 | 11111,11....
27
30
27
30 30
27 27
30 30
27 27
3 3....

más példa: $0{,}0003 : 27 = \frac{3}{10000} : \frac{270000}{10000}$

mütétel:

270000 | 3 | 0,0000111....
3,0
3,00
3,000
3,0000
3,00000
270000
300000
270000
300000....

más példa: 2,003 : 25

25,000 | 2,003 | 0,08012
20030
200300
200000
30000
25000
50000
50000

Jegyz. Ha ugyanazon számvetési feladatban, közönséges és tizedes törtszámok vegyítve jönek elő: vagy a' közönségest kell tizedessé változtatni, föként ha kimeritő tizedes lesz belőle; — vagy a' tizedest közönségessé, 's úgy vinni véghez a' mütételt; végre az eredményt tizedessé lehet tenni.

p. o. $^7/_8 \times 5{,}438 = {}^7/_8 \times \frac{5438}{1000} = \frac{19033}{4000}$
$= 4{,}75825$

vagy $^7/_8 \times 5438 = 0{,}875 \times 5{,}438 = 4{,}75825.$

ÖTÖDIK CZIKKELY.

Összetes számok' számolásáról.

66. §.

Összetes, vagy *tárgyas*, vagy *megnevezett* számok azok, mellyek valamelly bizonyos és megnevezett tárgynak mennyiségét jelentik. p. o. 25 forint, 8 öl, 9 hónap 'sat. Az illynemü számok' számolása csak azon szabályok szerint történik, mellyeket az elvont számokról tanulánk; — sőt sajátlag a' számok mindenkor elvontak, — 's csak azon egység összetes, vagyis bizonyos nemü tárgy, mellyhez a' számok viszonyíttatnak. p. o. 25 forint = 1 forint 25-ször.

Az úgynevezett összetes számoknak alapúl szolgáló némelly egységek, felszoktak osztatni több kevesebb egyenlő részekre, — és ezen részek ismét apróbb egyenlő részekre, mellyeket tehát törtszámokkal lehet kifejezni; — és az illyenekkeli mütételt sajátlag a' törtszámok' szabályai szerint kellene véghez vinni. Illyen egységek főként a' *mértékek*' és *pénzek*, mellyekkel a' közéletben legtöbb számitás történik. — Azonban minthogy ezek körül az egységek' részeinek, és a' részek' részeinek, vagyis a' nemeknek és fajoknak saját nevei vannak, mellyek mintegy törtszámi nevező gyanánt szolgálnak: rendesen az ezek körülti számitásban, a' fajokat, vagy osztályokat és alosztályokat, nem szokták törtszám-alakban fejezni ki, csak nevök' első betüjével jegyzik meg; valamint a' körültöki mütételben is a' törtszámok' szabályait mellőzik. De azon mütételekre nézve, szükség hogy az ember a' felsőbb nemüeket alsóbb nemüekre *szétbontani*, és viszont az alsóbb nemüeket felsőbbekre *összevonni* tudja. — Erre nézve tudni

kell, hogy az alsóbb nemüből hány egy tesz a' felsőbb nemüben egyet; 's ha ezt tudjuk, akkor a' felsőbb nemüt alsóbbra *szétbontjuk* sokszorozás által, olly móddal, hogy a' felsőbbet sokszorozzuk annyival, a' hány egy az alsóbból teszi a' felsőbbnek egységét. p. o. tudván hogy egy forintot tesz **60** krajczár: **23** forintot szétbontok krajczárokra úgy, ha **23**-t *sokszorozom* **60**-al, — **23** × **60** = **1380** krajczár. — Az *összevonás* pedig, — melly által azt keressük, hogy az alsóbb nemüek' bizonyos számából, a' felsőbb nemnek hány egysége telik, — elosztás által történik, olly móddal, hogy az alsóbb nemü mennyiséget elosztjuk annyival, a' hány abból tesz egyet a' felsőbb nemben. p. o. ha megakarom tudni, hogy **1380** kr. hány forint? kérdés **1380**-ban hányszor van meg **60**? — **1380** : **60** = **23** forint.

Erre nézve az illynemü egységek'-, jelesen a' mértékek' és pénzek' osztályait és alosztályait ismerni szükséges. — Azonban ezek körül, valamint az alapúl felvett egység' mekkorasága, úgy annak osztályozása, különböző országokban, tartományokban, sőt gyakran városokban is különböző. Leghelyesebb az új franczia mérték- és pénzrendszer, mind azért, mivel alapegység gyanánt olly mekkoraságot vesz fel, melly nem önkénytől függ, 's a' feledés' veszélyének nincs kitéve, t. i. a' *mètre*-t (melly a' föld' körnegyedének, vagyis a' gönczöl és egyenlitő közti távolságnak $^1/_{10000000}$ része); mind azért, mivel abban az osztályozások, mind fel- mind lefele a' tizedes rendszerre vannak alapitva; — 's igy az alsóbb 's felsőbb nemüek' összevonása 's szétbontása, 's általában velök minden mütétel, a' tizedes törtszámok' szabályai szerint, szerfelett könnyü. *)

*] Az emlitett új franczia mérték- 's pénzrendszert röviden megismerni nem lesz érdektelen. Minden mérteknek alapegysége a' *mètre* = $^1/_{10000000}$-odrész földkörnegyed, melly a'

nálunk divatozó bécsi lábhoz olly viszonyban van mint 1 : 3,164, — és így a' mi félölünknél valamivel több. Ez elosztatik tíz részre, 's egy illyen rész' neve *décimètre*; — ez ismét tíz részre, = *centimètre*; — ez ismét tíz részre = *millimètre*. — A' mètre-nél nagyobb hosszak' mérésére ezek a' mértékek: tíz mètre = *décamètre*; tíz *décamètre* = hectomètre; — tíz hectomètre = *kilomètre*; tíz kilomètre = *myriamètre*.

10000	myria	
1000	kilo	
100	hecto	
10	déca	
1		mètre.
0,1	déci	
0,01	centi	
0,001	milli	

A' *mètre* tehát hosszmérték. — A' □ *mètre* térmérték, t. i. ollyan négyszeg, mellynek minden oldala egyegy mètre. — A' *kocska-mètre* tömeg-mérték, — ollyan koczka, mellynek minden oldala egyegy mètre.

Az *are* földtérmérték = ollyan négyszeg, mellynek egy-egy oldala tíz mètre.

A' *litre*, üregmérték ollyan koczka, mellynek egyegy oldala egy *decimètre*.

A' *gramme* sullymérték, egyenlő egy *centimètre kocska* lecsepegtetett, (fagypontnyi hévmérsékletü) víz' sullyával.

A' *franc*, pénzmérték' egysége, — ollyan pénzdarab, mellynek sullya 5 gramme, 's $^{9}/_{10}$ része tiszta, $^{1}/_{10}$ része nem tiszta ércz. — Értéke a' mi pénzünk szerint = 23,11 ezüst krajczár

A' *franc* felosztatik 100 egyenlő részre, 's egy egy rész neveztetik *centime*-nek.

Látni való hogy ezen egész mérték- 's pénz-rendszernek alapja a' *mètre*; 's minden osztályozások a' tizedes rendszeren épülnek, — 's így, számitásuk könnyü. p. o. 6 décamètre, 8 mètre, 9 décimètre, 5 centimètre = 68,95; — 7 franc és 68 centime = 7,68; — 2 franc és 8 centime = 2,08. 'sat.

67. §.

Nálunk a' divatozó mértékek e' következők:

1) *Hosszmértékek:*

alap egység = *bécsi láb*; — jegye ez (′) p. 5′
egy öl = 6 láb; — öl jegye (°) p. 3°

egy láb = 12 hüvelyk. jegye (″)
— hüvelyk = 12 vonal. jegye (‴)
— vonal = 12 pont. jegye (⁗)
geographiai mértföld = 4000 öl.

2) *Térmértékek:*

négyszeg láb = olly □, mellynek minden oldala egy egy láb.
négyszeg öl = olly □, mellynek minden oldala egy egy öl.
négyszeg mföld = olly □, mellynek minden oldala egy mértföld.
egy hóld = 1100, 1200, 1300, többnyire 1600 □ ölnyi térföld.
egy □ ölben van 36 □ láb
— □ lábban — 144 □ hüvelyk.

3) *Tömegmértékek:*

koczka láb = ollyan koczka, mellynek minden oldala egy egy láb.
koczka öl = ollyan koczka, mellynek minden oldala egy öl.
koczka hüvelyk = ollyan koczka, mellynek minden oldala egy hüvelyk.
egy koczka ölben van 216 koczka láb.
— — lábban 1728 koczka hüvelyk.

4) *Üregmértékek:*

alap egység = itcze.
— meszely = fél itcze.
— pint = két itcze.
— kanta = tíz itcze.
— akó = 64 itcze.
öreg cseber = 100 itcze.

kis cseber = 50 itcze.
véka = 32 itcze.
posonyi mérő = 2 véka.
pesti mérő = 3 véka.
köböl = 4 véka.

5) *Sulymértékek:*

egy mása = 100 font. (libra)
— font = 32 lat. (semuncia)
— lat = 4 nehézék. (drachma)

gyógyszertáriak:

egy font = 12 uncia.
— uncia = 8 drachma.
— drachma = 3 scrupulus.
— scrupulus = 20 gran.

pénzmértékek:

1 Mark = 16 lat = 64 negyed = 256 pfenn. = 512 heller = 65536 richtpfenning, vagy irányló; és így 128 irányló = heller; — 2 heller = pfenning; — 4 pfenning = 1 negyed; — 4 negyed = 1 lat. — A' *bécsi mark* = 280,7293 gramme; — a' *kölni márk* pedig = 233,9414 gramme. — A' bécsi márkra esik 80 $^{2}/_{5}$, — a' kölnire 67 darab arany; — az arany pedig elosztatik 60 egyenlő részekre, mellyek *gran*-oknak neveztetnek.

ékszermértékek:

itt egység a' *karat* = 48 $^{1}/_{8}$ bécsi irányló, a' karat 4 granra osztatik.

6) *Idő-mértékek:*

egy század = 100 év.
— év = 365 $^{1}/_{4}$ nap, v. 12 hónap.

egy hónap = april. jun. sept. nov. = 30 nap; — a' többi 31 napos; — februar. rendesen 28, szökő évben 29 napos.
— nap = 24 óra.
— óra = 60 első percz.
— első percz = 60 másod percz.

7) *Pénz-értékek:*

Az egyezés szerinti (conventionalis), vagy pengő, — és bécsi érték szerinti, vagy papiros pénz, olylyan viszonyban vannak egymáshoz, mint 1 : 2,5, vagy 2 : 5, vagy 4 : 10, — azaz pengő pénzben, egy valamelly nevü mennyiség annyit ér, mint papiros pénzben ugyanazon nevüből 2,5; — vagy amabból 2 annyit ér, mint ebből 5, — vagy amabból 4 = ebből 10; — melly viszonyon alapúl azoknak egymásra általváltoztatása. — Mind a' kétfelé pénzben:

egy forint = 20 garas = 60 krajczár = = 100 kispénz vagy dénár.
— garas = 3 krajczár = 5 dénár.
— tallér = 30 garas; de illyen pénzdarab nálunk nincs.

Nagyobb ezüst pénzdar. 2 ftos, 1 ftos, ½ ftos pengőben, — és a' keresztesek: 2 ft. 12 kr., 1 ft. 6 kr., és 33 kr. pengőben.

Arany pénz-darabok:
körmöczi arany = 4 ft. 30 kr. pengő.
kettős arany = 9 ft. —
másfél arany = 6 ft. 48 kr.

68. §.

Némelly külországi mérték- 's pénz-nemek, a' mieinkkel összehasonlítva.

Hosszmértékek:

hely	mérték' neve	bécsi láb
Bécs . .	láb = 12 hüvelyk . .	1,000
Berlin . .	láb = 12 hüvelyk . .	0,980
Constantinápoly	pic	2,050
Köln	láb.	0,911
London . . .	láb	0,964
Páris	mètre	3,164
—	láb	1,028

Térmértékek:

		bécsi négyszegöl
Austria . . .	juchart	1600,0
Anglia . . .	rood acre . . .	281,3
Baden . . .	morgen	1000,8
Burkus . . .	régibb morgen .	1536,2
— . . .	újabb	709,7
Franczia . .	are	27,8
— . . .	hectare	2780,1
— . . .	arpent de Paris .	950,5

Hígmérők:

		bécsi pint
Austria . . .	pint = 2 itcze . .	1,00
— . . .	akó	40,00
Burkus . . .	akó	48,928
— . . .	nagy ohm . . .	112,73
Franczia . .	litre	0,71
— . . .	muid	0,66
Magyar . . .	itcze	0,59
— . . .	akó = 64 itcze . .	37,90
Muszka . . .	vedro	8,69
Török . . .	almud	3,70
Würtenberg .	maas	1,36

Gabona mérők:

hely	mértéknév	bécsi nyolczad
Austria . . .	achtel = 1/8 köböl	1,000
—	köböl	8,000
Magyar . . .	posonyi mérő	6,939
—	pesti mérő	10,408
Angol . . .	gallon	0,591
—	buschel = 8 gallon	4,729
Bajor	scheffel	28,928
Burkus . . .	új scheffel	7,150
Franczia . .	litre	0,130
Hamburg . .	scheffel	13,700
Orosz . . .	Tschetvert	27,287
Svéd	Tunna	19,085
Török . . .	Killot	4,313
Würtemberg .	Scheffel	38,056

Sulymértékek:

		bécsi font
Austria . . .	font = 32 lat	1,000
—	patikai font = 24 lat . . .	0,750
—	mark = 8 uncia	0,502
Anglia . . .	troy font	0,666
Baden . . .	font	0,893
Bajor	font = 32 lat	1,000
Burkus . . .	font = 32 lat	0,836
Franczia . .	kilogramme	1,786
Hamburg . .	2 mark = 16 uncia	0,864
Orosz . . .	font = 96 Zolotnik	0,730
Roma	font	0,605
Saxonia . . .	font = 32 lat	0,834
Török . . .	oka	0,570
—	újabb	2,292
Würtemberg .	font	0,835

Pénznemek:

hely	pénznemek	értéke pengő pénzb. Kr.	Kr.
America . .	dollár (számitási pénz) .	2	8,66
— . . .	ezüst dollár (vert pénz)	2	5,24
Amsterdam .	forint (szám. p.) . .		49,33
— . . .	forint (vert p.) . . .		48,78
— . . .	arany. v. p.	4	35,65
— . . .	12 stuver. v. p. . . .		30,71
Bécs . . .	császári arany. v. p. .	4	34,04
— . . .	magyar v. körmöczi arany	4	35,16
— . . .	két forintos tallér . . .	1	59,92
Berlin . . .	30 gar. = tallér. szám. p.	1	25,72
— . . .	species tallér. v. p. . .	1	59,30
— . . .	forint. v. p.	1	5,92
— . . .	Fridrik arany. v. p. . .	8	0,62
Constantinápoly.	piaster = 40 para. sz. p.		15,79
— . . .	sequin. ar. v. p. . . .	3	46,44
— . . .	piaster. v. p.		49,01
	1808-tól . .		22,48
Florenz . .	lira = 20 soldi. sz. p. .		19,66
— . . .	sequin. ar. v. p. . . .	4	37,57
— . . .	scudi = 7 lira. v. p. . .	2	17,58
— . . .	10 paoli	2	9,73
London . .	font sterling. sz. p. . .	8	57,16
— . . .	liversterling. sz. p. . .	9	31,82
— . . .	guinea. v. p.	10	11,63
— . . .	souverain. v. p. . . .	9	42,45
— . . .	crown = 5 schilling. v. p.	2	22,8
— . . .	schilling = 12 pence. v. p.		26,83
Milano . .	lira = 100 centesimi. sz. p.		20,000
— . . .	olasz lira. sz. p. . . .		23,11
— . . .	sequin. v. p.	4	38,20
— . . .	scudo. v. p.	2	0,15

hely	pénznemek	értéke pengő pénzb. kr.	kr.
Nápoly	ducati = 100 grani. sz. p.	1	38,16
—	carlino. v. p.	0	9,82
—	3 arany oncetta	5	0,15
Paris	franc = 100 centimes. sz. p.		23,11
—	40 francos arany. v. p.	15	24,25
—	5 franc ezüst. v. p.	1	55,53
—	Louisdor. v. p.	9	4,60
Pétervár	ezüst rubel. sz. p.	1	19,72
—	papiros rubel. sz. p.		26,11
—	arany. v. p.	4	34,11
—	— imperial = 10 rubel. vp.	20	10,31
—	platina pénz. 6 rubel	9	14,54
—	— rubel = 100 kopeka	1	43,72
—	— Alexander v.p.	1	42,40
—	5 kopeka v. p.		5,06
Szász	tallér = 24 gar. sz. p.	1	30,00
—	tallér. v. p.	2	0,04
—	arany. v. p.	4	34,04
—	16 garasos. vp.		56,19
Spanyol	pistole. vp.	8	13,55
—	piaster. vp.	2	5,47
	'sat. 'sat. 'sat.		

Láss többet *Nagy Károly'* Arithm. számirás kül. jegy. czimü munkájában.

69. §.

Említénk már, hogy az összetes számok' *szétbontása*, azaz felsőbb nemüeknek alsóbbakra változtatása, sokszorozás által történik, olly móddal, hogy a' felsőbb nemü mennyiséget annyival sokszorozzuk, a' hány egy az alsóban teszi a' felsőbbnek egységét. 'S ha több alárendelt nemüek vannak: vagy egyszerre visszük a' legfelsőt, 's így a' többit is, a' legalsóra; — vagy lépcsönként, előbb a' legközelebbi-, azután a' következő kisebbre.

Példák:

1) $7^{o}\,5'\,8''\,9'''$, azaz 7 öl, 5 láb, 8 hüvelyk, 9 vonal: *hány vonal?* — A' 7 ölet változtatom lábakká, sokszorozván 6-al, — $7.6=42$, — ehez adom az 5-t $=47$; — most a' 47 lábat változtatom hüvelykké, sokszorozván 12-vel, — $47.12=564$, ehez adom a' 8at $=572$; végre az 572 hüvelyket változtatom vonalokká, sokszorozván 12-vel, — $572.12=6864$; ehez adván 9-t $=6873$; — és így $7^{o}\,5'\,8''\,9'''=6873'''$. — Vagy pedig, egy ölben van $6.12.12=864$ vonal; — egy lábban 144, egy hüvelykben 12: tehát a' 7-et sokszorozom 864-el $=6048$, — az 5-t 144-el $=720$, a' 8-at 12-vel $=96$; ezen sokszorozmányokat össze-, — 's hozzájok még a' $9'''$-t adom $=6048+720+96+9=6873'''$.

2) $15\square^{o}\,31\square'\,128\square''$ hány $\square$ *hüvelyk.* A' 15 négyszeg-ölet sokszorozván 36-al: lesz 540 négyszeg láb, — ehez adván 31-t $=571$. — Továbbá az 571 $\square$ lábat sokszorozván 144-el, lesz $=82224$ $\square$ hüvelyk; mellyhez adván 128-t $=82352$; és így $15\square^{o}\,31\square'\,128\square''=82352\square''$.

3) $9\,{}^{1}/_{2}$ *akó hány meszely?* A' $9\,{}^{1}/_{2}$-t, vagy tizedes törtszámmal 9,5-t sokszorozom 64-el; $9{,}5\times64=608$ itcze; — ezt sokszorozom 2-vel $=1216$ meszely.

4) 6 font, 8 uncia, 5 drachma, 2 scrupulus, *hány gran, patikai mérték?*

$(6.12)+8=80$ uncia.
$(80.8)+5=645$ drachma.
$(645.3)+2=1937$ scrupulus.
$1937.20=38740$ gran.

5) 6 év 28 nap 19 óra, *hány óra?*

$(6.365\,{}^{1}/_{4})+28=2219\,{}^{1}/_{2}$ nap $=2219{,}5$
$(2219{,}5.24)+19=53287$ óra.

6) 15 óra, 25 első percz, 34 másod-percz, *hány másodpercz?*

(15 . 60) + 25 = 925 első percz
(925 . 60) + 34 = 55534 *másodpercz.*

7) 4 liversterling, 15 schilling, 8 pence, *hány pence?*

(4 . 20) + 15 = 95 schilling
(95 . 12) + 8 = 1148 pence.

8) 53 hectomètre, 8 décamètre, 6 mètre, 5 décimètre, 3 centimètre, *hány centimètre?* = 5386,53 centimètre; mert itt minden lefele következő, tízszer kisebb a' megelőzőnél.

70. §.

Az *összevonás*, vagyis az alsóbb nemüeknek felsőbb nemüekre visszavitele, elosztás által történik, olly móddal, hogy a' felsőbbet elosztjuk annyival, a' hány az alsóbból teszi a' felsőbbnek egységét. p. o. 38 *láb, hány öl?* = $^{38}/_{6}$ = 6 $^{2}/_{6}$ öl; — 143 *kr. hány forint?* = $^{143}/_{60}$ = 2 $^{23}/_{60}$ forint. — Mivel az illynemü számításoknál a' hányadosban többnyire törtszám is van; a' tizedes törtszámokkal bánni pedig könyebb mint a' közönségesekkel: tehát itt egyedül azok ajánlhatók. p. o. 343 *kr. hány forint?* = $^{343}/_{60}$ = 5,716.... = 5 for. 71 dénár; és a' dénárt krrá, vagyis a' tizedes törtet közönségessé, ha tetszik, változtathatjuk.

Példák:

1) 8° 5′ *hány öl?* 5 láb = $^{5}/_{6}$ öl, vagy tizedestörtszám-alakban = 0,83 .... öl; és így 8°, 5′ = 8,83 öl.

2) 12° 33′ *hány öl?* = 12 $^{33}/_{6}$ = 17,5 öl.

3) 8° 7′ 9″ *hány öl?* — 9 hüvelyk = $^{9}/_{12}$ = 0,75 láb; — továbbá 7′ 9″ = 7,75 láb; — és 7,75 láb =

$\frac{7,75}{6}$ öl, vagy = 1,291... öl; — ehez adván a' 8 ölet lesz = 9,291... *öl.*

4) 15° 5′ 9″ 8‴ *hány öl?*

$\frac{8}{12}$‴ = 0,666... hüvelyk; ehez adván 9″-t.

$\frac{9,666}{12}$... 0,805 láb; — ehez adván 5′-t.

$\frac{5,805}{6}$ = 0,9675 öl; ehez adván 15 *ölet*

lesz: 15° 5′ 9″ 8‴ = 15,9675 *öl.*

5) 27□° 13□′ 36□″ 72□‴ *hány* □°?

$^{72}/_{144}$ = 0,5 négyszeg hüvelyk; hozzá adván 36-t

$\frac{36,5}{144}$ = 0,2534... négyszeg láb; — hozzá adván 13-t

$\frac{13,2534...}{36}$ = 0,3666...; ehez adván 27 □ ölet, lesz a' keresett mennyiség = 27,3666.. □ öl.

6) *43 meszely bor hány akó?*

$^{43}/_{128}$ = 0,3359.... akó.

7) 63 font, 14 lat: *hány má'sa?*

14 lat = $^{14}/_{32}$ = 0,4375 font; ehez adván 63-t

$\frac{63,4375}{100}$ = 0,634375 má'sa.

8) 3 év, 274 nap, 15 óra, 3 óra negyed: *hány év?*

$^{3}/_{4}$ = 0,75 óra;

$\frac{15,75}{24}$ = 0,654..... nap; ehez adván 3 évet, lesz a' keresett szám = 3,654... év.

9) 18 óra *hányadrész év?*

$\frac{18}{24 . 365\,^{1}/_{4}} = \frac{18}{8766}$ = 0,00205.... év.

Jegyz. Nálunk az ezüst pénznek váltóra, és a' váltónak ezüstre változtatása érdekes levén: erre nézve ezt tartsuk meg. Mivel 4 ezüst forint (vagy garas, kr. 'sat.) tesz 10 váltó forintot (garast, krt 'sat.): tehát a' mint van 4 a' 10-hez: úgy van va-

lamelly ezüst pénzmennyiség, az ő váltóértekéhez. p. o. 12 ezüst forint hány váltó for.? 4 : 10 = 12 : x.; — két közbülsőt sokszorozzuk, az elsővel elosztjuk: 10 . 12 = 120, $^{120}/_{4}$ = 30 váltó forint. — Viszont 10 váltó forint = 4 ezüst for.; és így a' mint van 10 a' 4-hez: úgy van akármelly váltópénzmennyiség az ő ezüst értekéhez. p. o. 40 vfor. hány ezüst for? 10 : 4 = 40 : x; innen 40 . 4 = 160, $^{160}/_{10}$ = 16. — Ezek tehát az átváltoztatás' szabályai:

1) ezüst forintot, váltóvá változtatunk, ha azt sokszorozzuk 10-el, azaz egy 0-t teszünk utána, 's elosztjuk 4-el. A' maradék annyiszor 15 krt tesz, a' hány egy van benne; mivel ollyan törtszám, mellynek nevezője 4; és így egysége, a' forintnak 4-ed része = 15 kr. p. o. 33 *ezüst forint hány váltó forint?* = $^{330}/_{4}$ = 82 $^{2}/_{4}$ = 82 vfor. 30 kr. Ha pedig a' forint mellett krárok is vannak: vagy csináljuk ki külön a' forintok' változtatását, — külön ismét a' krárokét, hol a' maradék 4-edrész krárokat fog jelenteni; — vagy még helyesebben, változtassuk a' krárokat denárokká, azaz a' forintnak tizedes törtjeivé; 's így egyszeri mütétellel czélt érünk; a' maradék' osztását pedig folytassuk a' tizedesek' törvénye szerint; mit azon esetben is tehetünk, ha krárok nincsenek, hogy a' maradék dénárokra jöjjön ki. p. o. 79 ezüst for. hány váltó? = $^{790}/_{4}$ = 197,50 = 197 vfr 30 kr.

más példa: 37 for. 43 kr. e. p. *hány váltó forint?* 43 krt változtatom dénárrá így: mivel 6 kr. tesz 10 denárt, 6 : 10 = 43 : x; $^{430}/_{6}$ = 71 ... és így 43 kr. = 71 ... dénár. Most 37, 71 fort. változtatom váltóvá így: $\frac{37,71 \cdot 10}{4} = \frac{377,1}{4}$ = 94,27 ... = 94 vft. 27 denár. — És a' denárt ismét krárra tehetem így: 10 : 6 = 27 : x. $\frac{6 \cdot 27}{10}$ = $^{162}/_{10}$ = 16,2 = 16 $^{2}/_{10}$ kr. — És így 37 ez. ft. 43 kr. = 94 vfr. 16 $^{2}/_{10}$ kr.

más példa: 273 ez. fr. 17 kr. *hány váltó?* 273 for. 17 kr. = 273,2833 ... ezüst for.

$\frac{273,2833 .. \times 10}{4} = \frac{2732,833..}{4}$ = 683,208 váltó forint; vagy 683 fr. 12 $^{1}/_{10}$ kr. *váltóban.*

2) váltó forintot ezüstté változtatunk, ha azt sokszorozzuk 4-el, 's elosztjuk 10-el. A' maradék, (vagyis a' 10-általi osztáskor jobbról elszakasztandó egy jegy) annyiszor 6 krt jelent, a' hány egy van benne; mert azon törtszámnak nevezője 10, és így egysége = tizedrész forint = 6 kr. p. o. 73 *váltó-, hány ezüst forint?* $\frac{73 \cdot 4}{10}$ = $^{292}/_{10}$ = 29,2 = 29 forint 12 kr. ezüst.

Ha pedig a' forint mellett kr. is van: változtassuk tizedes törtszámmá, — sokszorozzuk 4-el, osszuk el tizzel; — az egészeken túl denárok lesznek.

példa: 123 *vfor.* 28 *kr., mennyi ezüstben?*

123 for. 28 kr. = 123,466...

123,466 . 4 = 493,864

$\frac{493,864}{10}$ = 49,3864 = 49 ft. 38 denár.

vagy 49 ft. 22 $^{8}/_{10}$ kr. ezüstben.

más példa: 2371 vfor. 27 kr. *mennyi ezüstben?*

2371 for. 27 kr. = 2371,45

$\frac{2371,45 . 4}{10}$ = 948,580 = 948 ft. 58 denár

vagy 948 for. 34 $^{8}/_{10}$ kr. ezüst.

Az összetes számok körülti Algorithmusok.

71. §.

1) *Összeadás.*

Az egynemüek irassanak egymás alá, p. o. ölek ölek alá, lábak lábak alá 'sat. Minden külön nemüek adassanak össze a' velek egynemüekkel; utoljára vonassanak össze, vagyis az alsóbbakból, a' hány felsőbb telik, adassék azokhoz. — Vagy kezdessék az összeadás a' legalsó nemüeken, — 's a' hány közelebbi felsőbb azon összegből telik, az mindjárt oda adassék 'sat.

p. o. 115 for. 43 kr.

+78 — 17 —

+93 — 58 —

+65 — 47 —

351 — 165 — = 351 for. + 2 for. 45 kr.

= 353 for. 45 kr.

más. 73 for. 54 kr.

+85 — 49

159 for. 43 kr.

más. 25má'sa 59 font 26 lat 3 nehézék

$+3 - 78 - 31 - 2 -$
$+32 - 93 - 25 - 1 -$
$+79 - 81 - 3 - 2\frac{1}{2} -$
$=139 - 311 - 85 - 8\frac{1}{2} -$

$=(139+3)$ má'sa $(11+2)$ font $(21+2)$ lat. $\frac{1}{2}$ neh.

$=142 - 13 - 23 - 0{,}5.$

§. 72.

2) *Kivonás:*

Az egynemüek irassanak egymás alá; — kezdődjék a' kivonás a' legalsó nemen; — 's ha a' kivonandó nagyobb mint a' kisebbítendő: a' közelebbi felsőbb nemből hozassék által *egy*, melly hányat tegyen itt, tudni kell.

p. o. 125má'sa 38 font 12 lat 2 nehéz.

kivonandó.	87 —	93 —	30 —	3 —
különbség.	37 —	44 —	13 —	3 —

Jegyz. Midőn az összetes számok' összeadása és kivonása az időkiszámításra alkalmaztatik: akkor a' hónapok szám szerint vétetnek, p. Januar. = 1. Febr. = 2, Mart. = 3 'sat. 's mindenikben 30 nap számláltatik; — az órák pedig éjféltől éjfélig 24-re számittatnak; — 's néha ezeknek perczei és másodperczei is számitásba jönek. p. o. Kr. születésétől 1801-diki Mart. 4-dikéig lefolyt 1800 év, 2 hónap, 3 nap. — 1809, Maj. 28 d. u. 1 oráig lefolyt = 1808 év, 4 hónap, 27 nap, 13 óra. — — Viszont Kr. sz. után 1405 év, 4 hónap, 3 nap, 2 óra, 10 percz, és 12 másod perczenyi eltelt idő a' kalendáriumban lesz: 1406 Maj. 4-dike reggeli 2 óra 10′ 12″.

Összeadási példa: született valaki 1820, Oct. 30-dikán reggeli 4 órakor; és élt 19 évet, 4 hónapot, 24 napot 10 órát: mikor halt meg?

1819 év	9 hónap	29 nap	4 óra	
19 —	4 —	24 —	10 —	
1839 —	2 —	23 —	14 —	

és így meghalt 1840 Mart. 24-dikén d. u. 2 órakor.

Kivonási példa: Valaki született 1763 Maj. 15, estv. 8 ó-

rakor; 's meghalt 1814 Aug. 2-dikán reggel 3 órakor: menynyi időt élt?

	1813 év	7 hónap	1 nap	3 óra
—	1762 —	4 —	14 —	20 —
különbs.	51 —	2 —	16 —	7 —

élt tehát 51 évet, 2 hónapot, 16 napot 7 órát. — *Láss több példákat* Taubner' *Mértanában.* §. 23.

73. §.

3) *Sokszorozás.*

A' sokszorozást 3 képen lehet tenni: 1) vagy külön sokszoroztatnak a' külön-nemüek, 's utól a' sokszorozmányok összevonatnak. p. o. (3 mása 75 font 13 nehéz) × 5.

= 15 — 375 — 65 — 15 —
= 18 — 77 — 4 — 3 —

2) vagy a' külön-nemüek a' legalsó nemre vitetnek, 's így történvén meg a' mütétel, a' sokszorozmányból a' külön nemek kifejtetnek.

p. o. (3 mása 75 font 13 lat 3 nehéz.) × 5,75 = 48055 nehézék × 5,75 = 240275 nehéz. = 60068 lat + 3 neh; = 1877 font + 4 lat + 3 neh. = 18 má'sa, 77 font + 4 lat. + 3 neh.

3) vagy a' külön-nemüek a' legfelsőbb nemre vitetnek, tizedes törtszám-alakban. p. o. (3 má'sa 75 font 13 lat 3 nehéz.) × 5,75. Itt 3 nehéz. = $^3/_4$ = 0,75 lat. — 13,75 lat. = $\frac{13,75}{32}$ = 0,4294 font; 75,4294 font = $\frac{75,4294}{100}$ = 0,754294 má'sa, végre

3,754294 má'sa × 5,75

	5,75
	18761470
	26280058
	18761470
	21,57709050

= 21 mása, 57 font, 22 lat, 2 $^7/_{10}$ neh.

Látnivaló hogy az összetes számok' sokszorozásában, az egyik sokszorozó mindig elvont szám, különben értelme nem volna. p. o. mi értelme volna ennek: *5 forintszor 3 font?* Hanem vagy ez a' kérdés: 3szor 5 forint hány forint? — vagy ez: 5-ször 3 font hány font? — A' fentebbi példában az volt a' kérdés, hogy 3 má'sa, 75 font 13 lat 3 nehézék, 5,75-ször véve, hány má'sa font 'sat. lesz? — Ha pedig ez volna a' feladat: valamelly dolognak má'sáját adják 5 for. 45 kron (= 5,75); kérdés: 3 má'sa, 75 font, 13 lat, 3 nehézékért (= 3, 754294 má'saért hány forint esik?, — akkor a' kérdés ide megy ki: 3,754294-szer 5,75 forint, hány forint? = 21,577.... forint = 21 forint 57 denár; — vagy is ennyi esik érte.

más példa: valamelly tőke behoz évenként 33 ft. 42 krt: mennyit fog be hozni 12 év, 2 hónap, 8 nap alatt?

33 for. 42 kr. = 33,7 forint
12 év, 2 hónap, 8 nap = $12\ ^{38}/_{365}$ = 12,12... év
33,7 × 12,12... = 408,444
behoz = 408 ftot 44 dénárt.

más példa: ha valamelly portékának fontja 1 for. 24 kr: mennyi lesz 15 font' 10 lat' ára?

1 for. 24 kr. = 1,4 forint
15 font 10 lat = $15\ ^{10}/_{32}$ = 15,312... font
15,312... × 1,4 = 21,4368 forint
esik érte 21 for. $43\ ^{6}/_{10}$ dénár = 26 kr.

más példa: valamelly posztónak röfe 12 for. 35 kr: 6 röf 3 fertályért mennyi esik?

12 ft. 35 kr. = 12,583 for.
6 röf 3 fert. = 6,75 röf.
12,583 × 6,75 = 84,93525.
esik érte 84 for. 93 denár = $55\ ^{8}/_{10}$ kr.

más példa: valamelly kútnak ölit készítik **21** for. **15** krárért: **5** öl **4** láb **9** czolért mennyi esik?

21 for. **15** kr. = **21,25** for.

5 öl **4** láb **9** czol = $5+{}^{4}/_{6}+{}^{9}/_{72}+5, \left.\begin{matrix}666\\125\end{matrix}\right\} = 5{,}791$

$21{,}25 \times 5{,}791 = 123{,}05875$

esik **123** for. **5** $^{8}/_{10}$ dénár = **3** $^{4}/_{10}$ kr.

más példa: valamelly portéka' latja **12** $^{1}/_{2}$ kr: mi lesz **3** font **17** $^{1}/_{2}$ lat' ára?

3 font **17** $^{1}/_{2}$ lat = **113,5** lat.

$12\,{}^{1}/_{2}$ kr. = 12,5 kr. = $\frac{12{,}5}{60}$ forint = 0,208...

$113{,}5 \times 12{,}5 = 1418{,}75$ kr. = 23,64... forint.

$113{,}5 \times 0{,}208 = 23{,}628...$ forint.

esik érte **23** ft. **38** kr.

74. §.

4) *Elosztás.*

Néha megeshetik az elosztás úgy is, hogy kezdvén a' legfelsőbb nemen, annak hányadosát felirjuk; a' maradékot pedig változtatjuk a' következő alsóbb nemüre, — azzal össze adjuk 's elosztjuk, — 'sat; — az utolsó maradék a' legalsó nemből lesz, mellynek az osztót alá irjuk.

p. o. **5** forintot **9** garast **2** krt elosztani **4** részre?

				hányados
4	5 for.	9 gar.	2 kr.	1 for. 7 gar. $1\,{}^{1}/_{4}$ kr.
	4 —	29 —	5 —	
	1	28	4	
		1	1	

Azonban, főként ha az osztó is összetes, és több osztályzatú szám: legjobb mind az osztót, mind az osztandót a' legfelsőbb nemre összevonni, tizedes törtszámalakban, — 's így vinni véghez az elosztást.

példa: $7\,^3/_4$ rőf posztóért fizettem **92** forintot **27** krt: mennyibe jön rőfe?

$7\,^3/_4 = 7{,}75$

92 for. **27** kr. $=$ **92,45** for.

92,45 : **7,75** $=$ **11,93** for.

esik rőfe **11** for. **55** krba.

más példa: valamelly általában eladott gyapju' ára **2873** p. for. **45** kr. és **15** arany; — azonban felméretvén lett **57** má'sa **43** font **29** lat: mennyibe esik má'sája?

2873 for. **45** kr. $=$ **2873,75**

15 arany $= 15 \times 4{,}5 =$ **67,5**

pénzösszeg: **2941,25**

57 má'sa **43** font **29** lat $= 57 + {}^{43}/_{100} + {}^{29}/_{3200}$

$= 57{,}43906\ldots$ má'sa

2941,25 : **57,43906** $=$ **51,207...**

esik má'sája **51** pfor. **20** denár $=$ **12** krba.

más példa: általában **125** for. **40** krért készült, **6** öles **5** lábas **8** hüvelykes kútnak mennyibe esik öle?

125 for. **40** kr. $=$ **125,666...**

6 öl **5** láb **8** hüv. $= 6 + {}^5/_6 + {}^8/_{72} = 6 + {}^{833}/_{1000} +$

$+ {}^{111}/_{1000} = 6{,}944$ öl.

125,666 : **6,944** $=$ **18,09**

esik öle **18** for. **9** denárba

A' tértanban majd bővebben megtanuljuk, — de itt is megérthetjük, hogy a' tér származik a' szél' és hossz' sokszorozásából; — és a' hoszmérők egymással sokszorozva tért adnak. p. o. ha valamelly szoba' padolatjának hossza **3** öl, széle **2** öl: tére lesz $=$ **6** $\square$ öl. — És így a' tér ollyan sokszorozmány, mellynek sokszorozói hosszmérők, — egyik a' hosszúság, másik a' szélesség; — 's ha a' tér egyikkel ezek közül elosztatik: hányados lesz a' másik.

példa: valamelly szoba' padolatjának tére **12**$\square^o$

19□′ 96□″, hossza a' szobának 3°, 4′, 7″: mi a' szoba' szélessége?

$$12\square^{0}\ 19\square'\ 96\square'' = 12 + {}^{19}/_{36} + \frac{96}{36.144} = 12,\ {}^{527}/_{1000} + {}^{18}/_{1000} = 12,\ {}^{527}/_{018} \Big\} \ 12{,}545\ \square\ \text{öl.}$$

$$3^{0}\ 4'\ 7'' = 3 + {}^{4}/_{6} + {}^{7}/_{72} = 3,\ {}^{666}/_{1000} + {}^{97}/_{1000} = 3,\ {}^{666}/_{097} \Big\} = 3{,}763\ \text{öl}$$

12,545 : 3,763 = 3,33...

a' szoba' szélessége 3,33 öl

= 3 öl 1,98 láb.

= 3 öl 1 láb 11,76 hüvelyk.

más példa: 14 és ½ hóld földnek, ha hossza 235½ öl: mi a' szélessége?

14½ = 14,5 hold × 1600 = 23200 □ öl

23200 : 235,5 = 98,51....

szélessége = 98,51 öl = 98 öl 3 láb 0,72 hüvelyk.

MÁSODIK SZAKASZ.

Egyetemes- vagy Betü-számvetés.

ELSŐ CZIKKELY.

Elő-ismeretek.

75. §.

Az elvont (ép-és tört-) 's az összetes számokkali négy fő mütételek, (algorithmusok), az egész számtan' alapjai gyanánt tekintendők; a' mennyiben nincs olly számitási mütétel, mellyben ezek nem alkalmaztatnának. De hogy ezen főmütételek a' különféle számtani feladatok' feloldására helyesen alkalmaztassanak: arra nézve bizonyos egyetemes, azaz minden egyes esetekre alkalmazható szabályok szükségesek. Ezen egyetemes szabályok' feltalálását tanítja a' *felsőbb számtan* (Algebra, Analysis), melly e' végre bizonyos egyetemes- vagy határozatlan jelentésü jegyeket, jelesen betüket használ; mellyekkeli bánásmódot tanitja a' *Betü-számtan*, vagy *Betü-számvetés.*

Akármelly nyelv' betüit, sőt átalában akárminő jegyeket vennénk fel e' végre, mindegy volna; mindazáltal közönségesen felvétetnek a' latin abécze' betüi; olly móddal, hogy a' nagy (kezdő) betük, valami kiterjedettebb példák' 's kifejezetek' képviselői; a' kis betük közül az elsők, a, b, c, d, 'sat. ismeretes, — a' hátulsók, x, y, z, v, ismeretlen mennyiségeket jelen-

tenek, — a' középsök pedig, mint valamelly szónak első betüi, bizonyos tárgynak képviselői szoktak lenni.

A' mütételi jegyek itt is épen azok, mellyek a' közszámvetésben, t. i. összeadásé (+), kivonásé (—), sokszorozásé (×), vagy egy pont (·), vagy legtöbbször semmi jegy, a' honnan a' jegy' elmaradása mindig sokszorozást jelent, p. o. $abc = a.b.c$, így $(a+b)(c+d) = (a+b).(c+d)$; — az elosztásé (:), p. $a : b = a$ elosztva b-vel, vagy $\frac{a}{b}$. És ezek nem kész eredvényt mutatnak, — hanem csak a' kivánt mütételre útalnak. p. o. $a+b$, vagy $a-b$, nem összegét vagy különbségét ezen két mennyiségnek: *a* és *b*, — hanem csupán azt jelenti, hogy *b*-t *a*-hoz kell adni, — vagy belőle kivonni, ha azoknak összegét, vagy különbségét megakarjuk találni. — Hasonlólag ha az ember ezen két kifejezményt: $a+b$, és $c+d$, egymással összeköti sokszorozás' jegyével: $(a+b).(c+d)$: ez nem maga a' kivánt sokszorozmány: hanem csak utasitás arra, hogy ezeket egymással sokszorozni kell; — és így

$$(a+b).(c+d) = ac + ad + bc + bd,$$

az az, ha *a*-t *c*-vel, *a*-t *d*-vel, *b*-t *c*-vel, *b*-t *d*-vel sokszorozzuk, 's ezen 4 eredvényt összeadjuk: akkor nyerjük a' kivánt sokszorozmányt. Így van a' dolog az elosztással is, p. o. $\frac{a}{b}$ azt jelenti, hogy *a*-t *b*-vel elkell osztani.

76. §.

A' közszámvetési kivonásnál csak ollyan eseteket látánk, mellyekben a' kisebbitendő nagyobb mint a' kivonandó. De hát ha a' kivonandó nagyobb mint a' kisebbitendő: mi különbség fog ott elő állni? Lássuk példában: 5 — 9, ötből vonassék ki kilencz; — a' 9-et osz-

szuk két részre $= 5 + 4$, 's egymás után vonjuk ki ezeket: $5 - 5 - 4$, $= 5$-t az 5-ből kivonván, marad $= 0$, — már a' 0-ból kell kivonni a' 4-et $= 0 - 4$; lesz tehát ezen kivonási példának: $5 - 9$ különbsége $= 0 - 4$. — Micsoda mennyiség ez? — Látnivaló hogy egy végre nem hajthatott kivonásnak mutatója; a' midőn a' 9-nek egyik részét 5-t, kivehettük a' kisebbitendőből, — de már a' másik részét nincs miből, — vagy is csak 0-ból lehet kivonni. Az illyen *0*-ból kivonandó mennyiséget, mellyet rendesen a' *0* elhagyásával, 's csak — jeggyel illetve szoktunk kifejezni, így: -4, -6 'sat. nevezzük *nemlegesnek* (quantitas negativa). — Erre nézve ezeket jegyezzük meg.

A' *0*-t a' mennyiségek' fogalmában úgy nézhetjük, mint a' természetben a' sulyegyent, vagy nyugalmat. Valamint a' természetben a' testek' súlyegyenét, 's nyugalmát szüli két egymás ellen ható testek' vagy erők' egyenlő hatása, péld. a' mérlegen a' két karokról függő egyenhatásu terhek' nyomásai: — úgy a' mennyiségi súlyegyent, vagy nyugpontot, vagy is a' *zerust*, úgy lehet nézni, mint két egymás ellen ható egyenlő mennyiségek' kölcsönös ellenhatásának eredvényét, melly szerint azok egymást mintegy elnyelik, megsemmítik. — Vannak tehát egymással *ellenkező mennyiségek*, mellyek egymásnak rontására hatnak; 's ha egyenlők: egymást egészen lerontják; — ha nem egyenlők: a' kisebbik a' nagyobbikból leront, a' mennyit leronthat, — a' különbség fenn marad. Illyenek az adósság és birtok; — magasság és mélység; — nyereség- veszteség; — ellenkező irányra-, p. o. északra és délre, jobbra és balra haladás 'sat. És ezen ellenkező mennyiségek között mintegy nyugpont a' *0*, mellytől indulnak ki, egyik egy-, másik más- t. i. ellenkező irányra, 's mellyre esnek vissza, ha egyenlők lévén, egymást megsemmítik.

p. o. van valakinek 5 for. készpénze, és 5 forint adóssága: tehát mije van? — *semmije;* — nyerek 100 for. de ugyanakkor vesztek 100 forintot: mim van? *semmim.* — Azonban a' 0-hoz, mint nyugponthoz, vagy számitási alapponthoz, bizonyos tárgylagos fogalom köttetik, — mellytől függ az ellenkező mennyiségek' *minősége;* olly móddal, hogy az ellenkezők közül azok, mellyek az említett fogalomnak javára, növesztésére szolgálnak, neveztetének *igenlegeseknek* (positiva), — és mivel ezek valósággal növesztők, a' hozzáadás' jegyével (+) jegyeztetnek; — ellenben a' mellyek azon fogalomnak kárára, fogyasztására hatnak, azok neveztetnek *nemlegesek*-nek (negativa); és mivel valósággal fogyasztók, a' kivonás' jegyével (—) jegyeztetnek. P. o. van 5 forint kész pénzem, és 5 forint adósságom: helyesen vagy ezt kérdhetem: *mennyi birtokom van?* 's ezt felelem: *semmi birtokom*, — és ezen esetben az 5 for. készpénz *igenleges* = + 5, — az 5 ft. adósság pedig *nemleges* = — 5; — vagy ezt: *mennyi adósságom van?* 's ezt felelem: *semmi adósságom*, 's ehez képest az 5 forint adósság igenleges = + 5, — az 5 forint készpénz pedig nemleges = — 5. — Így ha valakinek vannak több rendbeli birtokai, 's adósságai, — és megakarja tudni: *mennyi birtoka van?* most az alapfogalom *birtok* levén, minden birtokok, mivel az alapfogalmat növesztik, igenlegesek; — az adósságok pedig, mivel azt fogyasztják, nemlegesek. Ellenben, ha azt akarja megtudni: *mennyi adóssága van?* most az alapfogalom *adósság*, és így a' birtokok, mivel ezt fogyasztják, nemlegesek, — az adósságok ellenben, mivel ezt szaporítják, igenlegesek. — Innen valamelly mennyiség, magában tekintve, sem igenleges, sem nemleges, — de az alap-fogalomhoz képest lehet akár egyik, akár másik.

A' 0-tól tehát, mint nyugponttól kiindulva, egy-

felől állnak a' hozzáadandó, vagy igenleges, — más felől a' kivonandó, vagy nemleges mennyiségek; 's ezek mintegy két egymás ellenébe tett mennyiségi országokat képeznek:

$$5+4+3+2+1+0-1-2-3-4-5$$

és ezek midőn egyenlők, egymást megsemmítik, 's a' 0-ra esnek vissza, $+5-5=0$; ha pedig nem egyenlők: a' kisebbik a' nagyobbikból leront magával egyenlőt, — a' többi marad a' maga minőségében, vagyis a' maradék lesz a' nagyobbik' jegyével. p. o.

$$+18-15=+3, \text{ és } 12-17=-5.$$

A' + jegyet elől nem szokták ki tenni; és a' melly kezdő mennyiség előtt jegy nincs, az mindig igenleges: $18-15=3.=+18-15=+3.$

77. §.

Ha valamelly betü-, vagy sokszorozáskép' összekötött betük által jelelt mennyiség, több ízben maga magához adandó; vagyis többször vejendő, a' maga minőségében, akár igenleges, akár nemleges: kifejezhetjük ezt valamelly eleibe tett szám által, melly *együtthatónak* (coëfficiens) neveztetik. p. o. $a+a+a=3a$, így: $-a-a-a=-3a$; — így: $abc+abc+abc=3abc$; — így: $-abc-abc-abc=-3abc$; — együttható a' 3, melly azt mutatja hogy amott az *a*, itt az *abc* háromszor adatik maga magához, még pedig saját (+ vagy —) jegyével. — Az együtthatóvali kifejezés tehát munka-rövidítés; és ha azt elhagyjuk, — akkor azon egész mennyiséget, mellynek előtte áll, annyiszor kellene leirni saját jegyével, a' hány egy van az együtthatóban. p. o.

$5ab=ab+ab+ab+ab+ab$; — így: $-6ad=.$
$-ad-ad-ad-ad-ad-ad.$

Midőn pedig valamelly betü maga magával sokszoroztatik, vagyis hatványra emeltetik, a' helyett hogy a' betüt többször leirnánk sokszorozáskép', munka-rövidités' okáért, leirjuk csak egyszer, 's jobbról mellé teszünk felül egy kis számot, mellynek egységei azt mutassák, hányszor kellene azon betüt sokszorozás' jegyével le irni. p. o.

a^3, $b^5 = aaa$, bbbbb.

Ezen kis szám, mint az a-nál a' ^{3}, — a' b-nél az ^{5}, *hatványjegynek* (exponens potentiae) vagy *mutató*-nak neveztetik.

A' melly betüknek együtthatójok, vagy hatványjegyük nincs: azok mellé az 1 mindig oda értetik. p. o. $a = 1a^1$, $abc = 1a^1b^1c^1$, $a^2bc^3 = 1a^2b^1c^3$.

Meg kell jegyezni, hogy az *együttható* mindig azon egész mennyiségre vitetik, mellyet a' sokszorozás által összekötött betük kifejeznek. p. o. $5abc = 5(abc) = abc + abc + abc + abc + abc$; — de a' hatványjegy csupán azon egy betüre vitetik, melly mellett áll. p. o.

$abc^3 = ab \cdot c^3 = abccc$.

Azonban ha a' hatványjegynek több, sokszorozva összekötött betükre kell vitetnie: akkor azok kapcsok közé záratnak. p. $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = aaabbbccc = a^3 b^3 c^3$.

Ha több ollyan mennyiségekre, mellyek + vagy — jeggyel köttettek össze, ugyanazon együttható, vagy hatványjegy vitetik: akkor azok is kapcsok közé záratnak. p. o. $3(ab + bc - de) = 3ab + 3bc - 3de = ab + ab + ab + bc + bc + bc - de - de - de$. Így $(a+b)^2$, $(2a + 3b - 4c)^3$: de mi lesz ebből egészen kifejtve? később fogjuk megtanulni.

Nem szükség hogy az együttható, és a' hatványjegy mindenkor határozott számjegy legyen; lehetnek azok betük is, — és illyenkor a' hatványjegynek saját

együtthatója is lehet. p. o. ax, itt az x-nek együtthatója az *a*; így: (a+b)y, itt az y-nak együtthatója a+b, és így = ay+by. — Így a^n, a^{2n}, a^{2n+m}'sat.

78. §.

Összetett mennyiségek-nek neveztetnek azok, mellyek + vagy — jeggyel összeköttetvék. p. o. a+b — c összetett mennyiség. A' + vagy — jeggyel álló külön mennyiségek neveztetnek *tagok*-nak. Innen *kéttagú* mennyiség (binomium) az, mellyben két mennyiség van + v. — jeggyel összekötve p. o. a+b, *így* 3ab — 2bc; — *háromtagú* (trinomium) az, mellyben három van, p. o. a+b+c, *így* 2ab — 3cd+2b. Ha pedig 3 tagnál is több van összekötve: akkor a' mennyiség neveztetik *soktagú*-nak (polynomium). p. o. a+b—c+d—2e. — A' kapcsok közé zárt tagok úgy tekintetnek, mint egy tag, az egész fő mennyiséghez képest. p. o. (a+b) — (2cd +3ab), v. 3 (ab — 2d + 4c) + a (2c — 3d + 2f): mindeniket úgy tekintjük, mint kéttagút.

De ha a' mennyiség' külön részei, sokszorozás' — vagy elosztás' jegyével összeköttetvék: úgy a' mennyiség csak egyszerü. p. o. $\frac{abc}{de}$, ab : c egyszerü mennyiségek.

Midőn a' számitási mütételekben, betüket, határozott mennyiségek helyett használunk: akkor szembetünő, hogy valamelly tagban, az egymással sokszorozott betük által, bizonyos meghatározott mennyiség van kifejezve, — melly mindjárt változik, mihelyt vagy a' betük, vagy azoknak hatványjegyei változnak; — ellenben az együttható' változása által csak ugyanazon mennyiségnek többször vagy kevesebbszer vétele jelentetik. — Innen valamelly tagban a' betük által kifejezett mennyiség neveztetik alapmennyiségnek. p. o. legyen

a = 3, b = 4, c = 5; és így abc = 3.4.5 = 60. Már ha van 5abc, 2abc, 4abc: az alap mennyiség mind a' háromban ugyanaz = abc = 60, — de az elsőben vétetik az 5-ször, a' másodikban 2-szer, a' harmadikban 4-szer. Ellenben ab = 12, ac = 15, a^2bc = aabc = 180, — az ezek által kijelelt alapmennyiségek tehát különbözők. — Már az ollyan tagok, mellyekben az alapmennyiség, és így a' betük 's azoknak hatványjegyei ugyanazok, — ha bár azon mennyiség, különböző együtthatók által, többször vagy kevesebbszer, — és + vagy — jegyek által, hozzáadandólag, vagy kivonandólag vétessék is, — neveztetnek *egyfajtáknak* (termini homogenei); — a' mellyekben pedig vagy nem ugyanazon betük, vagy ugyanazon betüknek nem ugyanazon hatványjegyei vannak, — *különfajtáknak* (heterogenei) neveztetnek. p. o.

$a^2bc + 3a^2bc - 5a^2bc$ *egyfajták.*

$a^2b + 3ab + 2ab^2 + 3ad$ *különfajták.*

Jegyz. A' betüs tagok közé elegyitett számjegyes tagok egymással egyfajtáknak, — de a' betüs tagoktól külön fajtáknak tekintetnek. p. a + 3a + 5 + 4ab + 27 — 12ab, itt az *a* és *3a*, a' *4ab* és *12ab*, az 5 és 27 egymással egyfajta tagok.

79. §.

Az egyfajta tagok, könyebb belátás', és munkarövidités' okáért összevonandók, olly móddal, hogy ha ugyanazon jegyüek (+ vagy —): az együtthatóik adassanak össze; — ha ellenkező jegyüek: úgy a' kisebbik együttható a' nagyobbikból vonassék ki, 's a' maradék lesz a' nagyobbik' jegyével; — a' betük változtatlanul leiratnak, — mivel azok egy bizonyos mennyiséget fejeznek ki, mellynek többször-kevesebbszer vétele, — összeadása vagy kivonása, az együtthatók által eszközöltetik. Ugyanezen mütétel több tagokon is egymás

után véghez vihető. — Ha az egyfajta tagok' együtthatói egyenlők, jegyei pedig ellenkezők: azok egymást megsemmítik. — *Példák:*

1, $3a+2a=5a$

2, $-2a-4a=-6a$

3, $5a-2a=3a$

4, $5a-8a=-3a$

5, $-7a+8a=a$

6, $2a+5a-4a=3a$

7, $5a-9a+7a=3a$

8, $5a-4a+2a=3a$

9, $3a-3a=0$

10, $5a-9a+4a=0.$

11, $a+2b+4a-c+3x-4b+2c-5a-2x$
$=a+4a-5a+2b-4b-c+2c+3x-2x$
$=\quad 5a-5a\quad -2b\quad +c\quad +x$
$=\quad\quad\quad -2b\quad +c\quad +x$
$=c+x-2b.$

12, $5bx^2y+4cxy^2-6axy-7cxy^2-15bx^2y+8cxy^2$
$\quad +7axy$
$=-10bx^2y+5cxy^2+axy$
$=axy+5cxy^2-10bx^2y.$

MÁSODIK CZIKKELY.

Betü-számvetési algorithmusok.

80. §.

1) *Összeadás.*

A' betüs mennyiségek' összeadása abban áll, hogy az összeadandók' tagjai, saját (+ —) jegyeikkel egymás után leiratnak. Mi előtt megtörténnék az összeadás: az összeadandók külön külön kapcsok közé zá-

randók, — 's az összeadás' mütételi jegyével (+) kijelentendő, hogy ezeknek összeadása kivántatik, p. o. a + b-hez adandó c — d, ezt így irom le: (a + b) + (c — d). — Miután pedig ezek saját jegyeikkel egymásután iratnak, így: a + b + c — d, — akkor van az összeadás' mütétele végre hajtva. — Miért kelljen a' (—) jegyes tagot (—) jeggyel, azaz kivonandólag adni a' többihez: könnyü általlátni; t. i. a' (—) jegyes tag mindig azt mutatja, hogy a' megelőző tagot annyi hiján kell adni a' többiekhez, p. a + b-hez kell adni c — d-t, azaz nem az egész *c*-t, hanem *d* hiján; ha hát az egész *c*-t hozzájok adom, többet adtam *d*-vel, mint kellene, és így a + b + c kelletinél nagyobb *d*-vel, — ez tehát belőle kivonandó, 's lesz: a + b + c — d.

példa:

összeadandók: $(x + y - z) + (2c - 3d) + 2a$

összeadva: $x + y - z + 2c - 3d + 2a$

Ha az összeadandó tagok közt egyfajták vannak: azok a' 79. §. szerint összevonandók. p. o.

$$3ad - 2ac + 3d + 5ad - 5ac$$
$$= 8ad - 7ac + 3d$$

más: $2ab - 3c^2d + 4a^2b - 2c + 3c^2d$
$$- 3c - 7a^2b + 3b$$
$$= 2ab - 3a^2b - 5c + 3b$$

Midőn sok tagok vannak: könnyebb átlátás' és összevonhatás' okáért, az egyfajták egymás alá irandók. p. o.

$$-a + 3b - c - 115d + 6e - 5f$$
$$3a - 2b - 3c - d + 27e$$
$$5b - 8c + 3e - 7f$$
$$-7a - 6b + 17c + 9d - 5e + 11f$$
$$-3a - 5c - 2d + 6e - 9f + g$$
$$= -8a - 109d + 37e - 10f + g$$

Az illy módon véghez vitt összeadás neveztetik *algebrai összeadásnak.*

2) *Kivonás:*

81. §.

A' kisebbítendő', és kivonandó' tagjai külön kapcsok közé záratván, a' kivonás' jegyével (—) útaltatik arra, hogy kivonásnak kell történni. p. o. a + b-ből kivonandó c — d, — leirom így (a + b) — (c — d).

A' kivonás' mütételének egyszerü szabálya ez: a' kivonandó' minden tagjainak jegyei változtassanak ellenkezőkre; 's ekkor az algebrai összeadás' szabályai szerint adassanak össze a' kisebbítendővel. Hogy az itt származó eredvény helyes különbség: világos onnan, mert összeadatván a' kivonandóval, visszaadja a' kisebbítendőt. p. o.

kisebbitendő: a + b
kivonandó: + c − d
− +
különbség: a + b − c + d

és: (a + b − c + d) + (c − d) = a + b − c + d
+ c − d
= a + b.

más példa:

kisebbitendő: $2ab + 3bc - 2a + 4a^2$
kivonandó: $-3ab + 2bc - 2a + 3a^2 - 4d$
\+ − + − +
különbség. $5ab + bc \ldots + a^2 + 4d$

próba.

kivon. $-3ab + 2bc - 2a + 3a^2 - 4d$
különb. $5ab + bc \ldots + a^2 + 4d$
kisebb. $2ab + 3bc - 2a + 4a^2$.

Az illy módon véghezvitt kivonás neveztetik *algebrai kivonás*-nak; — mellyben tehát kisebb mennyiség-

ből is lehet kivonni nagyobbat, 's köztök az illető *algebrai különbséget* feltalálni. p. o.

kisebbit.	$+25$ vagy	-25
kivon.	± 37	± 37
különbs.	-12	-62

Hogy az algebrai kivonásban, miután itt ellenkező mennyiségek jönek figyelembe, szükségkép' a' jegyek' elváltoztatásának kell történni: könnyü átallátni, ha meggondoljuk, hogy valamelly mennyiséget kivonni annyit tesz, mint annak ellenkezőjét hozzáadni. p. o. 10 forint birtokból 4 for. birtokot kivonni, csak annyi, mint 4 forint adósságot hozzáadni, $+10-(+4)=+10-4$, a' különbség látnivaló $=+6$. — Így 10 for. adósságból 4 for. adósságot kivonni, annyi mint 4 for. birtokot hozzáadni, 's látnivaló hogy a' maradék, vagy különbség $=6$ forint adósság, $-10-(-4)=-10+4=-6$. — Így 10 for. birtokból 4 for. adósságot kivonni, annyi mint 4 for. birtokot hozzá adni, 's a' különbség $=14$ for. birtok, $+10-(-4)=+10+4=+14$. — Végre 10 for. adósságból 4 for. birtokot elvonni, annyi mint 4 for. adósságot hozzá adni, 's a' különbség $=14$ forint adósság, $-10-(+4)=-10-4=-14$.

Némi világositásul szolgálhatnak még e' következő jegyzetek.

1) Az algebrai kivonás' eredvényét úgy nézvén mint maradékot:

I,	$+10$	II, $+10$
	± 4	∓ 4
	$+6$	$+14$
III,	-10	IV, -10
	± 4	∓ 4
	-14	-6

az I-sö esetben $+10$-ből, vagy a' mi mindegy $+10+4-4$-ből elvétetik $+4$, és látnivaló hogy ott marad $+10-4=+6$. — A' II-dikban $+10$-ből, vagy $+10+4-4$-ből elvétetik -4, 's a' maradék $=+14$; — a' III-dikban

$-10+4-4$-ből elvétetik $+4$, 's a' maradék $=-14$; — a' IV-dikben $-10+4-4$-ből elvétetik -4, 's a' maradék $=-6$.

2) Az algebrai kivonás' eredvényét úgy nézvén mint különbséget: ez a' kérdés: *mi* kell a' kivonandóhoz, hogy az legyen belőle, a' mi a' kisebbitendő? Jól megjegyezzük, hogy itt nem az a' kérdés: mennyi kell a' kivonandóhoz, hogy a' kisebbitendővel egyenlővé legyen?, — mert ellenkező mennyiségek forognak fenn. — E' szerint az Iső példában az a' kérdés: mi kell $+4$hez hogy $+10$-zé legyen? fel: kell $+6$; — a' II-dikban kérdés: mi kell -4-hez hogy $+10$-zé legyen? felelet kell $+14$, t. i. először $+4$ a' végre, hogy a' -4-et lerontsa, másodszor $+10$; — a' III-dikban kérdés: mi kell $+4$hez, hogy -10zé legyen? fel. -14, mellyből -4 a' $+4^2$ lerontására való; — a' IVdikben kérdés: mi kell -4hez hogy -10-zé legyen? fel. kell -6. — Mintha mondanád p. a' III-dik esetben: mi különbség van A' és B' értéke közt, ha A-nak 10 for. adóssága, — B-nek 4 for. készpénze van? fel. 14 for. adósság; — vagyis mire van szüksége B-nek, hogy ollyan állapotban legyen, mint A? fel: arra hogy vegyen fel 14 for. adósságot, mellyből 4 for. a' készpénzét letörli, 10 pedig fenn marad adósságnak, mint A-nál 'sat. 'sat.

3) Mikor a' kivonandónak több tagjai vannak, 's $+$jegyü mellett van $-$ jegyü, p. $12-(8-3)$: akkor a' jegyek ellenkezőre változását így is magyarázhatni: 12-ből ki kell vonni 8-at 3 hiján; ha tehát 8-at kivonok, ott kisebb maradék lesz mint kellene, 3-mal, — és így 3-at a' maradékhoz kell adnom; vagyis a' 8-at —, a' 3-at $+$jeggyel kell a' 12-höz adnom, így: $12-8+3$.

4) Sőt ha a' kivonandó csak magánosan álló — jegyü tag is, p. o. -3, lehet azt úgy tekinteni mint $0-3=$ semmi, három hiján. E' szerint ha 12-ből ki kell vonni -3-t, ez azt teszi: 12-ből kikell vonni 0-t 3 hiján; — ha 0-t vennék ki, maradna 12; úgy de kelletinél többet vettem ki 3-al, és így a' 12 maradék kevés, hozzá kell hát adnom 3-t, 's lesz a' helyes maradék $=15$. — Így ha -12ből kell ki vonni $+3$-at $=(0-12)-(0+3)=-15$, mert ha 0-t vonnék ki, maradna 0,12 hiján; úgyde még 3-t azon felül ki kell vonnom, 's marad 0,15 hiján $=-15$. — Így ha -12-ből kell kivonni -3-t $=(0-12)-(0-3)$, ha 0-t vonok ki, marad 0, tizenkettő hiján $=0-12$, — úgyde kelletinél többet kivontam 3-al, mert 0-t 3 hiján kelle vala kivonnom, és így a' maradék, $0-12$, kicsiny, hozzá kell hát adnom 3-t, 's lesz $0-12+3=-12+3=-9$.

Midőn a' véghez vitt kivonási példában, a' kivonandó tagokat vissza akarjuk vinni eredeti állapotjokra: kapocs közé foglalván azokat, jegyeiket ellenkezőkre változtatjuk, 's a' kapocs eleibe teszünk — jegyet. p. o. $12-8+3=12-(8-3)$. Sőt akármelly — jegyen kezdődő, több tagú mennyiséggel így bánhatunk, — úgy tekintvén azt, mint 0-ból kivejendőt. p. o. $-5a+2b=0-5a+2b=-(5a-2b)$; így $-3a-2b=-(3a+2b)$; így $-7a-7b=-(7a+7b)=-7(a+b.)$

82. §.

Miként lehessen betüszámvetés' segitségével a' mennyiségek' egyetemes szabályait felfedezni: itt már némelly egyszerü példákban általláthatjuk.

Jelentsenek a és b két nem egyenlő számokat, mellyek közül az a nagyobb: illyen számitást tehetünk:

I,	$a+b$	II,	$a+b$
	$a-b$		$a-b$
összeg.	$2a$	*különbs.*	$2b.$
III,	$\frac{a+b}{2}$	IV,	$\frac{a+b}{2}$
	$\frac{a-b}{2}$		$\frac{a-b}{2}$
összeg.	$\frac{2a}{2}=a$	*különb.*	$\frac{2b}{2}=b$

Az I-ből kiviláglik, hogy ha két számok' összegéhez azoknak különbsége adatik: kijő a' nagyobbik szám' kettőzete; — a' II-dikból, hogy ha két számok' összegéből, azoknak különbsége kivonatik: kijő a' kisebbik szám' kettőzete; — a' III-dikból és IV-dikből, hogy ha félösszeghez félkülönbség adatik, kijő a' na-

gyobbik; és ha félösszegből félkülönbség kivonatik, kijő a' kisebbik. Legyen p. o. $a = 16$, $b = 10$, és így az összeg $= 26$, a' különbség $= 6$. lesz

az I szerint $26 + 6 = 32 = 2 . 16$
— II . . . $26 - 6 = 20 = 2 . 10$
— III . . $13 + 3 = 16$
— IV . . $13 - 3 = 10$

3) *Sokszorozás.*

83. §.

A' sokszorozásra a' szokott ($\times$ vagy .) jegyek, vagy azoknak elhagyása által útalunk, 's a' többtagú sokszorozót kapcsok közé zárjuk. p. o. $(a+b) \times c$, — $(a+b) . (c+d)$, $(a+b)c$, $(a+b)(c+d)$.

Ha ugyanazon, akár egy-, akár többtagú mennyiség önmagával sokszoroztik: azon munkát *emelésnek*, 's annak eredvényét *hatvány*-nak nevezzük; még pedig ha kétszer áll mint sokszorozó, akkori eredvénye *másodhatvány* vagy *négyleg*, — ha háromszor áll, akkor *harmadhatvány*, vagy *koczka*, — így tovább *negyed-*, *ötöd-* 'sat. *hatványok*. — Ezen emelésekre útalunk a' *hatvány-jeggyel* vagy *mutató*-val, melly jobbról a' betü-, vagy kapcsok közé zárt betük mellé tett számjegy, melly egységeivel azt mutatja, hányszor kell a' sokszorozót önmagával sokszorozni, — vagyis hányadik fokra vagy hatványra kell emelni, p. o. $a^3 = a \times a \times a$, $(a+b)^2 = (a+b) . (a . b)$; így $(ab + 2d - c)^2 = (ab + 2d - c) . (ab + 2d - c)$.

A' sokszorozás' mütételét illetőleg **3** tekintetben adatnak szabályok, u. m. *betükre*, *együtthatókra*, és *jegyekre* nézve.

1) *Betükre* nézve ez a' szabály: *a' sokszorozókban levő minden betük irassanak össze jegy nélkül, 's készen a' sokszorozmány.* p. $a \times b = ab$; $a \times b \times c = abc$; $ab \times cd = abcd$, $ab \times cd \times ef \times g = abcdefg$. — Ugyanis itt a'

sokszorozás annyi, mint jegynélküli összeirás, — a' sokszorozók nem olvadnak össze, mint a' számjegyeknél; — és midőn a' sokszorozók többbetüs tagok: úgy nézhetjük azokat, mint a' számjegyeseknél a' sokszorozókkal kifejezett sokszorozókat; 's valamint ott lehet a' sokszorozandót a' sokszorozónak sokszorozóival egymásután sokszorozni; p. o. $15 \times 12 = 15 \times 4 \times 3$: — úgy itt épen azt tesszük, 's mást nem is tehetünk, mivel a' sokszorozók nincsenek összeolvadva. p. o. $ab \times cd$, az *ab*-t sokszorozzuk előbb *c*-vel $= abc$, ezt ismét *d*-vel $= abcd$.

Ha ugyanazon betü mind a' két-, vagy több sokszorozóban találtatik: azt is annyiszor kellene egymásután leírni a' sokszorozmányban, a' hányszor meg van a' sokszorozókban. De hatványjeggyel vagy mutatóval rövidíthetjük a' dolgot, t. i. azon betüt csak egyszer irjuk le a' sokszorozmányban, de a' sokszorozókban lévő mutatóit összeszedjük, 's ezen összeg lesz azon betünek mutatója a' sokszorozmányban, p. o. $ab \times ac = abac = aabc = a^2bc$; így $a^2 \times ab = a^3b$; — $a^3c \times a^2bc^2 = a^5bc^3$, — mellyek így volnának teljesen: $aaac \times aabcc = aaaaabccc$. El ne felejtsük, hogy ha a' betünek mutatója nincs: oda értjük az 1-et; — azonban mutató lehet betü is, melly a' számjeggyel nem egyfajta lévén, csak kijelentve adathatik össze, az algebrai összeadás' szabályai szerint. p. o.

$a^n bc^2 \times ab^{n+1}c^{-1} = a^{n+1}b^{n+2}c$;

$a^{n-1}b^{2n}c^{-2} \times a^{n+1}bcd = a^{2n}b^{2n+1}c^{-1}d$.

$a^3b^{-1}c^{n+2} \times a^{-4}bc^{2-n} = a^{-1}b^0c^4$.

$a^{n-2}b^xc^{n-3}d^{n-1} \times a^{n-3}b^{2x}c^{n+3}d^{1-n} = a^{2n-5}b^{3x}c^{2n}d^0$.

Jegyz. Jegyezzük meg itt előlegesen, ámbár majd az elosztásnál fogjuk okát adni, hogy a' melly betünek mutatója 0, annak jelentése mindenkor $= 1$; és így az a' több betük közül, mint

sokszorozó, kimaradhat; de ha magánosan áll, el nem maradhat, hanem az 1-el felcserélhető. p. o.

$a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1$; $a^2b \times a^{-2}b = a^0b = b$.

2) A' sokszorozók' *számjegyes együtthatóit illetőleg: azok egymással összeolvasztólag sokszoroztassanak; 's azoknak sokszorozmánya lesz a' sokszorozmány' együtthatója.* Mert a' betüs mennyiségben, p. 2ab, mind a' 2, mind az *a*, mind a' *b*, megannyi külön sokszorozói levén azon mennyiségnek, mellyett a' 2ab jelent: ha ezen 2ab-vel egy másik mennyiséget, p. o. 3cd-t sokszorozni akarunk, szükség hogy annak mindenik sokszorozójával, t. i. a' 2-vel, a-val, b-vel külön sokszorozzuk a' 3cd-t; lenne tehát $3cd \times 2ab = 3cd\,2ab$; úgyde a' számjegyek' sokszorozmánya $= 3 \times 2$ összeolvad 6-tá, 's lesz $= 6cdab$, — v. a' betük rendbeszedve $= 6abcd$.

példák.

$25a \times {}^1/_3 b = {}^{25}/_3 ab = \frac{25ab}{3}$, t. i.

$^{25}/_3$ törtszámot ab-vel sokszorozni kellvén, a' számláló 25 sokszoroztatik *ab*-vel, a' nevező 3 pedig aláiratik.

$$^3/_4 x \cdot {}^{20}/_{21} y = \frac{3.20}{4.21} xy = {}^5/_7 xy = \frac{5xy}{7}$$

$$a \cdot 14b = 14ab$$

$$2a \cdot {}^3/_4 ab \cdot {}^2/_5 bc = \frac{2.3.2}{4.5} a^2b^2c = {}^3/_5 a^2b^2c.$$

3) A' *jegyek'* szabálya ez: *ugyanazon (akár + akár —) jegyü sokszorozók igenleges-, különböző jegyüek pedig nemleges sokszorozmányt adnak.* p. o. $+a \cdot +b = +ab$; $-a \cdot -b = +ab$; $+a \cdot -b = -ab$; $-a \cdot +b = -ab$.

Ugyanis a' szokszorozmányban annyiszor van meg az egyik sokszorozó, a' hány egy van a' másik sokszorozóban. Ugyde valósággal létező egyek csak az igen-

leges számban vannak; — a' nemlegesben pedig a' létezőknek ellenkezői, p. o. $+5 = 5$-ször 1, $+a = a$. szor 1; — de $-5 = 5$-ször -1, azaz a' létező 1-nek ellenkezője 5-ször véve; — $a = a$-szor -1. — E' szerint ha az egyik sokszorozó *igenleges:* az a' maga egységeivel azt mutatja, hányszor adassék önmagához a' másik sokszorozó. p. o. $+5 . +3 = +15$.

$+5 . -3 = -15$.

a' $+5$ azt mutatja hogy akár a' $+3$-at, akár a' -3-mat magát magához kell adni 5-ször; 's lesz az első esetben sokszorozmány $+15$; a' másodikban -15. — Ellenben ha az egyik sokszorozó *nemleges:* az a' maga egységeivel azt mutatja, hányszor adassék önmagához a' másik sokszorozónak *ellenkezője.* p. o.

$$-5 . +3 = -15$$
$$-5 . -3 = +15.$$

a' -5 azt mutatja hogy az első esetben a' $+3$-nak ellenkezőjét, — 3-t kell önmagához adni 5-ször, — 's lesz a' sokszorozmány $= -15$; — a' második esetben pedig, hogy a' -3-nak ellenkezőjét, $+3$-t kell önmagához 5-ször adni, — 's lesz a' sokszorozmány $= +15$.

Így is lehet világositni: $(a - b) . (c - d)$, annyit tesz mint: *a*-t *b* hiján sokszorozni kell *c*-vel *d* hiján. Ha *a*-t sokszorozom *c*-vel $= ac$ nagyobb kelletinél, mert nem az egész *a*-t kell vala sokszoroznom, hanem azt *b* hiján; és így kiveszem belőle a' *b*-nek *c*-veli sokszorozmányát, 's lesz eddig $= ac - bc$; úgyde ez is nagyobb kelletinél, mert nem az egész *c*-vel kell vala sokszorozni, hanem *d* hiján, — kiveszem hát belőle az a $-$ b-nek d-veli sokszorozmányát, — elsőben is *ad*-t, 's lesz $= ac - bc - ad$; úgyde így sokat vettem ki, — hozzá adom hát *bd*-t, 's lesz $= ac - bc - ad + bd$.

Ha vagy az egyik, vagy mind a' két sokszorozó többtagú mennyiség: akkor az egyiknek minden tagjait, a' másiknak minden tagjaival, különkülön sokszoroz-

ni kell, az előadott mód szerint; 's az így eredő sokszorozmány' egyfajta tagjait összeszedni. p. o.

$$\begin{array}{r} (4a^2+4ay^2+y^4) \\ \times(2a+y^2) \\ \hline 8a^3+8a^2y^2+2ay^4 \\ +4a^2y^2+4ay^4+y^6 \\ \hline 8a^3+12a^2y^2+6ay^4+y^6 \end{array}$$

A' következő példák, sokszorozási gyakorlaton kívül, előlegesen azt is mutatják, miként lehet ezen mütétel által a' számok' egyetemes szabályait felfedezni:

$$\begin{array}{r} \text{I, } (a+b) \\ \times(a+b) \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{II, } (a-b) \\ \times(a-b) \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{III, } [a+b] \\ \times[a-b] \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Az első példában kéttagú mennyiség, $a+b$, másod-hatványra emeltetett, és az $=$

$$a^2+2ab+b^2$$

t. i. áll 3 tagból, 1) az első gyökértag' négylegéből. — 2) az első gyökértag' kettőzetéből, sokszorozva a' második gyökértaggal. — 3) a' második gyökértag' négylegéből.

A' II-dik példában láthatni, hogy $a-b$-nek négylege kijő, ha az első gyökértag' négylegéhez hozzáadatik a' második gyökértag' négylege, — 's kivétetik belőle az első gyökértag' kettőzete, sokszorozva a' másodikkal.

Végre a' III-dik példából láthatni, hogy ha két számok' összege, azoknak különbségével sokszoroztatik: sokszorozmány lesz azon két számok' négylegének különbsége. — Ezen egyetemes szabályokat, határozott számokra alkalmazván: legyen $a = 8$, $b = 2$: lesz

I, $(8+2)^2 = 64+32+4 = 100$.

II, $(8-2)^2 = 64+4-32 = 36$.

III, $(8+2)(8-2) = 64-4 = 60$.

4) *Elosztás.*

84. §.

Az elosztásra a' szokott jegyek által útalunk; 's a' többtagú osztót vagy osztandót, ezen jegy mellett (:) kapcsok közé zárjuk. p. o. $a : b$; $\frac{a}{b}$; $(a+b) : c$; $(a+b) : (c+d)$; $\frac{a+b}{c+d}$ 'sat.

Az elosztási mütételt illetőleg, *egytagú osztót's osztandót vévén fel*, 3 tekintetben adatnak szabályok; u. m. *betükre*, *együtthatókra*, és *jegyekre* nézve.

1 *Betükre* nézve ezeket tartsuk meg:

a, *a' melly betü mind az osztóban, mind az osztandóban meg van: az a' hányadosban kimarad.* Ugyanis az osztandó = sokszorozmány, mellynek sokszorozói az osztó, és a' hányados; — már tudjuk hogy a' sokszorozás' szabályai szerint a' sokszorozmányban, a' két sokszorozó' minden betüi, jegy nélkül összeirva meg lenni tartoznak; és így a' melly betük az egyik sokszorozóhoz, t. i. az osztóhoz tartoznak, azok a' másikat, t. i. a' hányadost nem illetik. p. o. $abc : a = bc$; $abc : b = ac$, $abc : c = ab$; $abc : ab = c$; $abc : ac = b$; $abc : bc = a$. — Vagy, mivel az osztási példa = törtszám: az osztási mütétel épen az, a' mi a' törtszámnak kisebb tagokra vonásaé, — t. i. a' közös sokszorozók'

vagy osztók' kihagyása, p. o. $^{54}/_{90} = \frac{2.3.3.3}{2.3.3.5} = {}^{3}/_{5}$;

így: $\frac{abcd}{acef} = \frac{bd}{ef}$. Innen

b) ha ugyanazon betü mind az osztóban, mind az osztandóban megvan: a' hányszor megvan az osztóban, annyiszor kihagyatik az osztandóból, a' hányadosra nézve. p. o. $\frac{aaabbc}{abc} = aab$. Vagy mivel a' betük' többszöri leirása helyett *mutató* szokott tétetni: tehát az osztóbeli betü' mutatóját, az osztandóbeli ugyanazon betü' mutatójából ki kell vonni, (az algebrai kivonás' szabályai szerint), — 's a' maradék lesz a' hányadosban azon betü' mutatója. p. o.

$\frac{a^5b^2}{a^2b} = a^3b$; $\frac{a^nb^2}{a^2b^2} = a^{n-2}$; $\frac{a^2b^{-3}}{a^3b^{-3}} = a^{-1}$; $\frac{a^2b}{a^{n+2}b^2}$
$= a^{-n}b^{-1}$.

c) a' melly betü megvan az osztóban, de az osztandóban nincs: az a' hányadosban is osztó gyanánt iratik, vagyis az azzali osztás csak kijelentetik. p. o.

$a : b = \frac{a}{b}$; $ab : c = \frac{ab}{c}$; $abc : abd = \frac{c}{d}$; $\frac{a^2b^3c^n d}{ab^2ef}$
$= \frac{abc^n d}{ef}$

d) mikor valamelly betüt önmagával osztunk el: a' hányados $= 1$, mert akármelly mennyiséget önmagában megtalálunk 1-szer. p. o. $\frac{a^2}{a^2} = 1$, $\frac{a}{a} = 1$. — Azonban ha az imént adott szabály szerint, az osztó' mutatóját az osztandójéból kivonjuk: a' hányadosban azon betü' mutatója lesz $= 0$. p. o. $\frac{a^2}{a^2} = a^0$. Innen látnivaló hogy $a^0 = 1$, — vagyis akármelly betü, 0 mutatóval 1-et jelent. — Ezen 1-t, vagy 0 mutatóval ellátott be-

tüt, ha más, vagy több, nem *0* mutatójú betük mellett van, mint sokszorozó-társ, elhagyhatjuk, mert az *egy* nem sokszoroz. p. $\frac{a^3b^2c}{a^2b^2c} = ab^0c^0 = a.1.1 = a$; — de ha magában van; vagy csupa *0* mutatóval biró betük vannak egymásmellett, nem hagyhatjuk el, hanem teszünk helyette 1-et. p. o. $\frac{a}{a} = a^0 = 1$; $\frac{a^2}{a^2b} = \frac{a^0}{b} = \frac{1}{b}$; $\frac{a^3b^2c^3}{a^3b^2c^3de} = \frac{1}{de}$; $\frac{a^2b^2c}{a^2b^2c} = a^0b^0c^0 = 1.1.1. = 1.$

e) midőn ugyanazon betü mind az osztóban, mind az osztandóban megvan, — de az osztóban nagyobb mutatóval: akkor annak a' hányadosban nemleges mutatója lenne, p. o. $\frac{a^2}{a^4} = a^{-2}$. Az illyen nemleges mutatójú betü' értéke annyi, mint ha az 1-et elosztanánk azon betüvel, ugyanazon, de igenleges mutatóval ellátva, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Mert a^{-2} nem egyéb mint $\frac{a^2}{a^4}$-nak hányadosa; úgyde ugyanazon $\frac{a^2}{a^4}$ mint törtszám, ha kisebb tagokra vonatik, elosztatván mind számlálója, mind nevezője valamelly ugyanazon mennyiséggel, p. o. a^2-vel, $\frac{a^2 : a^2}{a^4 : a^2}$ lesz $= \frac{1}{a^2}$; és így $\frac{a^2}{a^4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. — Innen az illyen nemleges mutatójú betü helyett mindig tehetünk ollyan törtszámot, mellynek számlálója $= 1$, — nevezője pedig azon betü, igenleges mutatóval, — és több sokszorozó-társak közé is ekként tehetjük. p. o. $a^2b^3c : a^3bc^2 = a^{-1}b^2c^{-1} = \frac{1.b^2.1}{a \quad c} = \frac{b^2}{ac}$

f) úgy tekintvén az osztási példát, mint törtszámot: ha mind az osztót, mind az osztandót ugyanazon mennyiséggel elosztjuk, — ez által azt kisebb tagokra

vonjuk, — értékét, vagyis hányadosát kitüntetjük. p. $\frac{a^2b}{a^3c}$, mind az osztót, mind az osztandót osszuk el a^2-vel, — lesz $= \frac{b}{ac}$, melly kifejezet $= \frac{a^{-1}b}{c}$; $\frac{ab}{abc} = \frac{1}{c}$; $\frac{ax^2y^3}{ax^3y^4} = \frac{ax^2y^3 : ax^2y^3}{ax^3y^4 : ax^2y^3} = \frac{1}{xy}$.

2) *Együttható*kat illetőleg: az osztandójé osztassék el az osztójával, vagy bevégezve, ha kereken lehet, — vagy ha így nem lehet, csak kijelentve. p. o.

$$15a^2x^5 : 5a^2x^4 = 3x$$

$$144a^2bc^3x^4y^m : 12a^2bc^2x^3y^m = 12cx$$

$$5a^3bc^2x^4 : 7a^3b^2c^2x^3 = \frac{5x}{7b}$$

$$7a^2bc^3 : 9a^2bc = {}^7/_9\, c^2 = \frac{7c^2}{9}$$

3) *Jegyekre* nézve épen azon szabály áll, melly a' sokszorozásnál: t. i. *ha az osztó' és osztandó' jegyei egyezők, (akár + akár —): a' hányados igenleges; — ha pedig amazoknak jegyei ellenkezők: a' hányados nemleges.* Ugyanis a' hányados, a' maga egységeivel azt mutatja, hányszor kell venni *vagy az osztót, vagy annak ellenkezőjét*, hogy az osztandót kicsinálja. — Mikor az osztó' és osztandó' jegyei egyezők (akár + akár —): akkor magát az osztót kell nehányszor venni, úgy a' mint van, és így az ezt mutató hányados igenleges. p. o.

$$+10 : +2 = +5,\ +a : +b = +\frac{a}{b}$$

$$-10 : -2 = +5,\ -a : -b = +\frac{a}{b}$$

mind a' + 2-t hogy + 10-zé, — mind a' — 2-t hogy — 10-zé legyen, magát magához kell adni, úgy a' mint van, 5 izben, és így a' hányados mindenik esetben + 5.

Ellenben mikor az osztó' és osztandó' jegyei ellenkezők: akkor az osztónak ellenkezőjét kell venni nehányszor, hogy kicsinálja az osztandót; és így akkor a' hányados nemleges. p. o.

$$\left.\begin{array}{l} +10 : -2 = -5, \; +a : -b = \\ -10 : +2 = -5, \; -a : +b = \end{array}\right\} -\frac{a}{b}$$

hogy a' -2, $+10$-zé legyen: annak ellenkezőjét, $+2$-t, — viszont hogy $+2$, -10-zé legyen: annak ellenkezőjét, -2-t kell venni 5-ször; és így mindenik esetben az ezt mutató hányados -5.

példák: $7a^3b^3c : -2a^2b^3 = -\frac{7ac}{2}$;

$$-10a^3b^{n-1}d^3 : 5a^nb^{n-1}c^2 = -\frac{2a^{3-n}d^3}{c^2}$$

$$-6a^2b^{n-2}c^{-2} : -a^{-2}b^{2-n}c^{-1} = 6a^4b^{2n-4}c^{-1}$$

85. §.

Ha az *osztandó két- vagy többtagú:* a' mütétel csak úgy megy, mint az egytagúaknál, t. i. mindenik tagból kihagyatnak azon betük, mellyek az osztóban is megvannak, — mint közös sokszorozók. p. o.

1) $$\frac{ax^2y + a^2xy^2}{axy} = x + ay$$

ugyanezt másként így lehet írni:

$$\frac{ax^2y}{axy} + \frac{a^2xy^2}{axy} = x + ay$$

ezen példában az osztó' minden betüi, az osztandó' mindkét tagjában megvannak.

2) $$\frac{abx + a^2x^2 + a^3cx^3}{abx}$$

ezen példában az osztó' minden betüi nincsenek meg az osztandó' minden tagjaiban. Illyen esetben kétkép' eshetik az osztás:

a) vagy úgy, hogy az osztandó' minden tagjainak külön alá irjuk az osztót, 's külön-külön osztjuk el azokat:

$$\frac{abx}{abx} + \frac{a^2x^2}{abx} + \frac{a^3cx^3}{abx} = 1 + \frac{ax}{b} + \frac{a^2cx^2}{b}$$

b) vagy úgy, hogy megnézzük, mi betük vannak az osztóban ollyanok, mellyek az osztandó' minden tagjaiban feltaláltatnak, 's ezekből, még pedig ezeknek legkisebb előforduló mutatóját vévén, csinálunk közös osztót, mellyel mind az osztandó' minden tagjait, mind az osztót elosztjuk:

$$\frac{abx + a^2x^2 + a^3cx^3}{abx} = \frac{b + ax + a^2cx^2}{b}$$

itt látnivaló, közös osztó lesz $= ax$, mellyel elosztatván mind az osztandó, mind az osztó: hányados lesz $=$

$$\frac{b + ax + a^2cx^2}{b}$$

3) $$\frac{ax^2y^3z^4 + 15x^3y^2z^2 + 6xy^4z^3}{3ax^2y^2z^4}$$

az osztandó' minden tagját külön elosztva az osztóval, lesz a' hányados:

$$= \frac{y}{3} + \frac{5x}{az^2} + \frac{2y^2}{axz};$$

közös osztóval $= xy^2z^2$ elosztván mind az osztandót, mind az osztót, hányados lesz:

$$\frac{axyz^2 + 15x^2 + 6y^2z}{3axz^2}$$

86. §.

Ha mind az osztó, mind az osztandó, két- vagy többtagú: az algebrai osztás' mütételi szabályaihoz kell folyamodni, mellyek a' közszámvetésiektől nem különböznek. T. i.

1) olly rendbe kell szedni az osztandó' tagjait, hogy a' melly betü legtöbbször előfordul, annak mutatói fogydogálva következzenek. p. $9a^4 - 2a^3c + 2a^2b + 5ac$.

2) az osztó' első tagjával el kell osztani az osztandó' első tagját, — 's a' talált hányadossal az osztó' minden tagjait sokszorozván, ezen sokszorozmányt az osztandó' egyfajta tagjaiból ki kell vonni; ha maradék nincs: kész az osztás. p. o.

$$\frac{ab + ab}{a + a} = (ab + ab) : (a + a)$$

vagy

$a + a$	$ab + ab$	b
	$\pm ab \pm ab$	
	$0 \quad 0$	

3) ha még maradtak osztandó tagok: ismételni kell az előbbi munkát 'sat.; míg utoljára az osztandóból vagy semmi —, vagy valami ollyan marad, mit már elosztani nem lehet, — vagy ha el lehetne is osztani, de a' hányadosnak az osztó' minden tagjaivali sokszorozásából eredendő sokszorozmányt belőle ki vonni nem lehetne, — 's az illyen maradéknak, az osztó, törtszámot képezőleg, aláiratik. p. o.

$$(8a^3 + 2a^2b - ab^2 - b^3) : (2a - b).$$

mütétel:

osztó	*osztandó*	*hányados*
$2a - b$	$8a^3 + 2a^2b - ab^2 - b^3$	$4a^2 + 3ab + b^2$
	$\pm 8a^3 \mp 4a^2b$	
	$0 + 6a^2b - ab^2 - b^3$	
	$\pm 6a^2b \mp 3ab^2$	
	$0 + 2ab^2 - b^3$	
	$\pm 2ab^2 \mp b^3$	
	$0 \quad 0$	

más példa:

$$(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3):(x+a)=x^2+2ax+a^2$$
$$\pm x^3\pm ax^2$$
$$0+2ax^2+3a^2x+a^3$$
$$\pm 2ax^2\pm 2a^2x$$
$$0+a^2x+a^3$$
$$\pm a^2x\pm a^3$$
$$0\quad 0$$

más példa:

$$(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$$
$$\pm a^3\mp a^2b$$
$$0+a^2b-b^3$$
$$\pm a^2b\mp ab^2$$
$$0+ab^2-b^3$$
$$\pm ab^2\mp b^3$$
$$0\quad 0$$

más példa:

$$(6a^3b-5a^2b-12ab+9b):(2ab-3b)=3a^2+2a-3$$
$$\pm 6a^3b\mp 9a^2b$$
$$0+4a^2b-12ab+9b$$
$$\pm 4a^2b\mp 6ab$$
$$0-6ab+9b$$
$$\mp 6ab\pm 9b$$
$$0\quad 0.$$

más példák, = gyakorlatul kidolgozandók:

1) $(1+a^2+a^4):(1-a+a^2)=1+a+a^2$

2) $(-x^4y^2+y^2z^4-x^2z^4-x^6+2x^4z^2+y^6+2y^4z^2+x^2y^4):$
osztandó: $(x^2-y^2-z^2)$ által.

3) $(-20x^4+13x^3y+19x^2y^2-5xy^3-10xy^3z-6x^2yz+2xy^2z):$
osztandó: $(-5x^2-3xy+y^2)$ által.

87. §.

Ha az osztó az osztandót maradék nélkül nem osztja: akkor ezen maradékot új osztandó gyanánt tekintvén, az osztást vég nélkül lehet folytatni, — 's ez neveztetik *végetlen osztásnak*. p. o.

$$\frac{a}{1-b} \text{ vagy } 1-b \;\Big|\; \begin{array}{r} a \\ \pm a \mp ab \\ \hline 0+ab \\ \pm ab \mp ab^2 \\ \hline 0+ab^2 \\ \pm ab^2 \mp ab^3 \\ \hline 0 \pm ab^3 \mp ab^4 \\ \hline 0+ab^4 \\ \hline 1-b \end{array} \;\Big|\; = a+ab+ab^2+ab^3+ +\ldots.+\frac{ab^{n+1}}{1-b}$$

Ezen osztási példának tehát: $\frac{a}{1-b}$, hányadosa, (vagy ezen törtszámnak értéke) ezen végnélkül haladó sor:

$$a+ab+ab^2+ab^3+\ldots.+\frac{ab^{n+1}}{1-b.}$$

mellyben a' tagok' haladásának törvénye szembetünő. — És ezt, mint algebrai képletet, akármelly határozott példára alkalmazhatjuk, csak azon tagnak, mellynél megállapodunk, mellynek is mutatója eggyel több mint a' hányadik tag, $=n+1$, az osztót alá írni el ne felejtsük. p. o.

1) legyen $a=3$, $b=2$, $\frac{a}{1-b}=\frac{3}{1-2}=\frac{3}{-1}$;

$$\frac{3}{-1}=3+6+12+24+\frac{48}{1-2}$$

$$\frac{48}{1-2}=\frac{48}{-1}=-48, \text{ innen}$$

$$-48+3+6+12+24=-3=\frac{3}{-1}=\frac{3}{1-2}$$

2) legyen $a = 1$, $b = {}^1/_{10}$, $\frac{a}{1-b} = \frac{1}{1-{}^1/_{10}} =$

$\frac{1}{{}^{10}/_{10} - {}^1/_{10}} = \frac{1}{{}^9/_{10}} = 1 + {}^1/_{10} + {}^1/_{100} + {}^1/_{1000} + {}^1/_{1000} + \ldots$

úgyde $\frac{1}{{}^9/_{10}} = {}^{10}/_9 = 1 + {}^1/_9$ innen

${}^1/_9 = {}^1/_{10} + {}^1/_{100} + {}^1/_{1000} + \ldots$

vagy ${}^1/_9 = 0{,}1111\ldots$. mint a' tizedes törteknél láttuk.

3) érdekes nézetre vezet ha $a = b = 1$, mert ekkor: $\frac{a}{1-b} = \frac{1}{1-1} = {}^1/_0$, és

${}^1/_0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + \frac{1}{1-1} = {}^1/_0$

olly kifejezet, melly folytattatván, végnélkül növekszik; — és így ${}^1/_0$-nak értéke nagyobb mint bármelly kifejezhető szám; 's az illy mennyiség neveztetik *végetlen nagy*-nak, 's ennek jegye ez: ∞; — innen ${}^1/_0 = \infty$. Sőt általában, akármelly számot osszunk el 0-al, vagy — a' mint nevezik — *végetlen kicsinnyel*: annak értéke *végetlen nagy*. — Tudjuk hogy minél kisebb az osztó: annál nagyobb a' hányados, — és viszont; — ha tehát az osztó végetlen kicsiny: úgy a' hányados végetlen nagy; és viszont.

$\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{1}{\infty} = 0$; $1 = 0 . \infty$

ha a' 0 sokszoroztatik ∞-al: lesz belőle $= 1$.

Ha a' fentebbi példában $\frac{a}{1-b}$, nemleges b-t veszünk ki 1-ből, vagyis változtatott jeggyel hozzá adjuk: $\frac{a}{1-(-b)} = \frac{a}{1+b}$: ezen osztás' hányadosa ugyanaz, a' mi az előbbi, — de váltogató jegyekkel, t. i. a' páratlan tagok $+$, a' párosok $-$ jeggyel lesznek:

$$\frac{a}{1+b} = a - ab + ab^2 - ab^3 + \ldots\ldots \pm \frac{ab^{n+1}}{1+b}$$

legyen: $a=1$, $b=2$, $\frac{a}{1+b}=\frac{1}{1+2}=1/3$;

$\frac{1}{1+2}=1/3=1-2+4-8+16-32/3$

t. i. $-32/3-2-8=-62/3$; $+1+4+16=+21$;

$-62/3+21=-62/3+63/3=+1/3$;

legyen $a=12$, $b=2$; $\frac{a}{1+b}=12/3$.

$12/3=12-24+48-96/3$;

$96/3=32$; $-32+48-24+12=4=12/3$.

És ezen egyetemi képletek akármelly osztási példára alkalmazhatók.

HARMADIK CZIKKELY.

Sokszorozók, vagy Osztók.

88. §.

A' betüs mennyiségeket *sokszorozókkal*, v. *osztókkal* fejezni ki gyakran szükséges. Azoknak kikerését illetőleg ezeket tartsuk meg.

a) Az *egytagú mennyiségek'* első sokszorozói, mint tudjuk, magok a' betük; összetett sokszorozói pedig több betük sokszorozva. p. o. abcd-nek első sokszorozói: a, b, c, d; összetettek: ab, és cd; vagy ac, és bd; vagy ad, és bc. 'sat.

Ha a' tagnak számi együtthatója van: annak sokszorozóit már láttuk miként kell megtalálni. p. o.

$12a^2b^3c=2.2.3.a.a.b.b.b.c$

$=3ab\times 4ab^2c$

$=2ab^2c\times 6ab$ 'sat.

$105a^2bxy^2=3.5.7.a.a.b.x.y.y$

$=15ay\times 7abxy$

$=21abx\times 5ay^2$ 'sat.

b) csupán *egy betűt* is kifejezhetünk sokszorozókkal, felvévén egyik sokszorozóul az 1-et. p. o. $a = 1 \times a$; $-a = 1 \times -a$, vagy: $-1 \times a$.

c) *két-* vagy *többtagú mennyiséget* sokszorozókkal akarván kifejezni: úgy tekintjük azt, mint sokszorozmányt, 's felvévén valamit egyik sokszorozóul, vagy osztóul, azzal az adott mennyiséget elosztjuk, — a' hányados lesz a' másik sokszorozó. — De e' végre akármit felvenni nem lehet, — hanem azt, vagy azokat a' betüket kell, mellyek minden tagban előfordulnak, és azoknak előforduló legkisebb együtthatóját, 's mutatóját. p. o. ab — b-t kell kifejezni sokszorozókkal; felveszem egyik sokszorozóul a' b-t, 's elosztván vele ab — b-t, hányados lesz $= a - 1$, ez hát a' másik sokszorozó; és így $ab - b = b \times (a - 1)$. Így: ab + ac-nek osztójául felveszem a-t, — hányados lesz: b+c; és így: $ab + ac = a \,.\, (b + c)$

Így: $ab - bc = b \,.\, (a - c)$.

$ax - x = x \,.\, (a - 1)$.

$ax + x = x \,.\, (a + 1)$.

$ax + 2x - x = x\,(a + 2 - 1)$

még néhány példa gyakorlatúl:

1) $ax + bx^2 + cx^3 = x\,(a + bx + cx^2)$

2) $3z - 6xz^2 + 15x^2z^3y = 3z\,(1 - 2xz + 5x^2z^2y)$

3) $y + xy^2 - ay^3 + by^4 = y\,(1 + xy - ay^2 + by^3)$

4) $8x^2y^2z - 4x^3y^3z^2 + 12xy^4z^3 = 4xy^2z\,(2x - x^2yz + 3y^2z^2)$

5) $5ax^2 - 15a^2x^2y = 5ax^2\,(1 - 3ay)$

6) $3ax^2y - 3axy^2 = 3axy\,(x - y)$
$= -3axy\,(y - x)$

7) $a^2bz^2 - ab^2z + a^3bz^4 = abz\,(az - b + a^2z^3)$

8) $6x^2y^3z^5 - 18x^3y^3z^6 - 24x^4y^5z^7 = 6x^2y^3z^5\,(1 - 3xz - 4x^2y^2z^2)$
$= -6x^2y^3z^5\,(3xz + 4x^2y^2z^2 - 1)$

a' jegyek' megfordítása, mint ezen utolsó- 's a' 6-dik példában történt, — gyakran hasznos.

d) Gyakran megesik hogy a' többtagú mennyiséget két- vagy több részre is szakgathatjuk, — és minden részben egyik sokszorozó ugyanaz lesz, — melylyet aztán csak egyszer irván le, vele a' többi sokszorozók' összegét sokszorozzuk. p. o.

1) $ab+bc+ad+bd$

két részre szakítván: $ac+bc$, és: $ad+bd$,

$$ac+bc=c.(a+b)$$
$$ad+bd=d.(a+b)$$
$$ac+bc+ad+bd=(c+d)(a+b).$$

2) x^3+3x^2+2x

lehet így is: $x(x^2+3x+2)$.

vagy így irván le: $x^3+x^2+2x^2+2x$, 's ezt két felé vévén: x^3+x^2, és: $2x^2+2x$

lesz: $x^3+x^2=x^2(x+1)$

$$2x^2+2x=2x(x+1)$$

innen: $x^3+3x^2+2x=(x^2+2x)(x+1)$

3) y^3-3y^2+2y

$$=y^3-y^2-2y^2+2y$$
$$=\left.\begin{matrix}y^3-y^2\\-2y^2+2y\end{matrix}\right\}\begin{matrix}=y^2(y-1)\\=-2y(y-1)\end{matrix}$$
$$=(y^2-2y)(y-1)=y(y-2)(y-1).$$

4) $2ax^3-ax^2y+2ax-ay+2bx^3-bx^2y+2bx-by.$

$$=a(2x^3-x^2y+2x-y)$$
$$+b(2x^3-x^2y+2x-y)$$
$$=[a+b][2x^3-x^2y+2x-y]$$
$$=[a+b]\{2x[x^2+1]-y[x^2x1]\}$$
$$=[a+b][2x-y][x^2+1].$$

e) Ki az alakok' ismeretében előment: némelly kifejezések' sokszorozóit egy pillanatra megismeri. p. o. az előbbiekben már láttuk hogy:

1] $a^2+2ab+b^2=[a+b]^2=[a+b][a+b]$.
2] $a^2-2ab+b^2=[a-b]^2=[a-b][a-b]$.
3] $a^2-b^2=[a+b][a-b]$.

Némelly kifejezések, ezek közűl vagy egyikhez, vagy másikhoz hasonlók, — 's ezeknek formájokra lehet azokat sokszorozóikra kifejteni. p. o.

az 1-ső szerint:

$16x^2+24xy+9y^2=[4x+3y][4x+3y]$.
$a^2b^2+2abxz+x^2z^2=[ab+xz][ab+xz]$.

a' 2-dik szerint:

$9a^2-30ab+25b^2=[3a-5b][3a-5b]$.
$a^2x^2-2abxy+b^2y^2=[ax-by][ax-by]$.

a' 3-dik szerint:

$4x^4-9x^4=(2x^2+3y^2)(2x^2-3y^2)$
$9a^2x^4z^2-16b^2y^4x^2=$
$=(3ax^2z+4by^2x)(3ax^2z-4by^2x)$.

még egy példa gyakorlatúl:

$2x^3+3x^2y+3xy-2x=x[2x^2+3xy+3y-2]$
$=x(2x^2-2+3xy+3y)$
$=x[2(x^2-1)+3y(x+1)]$
$=x[2(x+1)(x-1)+3y(x+1)]$
$=x[(2x-2)(x+1)+3y(x+1)]$
$=x(2x-2+3y)(x+1)$

NEGYEDIK CZIKKELY.

Törtek.

89. §.

A' *közönséges- és tizedes* törtekre nézve itt más szabályokat nem adhatunk, mint a' mellyeket fentebb a' számjegyeseknél tanulánk; csak azoknak betüs mennyi-

ségekre alkalmazását fogjuk néhány példákban előmutatni. — De itt lesz helye hogy a' *Láncz-törtek*' szabályait előadjuk.

I. *Közönséges- és tizedes törtek körűlti mütételek.*

1) A' közönséges törtek' alakja ez: $\frac{a}{b}$, v. $\frac{a+b}{c-d}$, vagy: $\frac{a^2x - ax^2}{bx - cy}$'sat., szóval mi az elosztásé.

2) Tizedes törtek' alakja ez: $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{10^2} + \frac{d}{10^3} + \frac{e}{10^4} + \frac{f}{10^5} \ldots + \frac{m}{10^{n-1}} + \frac{n}{10^n}$

3) Tudjuk hogy a' törtek' értéke nem változik, ha mind a' számlálót, mind a' nevezőt ugyanazon mennyiséggel sokszorozzuk, vagy elosztjuk. p. o.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ax^2}{bx^2} = \frac{a(1-x)}{b(1-x)} = \frac{a(x-x^2+y^2)}{b(x-x^2+y^2)}$$

Nem változik tehát a' törtszám' értéke, ha mind számlálója, mind nevezője — 1-el sokszoroztatik. p. o. $\frac{a.-1}{b.-1} = \frac{-a}{-b}$; így $\frac{a+b}{c-d}$ből lesz $\frac{-a-b}{-c+d}$; és $\frac{a-b}{c-d}$ ből lesz: $\frac{b-a}{d-c}$; mellyből láthatni, hogy ha valamelly törtszám' minden tagja ellenkező jegyet nyer: értéke nem változik.

4) Külön-nemü törtek egy-nemüekké lesznek, ha nevezőik egymással, — és mindeniknek számlálója a' többinek nevezőjével sokszoroztatik. p. o.

$\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ lesz: $\frac{ad}{bd}$ és $\frac{cb}{bd}$.

így: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{n}{x}$ egynemüek lesznek

$$= \frac{adfx}{bdfx}, \frac{bcfx}{bdfx}, \frac{bdex}{bdfx}, \frac{bdfn}{bdfx}$$

így: $\frac{(a+x)}{(b+y)}, \frac{(a-x)}{(b-y)}$, egynemüek lesznek

$= \frac{(a+x)(b-y)}{(b+y)(b-y)}, \frac{(a-x)(b+y)}{(b+y)(b-y)}$

$= \frac{(a+x)(b-y)}{(b^2-y^2)} \quad \frac{(a-x)(b+y)}{(b^2-y^2)}$

5) A' törtszám kisebb kifejezetre vonatik, ha a' számlálóból és nevezőből ugyanazon sokszorozók kihagyatnak. p. o.

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}; \quad \frac{4a^2bx^2}{8abx} = \frac{ax}{2.}$$

így: $\frac{ax^2y}{axy^2} = \frac{x}{y}; \quad \frac{6x-9x^2}{3xz} = \frac{2-3x}{z}$

így: $\frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}$

$= \frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-12ay-3ay+3y^2}$

$= \frac{6a^2(a-y)+2y^2(a-y)}{12a(a-y)-3y(a-y)}$

$= \frac{(6a^2+2y^2)(a-y)}{(12a-3y)(a-y)}$

$= \frac{6a^2+2y^2}{12a-3y.}$

6) Kevert mennyiséget tört alakra vihetni: ha az egész sokszoroztatik a' tört' nevezőjével, — 's ezen nevező annak alá iratik. p. o. $a+\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$

így: $a + \frac{b-x}{c-d} = \frac{ac-ad+b-x}{c-d}$

így: $[a+x] - \frac{z}{a-x} = \frac{a^2-x^2-z}{a-x}$

7) *Összeadást és kivonást* csak egynemü törtek körül vihetni végbe; — különben csak kijelelhetni; — ha

egynemüek, vagy azokká tétettek: csak számlálójok adatik össze, vagy vonatik ki egymásból. p. o.

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{2a}{b};\quad \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{ac+ab}{bc};$$

így: $\frac{1+a}{x}+\frac{1-a}{x}=\frac{2}{x};$

és $\frac{1+a}{x}-\frac{1-a}{x}=\frac{2a}{x};$

így $\frac{a}{b}-\frac{a}{c}=\frac{ac-ab}{bc};$

így $\frac{a-3b}{c}+\frac{5a-b}{2c}=\frac{7a-7b}{2c}.$

8) A' *sokszorozás* a' számjegyes törtekétől nem különbözik.

a) Ha egyik sokszorozó egész; másik tört: a' számláló sokszoroztatik az egésszel. p. o.

$$\frac{a}{c}\cdot x=\frac{ax}{c};\quad \frac{a+x}{c-z}\cdot(a+x)=\frac{(a+x)^2}{c-z}$$

így: $\frac{1}{1+2x+x^2}\cdot(1+x)^2=1.$

a' jegyek a' szokott törvényt követik:

$$\frac{a+b-c}{x-z}\cdot(a-b+c)=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{x-z}$$

b) Ha mind a' két sokszorozó tört: számlálók számlálókkal, nevezők nevezőkkel sokszoroztatnak. p.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{x+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2};$$

$$\frac{x}{2a}\times\frac{2y}{3b}\times\frac{3c}{4x}=\frac{6cxy}{24abx}=\frac{cy}{4ab}.$$

9) Az *elosztás* is úgy történik, mint a' számjegyes törteké.

a) egésszel törtet osztani akarván: ennek nevezőjét sokszorozzuk:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \quad \frac{(x^2-1)}{(x+1)} : x^2 = \frac{(x^2-1)}{x^2(x+1)}$$

b) törttel történt osztani akarván: megforditjuk az osztót, 's vele az osztandót sokszorozzuk:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\text{így } \frac{a+x}{a-x} : \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2}{(a-x)^2}$$

c) egészet törttel osztani akarván: megforditjuk az osztót, — 's az egésszel a' számlálót sokszorozzuk:

$$a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

10) A' tizedes törtek körülti mütételek is a' szerint történnek, mint a' közszámvetésben előadatott. p.

1) *Összeadás*: $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{10^2} + \frac{d}{10^3} \ldots + \frac{n}{10^n}$

$$\underline{a^1 + \frac{b^1}{10} + \frac{c^1}{10^2} + \frac{d^1}{10^3} \ldots + \frac{n^1}{10^n}}$$

$$= a + a^1 + \frac{b+b^1}{10} + \frac{c+c^1}{10^2} + \frac{d+d^1}{10^3} \ldots + \frac{n+n^1}{10^n}$$

2) *kivonás*: ugyanezeknek különbsége lesz

$$= a - a^1 + \frac{b-b^1}{10} + \frac{c-c^1}{10^2} + \frac{d-d^1}{10^3} \ldots + \frac{n-n^1}{10^n}$$

3) *sokszorozás*: $\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}$

4) *Elosztás*: $\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^m} = \frac{a}{b} \cdot 10^{n-m}$

ha $m = n$, úgy $\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a}{b}$.

Lánczt örtek.

90. §.

Midőn ollyan törtszámnak, mellynek számlálója 's nevezője viszonyos elsőszámok, mind számlálóját, mind nevezőjét, közülök a' kisebbikkel elosztjuk: ott előáll (ha lárvás, a' kifejlett egészen kívül, — ha valóságos, — egész nélkül) ollyan törtszám, mellynek számlálója $= 1$; — nevezője pedig valamelly épszám mellé csatolt törtszám; p. $\frac{2}{7}$-nek mind számlálóját, mind nevezőjét elosztván számlálójával $= 2$-vel. $\frac{2:2}{7:2} = \frac{1}{3+\frac{1}{2.}}$

És ha a' nevezőbeli törtszámot, a' mondott módon, még tovább is lehet fejteni: minden következő nevező fog állni egészből, 's a' mellett olly törtszámból, mellynek számlálója 1, — nevezője pedig egész és törtszám. p.

$$^{11}/_{27} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}} \qquad ^{29}/_{5} = 5+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$$

Az illy móddal kifejtett törtszám neveztetik *Lánczt örtnek* (fractio-catenata), — melly vagy *véges*, ha a' kifejtésben véget érünk, — vagy *végetlen*, ha abban véget nem érünk. — A' lánczt örtʼ egyetemes alakja tehát ez: ha $A > B$, $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}}}}}$

'sat.

ha $A < B$, $\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}}$ 'sat.

A' láncztörtben minden következő nevezőnek egész számja neveztetik *hányados*-nak, mivel akkor áll elő, mikor a' maradék törtszám' nevezője számlálójával elosztatik, olly móddal, mint midőn legnagyobb-közös mérőt keresünk. p. o.

$^{361}/_{1495}$-t láncztörtté kell változtatni:

$$361\left|\frac{361}{1495}\right| = \cfrac{1}{4+\cfrac{51}{361}}, \qquad 51\left|\frac{51}{361}\right| = \cfrac{1}{7+\cfrac{4}{51}},$$

$$4\left|\frac{4}{51}\right| = \cfrac{1}{12+\cfrac{3}{4}} \qquad 3\left|\frac{3}{4}\right| = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$$

itt *hányadosok*: 4, 7, 12, 1, 3.

a' láncztört' alakja: $\frac{361}{1495} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$.

91. §.

A' véges láncztört' értéke a' feladott közönséges törtszámával egyenlő. Ha pedig a' láncztört' tagjaiból egy — két — három 'sat. tagot felvévén, azokból csinálunk rendes törtszámot: ennek értéke a' kiadottéval nem lesz ugyan egyenlő; de annyival közelebb jár hozzá, minél több tagokból csináltatik; 's az illyen nevez-

tetik *közelitő törtszámnak*. p. o. a' fölebbi példában $^1/_4$ még távol van a' $^{361}/_{1495}$ értekétől; — de ha $\frac{1}{4+\frac{1}{7}}$-ből csinálunk rendes törtszámot, úgy tekintvén, hogy 1 el van osztva $4+{}^1/_7$-szel $= {}^{29}/_7$-szel, — 's ez lesz $1 : {}^{29}/_7 = 1 \times {}^7/_{29} = {}^7/_{29}$, — és így $\frac{1}{4+\frac{1}{7}} = {}^7/_{29}$, ez már a' $^{361}/_{1495}$ értekétől nem messze jár; mit könnyen átláthatunk, ha mindkettőt tizedes törté változtatjuk; mert $^7/_{29} = 0,2413$, és $^{361}/_{1495} = 0,2414$, csak a' tízezredrészben van *egy* különbség. — Azonban ha az ember a' láncztörtnek még több tagjaiból csinálna rendes törtszámot: még közelebb járna a' feladott törtszám' értekéhez; — megjegyezvén azt, hogy az igy formált közelitő törtek közül a' páratlanok (1-ső, 3-dik, 5-dik 'sat.) nagyobb-, a' párosok (2-dik, 4-dik 'sat.) pedig kisebb értekűek a' feladott törtszámnál, — mit az alább lejendő példában általláthatni.

Látjuk tehát, hogy valamelly nagy, 's közös mérő által kisebbekre nem vonható számokkal kifejezett törtszám helyett, láncztörtek' segitségével, közelitő-, és számba sem vehető hibával helyettesithető törtszámokat csinálni ohajtható. Azonban mivel, kivált több tagokból, hosszú munkával jutunk hozzá: lássuk azok' készitésének könnyebb módját. — A' láncztörtek' egyetemes alakjából

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}\ \text{'sat.}$$

csináljuk ki a' közelitő törtszámokat:

$$\text{I,}\quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\text{II,}\quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$$

$$\text{III,}\quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} = \frac{bc+1}{abc+a+c}$$

$$\text{IV,}\quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1.}$$

Ha ezen közelitő törteket sokszorozókkal fejezzük ki, — úgy hogy a' IV-dikben egyik sokszorozó legyen a' 4-dik hányados $=d$, — a' III-dikban, a' 3-dik $=c$, — a' II-dikban a' 2-dik $=b$, — az I-sőben az 1-ső $=a$: így lesz:

$$\text{IV,} = \frac{d(bc+1)+b}{d(abc+a+c)+ab+1}$$

$$\text{III,} = \frac{c(b)+1}{c(ab+1)+a}$$

$$\text{II,} = \frac{b(1)+0}{b(a)+1.}$$

Ebből láthatni, hogy a' IV-dik közelitő törtszám' számlálója kijő, ha a' 4-dik hányadost (d) sokszorozzuk a' III-dik törtszám' számlálójával (bc + 1), 's hozzá-adjuk a' II-dik törtszám' számlálóját (b), 's lesz: d(bc + 1) + b; — nevezője pedig a' IV-dik közelitő törtszámnak kijő, ha a' 4-dik hányadost (d) sokszorozzuk a' III-dik törtszám' nevezőjével [acb + a + c], — 's

hozzáadjuk a' II-dik törtszám' nevezőjét [ab + 1], 's lesz: d(abc + a + c) + ab + 1. — Így akárhányadik közelitő törtszámot kicsinálandók: sokszorozzuk a' felvett hányadost a' megelőző törtszám' számlálójával, 's adjuk hozzá az azt megelőző törtszám' számlálóját; ebből lesz az új törtszám' *számlálója*. Továbbá a' felvett hányadost sokszorozzuk a' megelőző törtszám' nevezőjével, 's adjuk hozzá az azt megelőző törtszám' nevezőjét; ebből lesz az új törtszám' *nevezője*. — Vagy rövidebben ezt tehetjük: irjuk le a' hányadosokat sorba, 's alájok legelől ezt: $\frac{0}{1}$, mert a' második törtszámhoz, mint látánk, ez ($\frac{0}{1}$) adandó. Most az előadott módon minden következő törtszám' számlálóját 's nevezőjét csináljuk ki, 's az illető hányadosnak irjuk alá: p. o. $\frac{361}{1495}$.

hányadosok:		4	7	12	1	3
közelitő	0	1	7	85	92	361
törtek	1	4	29	352	381	1495

Így igen könnyü munkával ki lehet csinálni minden *közelitő törteket*, csak a' hányadosokat keressük ki, — akár vesszük láncztört-alakba, akár nem.

p. o. $\frac{121}{377}$, *hányadosok:* 3, 8, 1, 1, 1, 4.

közelitő törtek: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{17}{53}$ 'sat.

A' *lárvás törtekkel* úgy is bánhatunk, hogy megfordítván őket valóságos törtalakra, kikeressük a' közelítőket, — 's ezeket ismét visszafordítjuk lárvásokká:

p. o. $\frac{37}{13}$, *megforditva:* $\frac{13}{37} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}$

	2	1	5	2
0	1	1	6	13
1	2	3	17	37
megfordítva	2	3	17	37
	1	1	6	13

Hogy a' közelitők közül a' páratlanok nagyobb-, a' párosok kisebb értekűek a' kiadott törtszámnál, lássuk egy példában: $\frac{25000}{25691}$

	1	36	5	1	1	2	1	17
0	1	36	181	217	398	1013	1411	25000
1	1	37	186	223	409	1041	1450	25691

1, $\frac{1}{1}$ = 1,000000000
2, $\frac{36}{37}$ = 0,972972973
3, $\frac{181}{186}$ = 0,973118279
4, $\frac{217}{223}$ = 0,973094170
5, $\frac{398}{409}$ = 0,973105134
6, $\frac{1013}{1041}$ = 0,973102786
7, $\frac{1411}{1450}$ = 0,973103448
8, $\frac{25000}{25691}$ = 0,973103431

HARMADIK SZAKASZ.

Hatványok, és Gyökerek.

ELSŐ CZIKKELY.

A' hatványokról és gyökerekről általánosan; — 's különösen az egytagú mennyiségekéről.

92. §.

Azon sokszorozmány, melly valamelly mennyiségnek önmagával több ízbeni sokszorozásából származik, ezen mennyiség' *hatványá*-nak (potentia); — a' felvett mennyiség, az ő hatványához képest, *gyökér*-nek (radix); — azon szám, melly egységeivel mutatja, hányszor van meg a' hatványban a' gyökér, mint sokszorozó, — *hatványjegy*-nek, vagy *mutató*-nak (exponens potentiae) neveztetik.

Jelesen azon sokszorozmány, mellyben valamelly mennyiség, mint sokszorozó, két ízben van meg, — ezen mennyiségnek *négylege* (quadratum), vagy *másod hatványa;* azon mennyiség pedig melly abban két izben van meg, mint sokszorozó, azon négylegnek *négyleg-, vagy másod-gyökere* (radix quadratica). p. o. $9 = 3.3$, a' 9 négylege 3-nak, a' 3 négyleggyökere 9-nek; — $a^2 = a.a$, és így a^2 négylege a-nak, — a pedig $\square$ gyökere a^2-nak.

Azon sokszorozmány, mellyben valamelly mennyiség, mint sokszorozó, három ízben van meg, ehezképest *harmadhatvány*, vagy *koczka* (cubus), — és ez a' kocz-

kához képest *koczka-gyökér* (radix cubica). p. o. 125 $= 5.5.5$; 125 az 5-höz képest *koczka-hatvány*, — 5 a' 125-höz *koczka-gyökér*; $a^3 = a.a.a$; a^3 *koczkája* a-nak, és a koczkagyökére a^3-nak. — A' koczka-hatvány, látnivaló, úgy jő ki, ha a' négyleg még egyszer a' gyökérrel sokszoroztatik, $a^3 = a^2.a$.

Ha a' *koczka* még egyszer a' gyökérrel sokszoroztatik: innen ered *negyed-hatvány*, vagy *kettős négyleg* (biquadratum) — ez ismét a' gyökérrel sokszoroztatván ad *5-öd hatványt* 'sat. p. o. $a^4 = a^3.a$, *negyed-*, $a^5 = a^4.a$, *ötöd-*, $a^6 = a^5.a$, *hatod-*, $a^m = m$-*dik hatványa* a-nak; — valamint *a negyedik gyökere* a^4-nak, *ötödik* a^5-nak, *hatodik* a^6-nek, m-dik a^m-nek.

Akárhányadik (m-dik) hatványra emelni tehát valamelly mennyiséget annyit tesz, mint azt sokszorozó gyanánt m izben venni; 's az m lesz ezen hatványnak *mutatója*.

Hasonlólag akárhányadik (m-dik) gyökeret vonni valamelly mennyiségből annyit tesz, mint azt m számú egyenlő sokszorozókra kifejteni, — vagy keresni egy olly mennyiséget, melly m izben vétetvén, mint sokszorozó, a' feladott mennyiséget, mint hatványt kiadja.

93. §.

Emelésre útalandók tehát a' gyökeret kapcsok közé tévén, a' kivánt hatvány' mutatóját kivül tesszük, p. o. $(a)^3$ azt mutatja hogy az a-nak harmadhatványa-, $(abc)^4$ az abc-nek negyed-, $(2a^2bx)^n$ a' $2a^2bx$-nek n-dik hatványa kivántatik.

Az emelési mütétel pedig abban áll, hogy a' kiadott gyökeret magát magával sokszorozzuk, — vagy mint sokszorozót vesszük annyi izben, a' hány *egy* van a' *mutató-ban*. p. o. $(5)^3 = 5.5.5 = 125$; — $(a)^3 = a.a.a = a^3$; $(abc)^4 = abc.abc.abc.abc = a^4b^4c^4$.

Egytagú mennyiségek' emelési szabályai tehát ezek:

1) Az együttható sokszoroztassék önmagával, annyi izben, mennyit a' mutató kiván.

2) A' betük' mutatói (a' hol nincs ki irva, oda 1-et értvén) külön külön sokszoroztassanak a' kiadott mutatóval. Mert tudjuk hogy a' sokszorozásban ugyanazon betük' mutatói összeadatnak: tehát itt annyiszor adatnak össze, a' hányszor ugyanazon betük, mint sokszorozók előjönek; annyiszor jönek pedig elő, a' hányadik hatvány kivántatik; és így azoknak mutatói annyiszor adassanak össze, — vagyis a' kiadott mutatóval sokszoroztassanak. p. o. $(2a^2bc^3)^2 = 4a^4b^2c^6$; $(5a^3b^2)^3 = 125a^{27}b^6$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

3) Ha törtszám emelendő: annak mind számlálóján, mind nevezőjén véghez viendő az említett mütétel, — mert a' sokszorozásban tudjuk hogy számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel kell sokszorozni. p. o. $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; $\left\{\frac{a}{b}\right\}^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$; $\left\{\frac{a}{x}\right\}^m = \frac{a^m}{x^m}$. Látnivaló hogy a' valóságos törtszám, minél magosb hatványra emeltetik, annál kisebb értekü lesz.

4) A' jegyekre nézve, a' sokszorozási szabályokhoz képest tartsuk meg:

a, *az igenleges gyökérnek minden hatványa igenleges*, — mert mindenkor igenleges sokszorozók sokszoroztatnak egymással.

b, *a' nemleges gyökérnek páros hatványai igenlegesek, a' páratlanok pedig nemlegesek.* p. o. $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$; $(-a)^3 = -a.-a.-a = +a^2.-a = -a^3$; $(-a)^4 = -a^3 \times -a = +a^4$; $(-a)^5 = +a^4 \times -a = -a^5$. — Ezért $(-a)^2$-t, $-a^2$-tól jól megkülönböztessük; t. i. $(-a)^2 = +a^2$; és $-a^2 = -a \times +a$; így $(-a^m)^4 = +a^{4m}$; és $-(a^m)^4 = -a^{4m}$.

5) Valamint a' betüs mennyiségeknél, minden külön betüket, a' tagnak sokszorozóit, hatványra emeljük: úgy a' számjegyes mennyiségeknél is, ha azokat sokszorozókkal fejezzük ki, minden külön sokszorozót emeljünk, — ezen hatványokat egymással sokszorozzuk, — ez lesz a' feladott szám' hatványa. p. o. $(72)^3 = (6.3.4)^3 = 6^3.3^3.4^3 = 216.27.64 = 373248$. — Innen a' melly szám 0-okon végződik, annak csak jelentő jegyeit kell emelni, 's végül a' másod-hatványnál két annyi-, a' harmadnál három annyi-'sat. 0-okat kell tenni, mint a' hány a' gyökérben van. p. o. $(90)^2 = (9.10)^2 = 9^2.10^2 = 81.100 = 8100$; — $(300)^3 = (3.100)^3 = 3^3.100^3 = 27.1000000 = 27000000$.

94. §.

Gyökérvonásra útalandók, a' kiadott hatvány eleibe tesszük a' gyökérjegyet $\sqrt{}$, mellybe a' kivánt gyökér' mutatója iratik, megjegyezvén hogy ha másodgyökér kivántatik, a' 2-t el szoktuk hagyni, 's csak oda érteni; — ha pedig a' gyökér többtagúból kivántatik, azon többtagú zárjegy közé tétetik, — vagy a' $\sqrt{}$ jobbfelöli karja a' többtagú felett kinyujtatik. p. $\sqrt{}(a+b+2cd)$ vagy $\sqrt{a+b+2cd}$.

Mielőtt a' gyökérvonás' mütételéről szólnánk, jegyezzük meg, hogy a' gyökér vagy *tökéletes*, vagy *tökéletlen*.

Tökéletes gyökér az, melly vagy egész- vagy törtszámokkal teljesen kimeríthető. p. o. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. És az illyen mennyiségek, mellyekből tökéletes gyökeret lehet fejteni, neveztetnek *arányosok*-nak (rationalis).

Tökéletlen gyökér az, mellyett sem egész sem tört számokkal ki nem lehet merítni, csak közelítésileg ki-

fejteni. p. o. $\sqrt{7} = 2{,}6457513\ldots$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{8}$, 'sat. És az illyen mennyiségek, mellyekből tökéletes gyökeret nem lehet fejteni, neveztetnek *aránytalanok*-nak (irrationalis).

Megemlítendő még a' *képzetes* gyökér (radix imaginaria) melly nemleges mennyiségből vonandó párosgyökér volna, de a' mellyet képzelni sem lehet. p. o. $\sqrt{-4}$, t. i. ennek négyleg-gyökere sem $+2$, sem -2 nem lehet, mert akármellyiknek négylege nem -4, hanem $+4$.

Egytagú mennyiségek' gyökérvonási szabályai ezek:

1) Az együtthatónak vétessék kivánt gyökere, ha van tökéletes; — ha nincs, csak útaltassék rá.

2) A' betük' mutatói külön külön osztassanak el a' gyökér' mutatójával, 's a' hányados lesz a' gyökérben azon betü' mutatója. Mert midőn a' gyökér emeltetett, akkor minden betü' hatványjegyével sokszoroztuk a' kivánt emelés' mutatóját; most tehát azt keressük: hányszor van meg ezen mutató a' betük' mutatóiban, vagyis azokat ezzel elosztjuk. — És ha kereken el nem oszthatjuk: vagy törtszám-alakban fejezzük ki, — vagy megtartjuk a' gyökérjegyet. p. $\sqrt{4a^2b^4} = 2ab^2$; $\sqrt[3]{9a^3} = 3a$; $\sqrt[3]{27a^2b^3c^4} = 3a^{\frac{2}{3}}bc^{\frac{4}{3}}$; $\sqrt[m]{ab} = a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{m}}$. Innen látnivaló, hogy a' tört-mutató mindig gyökérre útal, 's felcserélhető gyökérjeggyel, mellybe a' mutató törtszám' nevezője irandó gyökérmutató gyanánt. p. o. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; — és így $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; — így $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$.

3) Látnivaló hogy itt minden sokszorozóból külön vonatik gyökér, 's ezek egymással sokszoroztatnak. Innen, ha tetszik, útalólag is minden sokszorozó betünek elcibe tehetjük a' gyökérjegyet, 's azokat egymás-

sal sokszorozzuk. p. o. $\sqrt[m]{25abc} = \sqrt[m]{25} . \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c}$. — Vagy a' melly sokszorozóból épgyökeret vonhatunk, vonunk; a' mellyekből nem lehet, azoknak eleibök teszszük a' gyökérjegyet, — 's egymással sokszorozzuk. p. $\sqrt[3]{27ab^3c} = 3b\sqrt[3]{ac}$; $\sqrt{5a^2b^4} = ab^2\sqrt{5}$; $\sqrt[m]{12a^mb^2c^3}$ $a\sqrt[m]{12b^2c^3}$. — Igy a' számjegyes mennyiségeknél is, ha azokat sokszorozókkal fejezzük ki, vonhatunk a'külön sokszorozókból gyökeret, 's azokat egymással sokszorozván, kijő a' kivánt gyökér. p. $\sqrt{576} = \sqrt{(4.9.16)} = \sqrt{4} . \sqrt{9} . \sqrt{16} = 2.3.4 = 24$. — Az is megesik, hogy a' sokszorozókra fejtett számnak némelly sokszorozójából valósággal vonunk gyökeret, némellyekére csak útalunk. p. o. $\sqrt{24} = \sqrt{(4.6)} = 2.\sqrt{6}$; $7\sqrt{18} = 7\sqrt{(9.2)} = 7\sqrt{9} . \sqrt{2} = 7.3.\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$; $-4\sqrt[3]{54} = 4.\sqrt[3]{(27.2)} = 4.\sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{2} = 4.3.\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2}$. — Megeshetik az is, hogy az együtthatókat, és betüket sokszorozókra fejtjük, 's úgy vonunk gyökeret. p. o. $\sqrt[3]{16a^4} = \sqrt[3]{8} . 2 . a^3a = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{a^3} \sqrt[3]{a} = 2.\sqrt[3]{2} . a . \sqrt[3]{a} = 2a\sqrt[3]{2a}$; így $\sqrt[4]{a^{14}a^{13}b^5c} = \sqrt[4]{2^{12}.2^2.a^{12}.a^1.b^4.b^1.c^1} = 2^{\frac{12}{4}}.2^{\frac{2}{4}}.a^{\frac{12}{4}}.a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{4}{4}}.b^{\frac{1}{4}}.c^{\frac{1}{4}} = 2^3 . \sqrt[4]{2^2} . a^3 . \sqrt[4]{a} . b . \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{c} = 8a^3b\sqrt[4]{(4abc)}$.

4) A' törtszámnak mind számlálójából, mind nevezőjéből külön vonatik gyökér; 's az itt eredő törtszám lesz a' kivánt gyökér. p. o. $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}$. Vagy ha a' számlálót sokszorozzuk a' nevezővel: csak ezen sokszorozmányból vonjunk gyökeret, 's osszuk el azt a' nevezővel,

mert $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$, és így: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; így: $\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{1.7}{7.7}} = \frac{\sqrt{2.7}}{\sqrt{7.7}} = \frac{\sqrt{2.7}}{7}$.

— Vagy végre változtathatjuk a' közönséges törtet tizedessé, — 's az alább előadandó módon vonhatjuk gyökerét.

5) Jegyeket illetőleg, ezeket tartsuk meg:

a) *igenleges mennyiségből:*

α) *a' páratlan gyökér mindig igenleges:* $\sqrt[3]{+a^3} = +a$.

β) *a' páros gyökér pedig lehet igenleges is, nemleges is*, csak a' körülmények határozzák el, mellyik legyen, a' honnan mind a' két jegy eleibe tétetik. p. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt{a^4} = \pm a^2$; — mert mind $+a^2 . +a^2$, mind $-a^2 . -a^2 = +a^4$.

b) *nemleges mennyiségből:*

α) *a' páratlan gyökér mindig nemleges.* p. o. $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

β) *páros gyökér* pedig nem képzelhető, — 's mint említenk, neveztetik *képzetesnek*, p. o. $\sqrt{-a^2}$ sem $+a$ sem $-a$ nem lehet.

Egyetemileg a' páros szám' kifejezete $= 2n$, — a' páratlané $= 2n+1$; mert minden páros számnak egyik osztója 2; — a' páratlannak 2-vel osztásakor pedig fennmarad 1. A' képzetes gyökér' egyetemi kifejezete tehát ez: $\sqrt[2n]{-a}$; ellenben $\sqrt[2n+1]{-a}$ lehető nemleges gyökér.

95. §.

A' melly betünek mutatója $= 0$: annak értéke mindenkor $= 1$. (l. felebb 84 §. 1, d.) T. i. az illy kifejezés p. a^0, olly lárvás tört, mellynek számlálója nevezőjével egyenlő, — mellynek értéke $= 1$. p. $\frac{a^2}{a^2} = a^0 = 1$;

$\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$. Innen 0-ra emelni bármelly mennyiséget, annyi *mint* 1-gyé tenni, p. $(a+x)^0 = 1$, $\left\{\frac{a}{x}\right\}^0 = 1$ 'sat.

A' melly betünek *mutatója nemleges:* annak értéke ollyan törtszám, mellynek számlálója $= 1$, nevezője pedig ugyanazon betü, ugyanazon, — de igenlegesre változtatott mutatóval. [lásd 84 §. 1 e.] p. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. T. i. az illy kifejezés valóságos tört, — mellynek midőn számlálója nevezőjével elosztatik, jő ki a' nemleges mutató. p. o. $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; ha pedig mind a' nevező, mind a' számláló valamelly ugyanazon mennyiséggel, p. a' számlálóval elosztatik, kijő az említett törtszám-alak, mellynek számlálója 1, nevezője pedig ugyanazon betü, igenleges mutatóval, $\frac{a^2 : a^2}{a^5 : a^2} = \frac{1}{a^3}$; $\frac{a^m : a^m}{a^{2m} : a^m} = \frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

És viszont $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$; mert

$\frac{1}{a^{-m}} = 1 : \frac{1}{a^m} = 1 \times \frac{a^m}{1} = a^m$, — az a és m akármelly mennyiségeket jelentsenek.

Ezen nézetből indulva ki, akármelly tört-mennyiséget ép-alakra vihetünk; vagy akármelly sokszorozót, vagy betüt számlálóból nevezőbe, és viszont nevezőből számlálóba által tehetünk, — csak mutatója' jegyét ellenkezőre változtassuk. p. o. $\frac{a}{x^2} = a \cdot \frac{1}{x^2} = ax^{-2}$; $\frac{ab^2}{cx^{-m}} = \frac{b^2x^m}{a^{-1}c}$; $\frac{x^3 - ax}{bc^3} = \frac{x(x^2-a)}{bc^3} = \frac{x^2-a}{bc^3x^{-1}}$;

$\frac{a^2x(a^2-x^2)^m}{p} = \frac{a^2x}{p(a^2-x^2)^{-m}}$; $^5/_9 = 5 . {}^1/_9 =$ $\frac{5}{3^2} = 5.3^{-2} = 5.9^{-1}$; így $(a^{-m})^3 = \left\{\frac{1}{a^m}\right\}^3 =$ $\frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$; $(a^m b^{-n})^{-n} = \frac{1}{(a^m b^{-n})^n} = \frac{1}{a^{mn}b^{-nn}}$ $= a^{-mn}b^{nn}$.

MÁSODIK CZIKKELY.

Két- 's több-tagú mennyiségek' emeléséről.

96. §.

A) *Másod-emelés.*

1) *Kéttagú gyökeret másodhatványra emelni.*

Akármelly kéttagú gyökérnek képviselője lehet $\pm a \pm b$; már $(\pm a \pm b)^2 = (\pm a \pm b) . (\pm a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$. T. i. kéttagú gyökér' négylege áll 3 tagból, u. m. 1) az első gyökértag' négylegéből. 2) az első gyökértag' kettőzetének, a' második gyökértaggali sokszorozmányából. 3) a' második gyökértag' négylegéből. — Ha mind a' két gyökértag' jegye +, $(a+b)$, vagy —, $(-a-b)$: akkor a' négylegnek mind a' 3 tagja + jegyü; — ha pedig a' gyökértagok közül vagy egyik, vagy másik — jegyü: akkor a' négyleg' középső tagja —, a' két szélső + jegyü; — mint mindezeket a' sokszorozási mütételből kiki általláthatja. Ezen szabály szerint tehát akármelly kéttagú, betüs, vagy számjegyes mennyiséget lehet négyleg-hatványra emelni. p. o.

$$[a^2-1]^2 = a^4 - 2a^2 + 1$$

$$\left\{x + \frac{a}{2}\right\}^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

$$\left\{bc^2 - \frac{a}{b}\right\}^2 = b^2c^4 - 2ac^2 + \frac{a^2}{b^2}$$

$$[1-x]^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$[2a + \tfrac{1}{2}b]^2 = 4a^2 + 2ab + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$[\tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{3}{4}b]^2 = \frac{4a^4}{9} + a^2b + \frac{9b^2}{16}$$

$$[-c^2 + 3b^3c]^2 = c^4 - 6c^2b^3c + 9b^6c^2$$

$$[25]^2 = [20+5]^2 = 20^2 + 2.20.5 + 5^2$$
$$= [400 + 200 + 25] = 625$$

vagy $[25]^2 = [30-5]^2 = 30^2 - 2.30.5 + 5^2$
$= [900 - 300 + 25] = 625.$

2) *Többtagú gyökeret másodhatványra emelni* ép' ezen alak szerint lehet. Ugyanis bárhány tagú legyen, az utolsó előtti tagokat egy tag gyanánt vegyük $= a$, — az utolsót pedig második gyanánt $= b$, — 's emeljük fel a' $\pm a \pm b$ szerint. p. $[x+y+z]^2 = [(x+y)+z]^2$ $= [x+y]^2 + 2[x+y]z + z^2$.

Mellyek kifejtve ezen tagokat adják:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$2(x+y)z = 2xz + 2yz$$
$$z^2 = z^2$$

Mellyből láthatjuk, hogy a' háromtagú gyökér' négylege áll 6 tagból, t. i. mind a' 3 gyökértag' négylegéből, és mind a' 3 gyökértagnak a' rajta kívüliekkeli kettőzött sokszorozmányából. — így

$$(a - x + {}^b/_2)^2 = a^2 + x^2 + \frac{b^2}{4} - 2ax + ab - bx.$$

$$(1 - x + x^2)^2 = 1 + x^2 + x^4 - 2x + 2x^2 - 2x^3$$
$$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

$(999)^2 = (900+99)^2 = (900+90+9)^2 = 810000$
$+ 162000 + 8100 + 16200 + 1620 + 81 = 998001.$

Így a' négytagú gyökér is, p. $(x+y+z+v)^2 = [(x+$
$y+z)+v]^2 = (x+y+z)^2 + 2(x+y+z)v + v^2$

melly kifejtve lesz:

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$2(x+y+z)v = 2xv+2yv+2zv$

$v^2 = v^2$

mellyben, mint láthatni, megvan minden gyökértag' négylege, — és minden gyökértag' kettőzete sokszorozva a' többiekkel.

Így emeltetnek az 5, 6 'sat. tagúak is.

97. §.

B) *Harmad-emelés.*

1) *Kéttagú gyökeret harmad-vagy koczka-hatványra emelni.*

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\times$
$(a+b) = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$

$(-a-b)^3 = (a^2+2ab+b^2).(-a-b)$
$= -a^3-3a^2b-3b^2a-b^3$

$(a-b)^3 = (a^2-2ab+b^2).(a-b)$
$= +a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

$(-a+b)^3 = (a^2-2ab+b^2).(-a+b)$
$= -a^3+3a^2b-3b^2a+b^3$

Ezekből láthatjuk:

1) hogy a' kéttagú gyökér' koczka-hatványa négy tagból áll, u. m. mind a' két gyökértag' koczkájából, — és mind a' két gyökér-tag' négylegének hármazatából sokszorozva a' másik gyökértaggal.

2) ha mind a' két gyökértag + jegyü: akkor a' koczkának mind a' négy tagja +, — ha a' gyökér' mindkét tagja —: a' koczkának is minden tagja —; — ha a' gyökér-tagok ellenkező jegyüek: a' koczka' tagjai váltogatva birnak + és — jeggyel, a' gyökértagok' rendi szerint. p. o.

$(2ax - x^2)^3 = 8a^3x^3 - 12a^2x^3 + 6ax^5 - x^6$

$(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$(3a + {}^1/_2)^3 = 27a^3 + \frac{27a^2}{2} + \frac{9a}{4} + \frac{1}{8}.$

$(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}b)^3 = \frac{8}{27}a^6 + a^4b + \frac{27}{24}a^2b^2 + \frac{27}{64}b^3.$

$(99)^3 = (90+9)^3 = 90^3 + 3.(90)^2.9 + 3.(9)^2.90 + 9^3$
$= 729000 + 218700 + 21870 + 729$
$= 970299$

$(99)^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1$
$= 970299.$

2) *Többtagú gyökeret koczka-hatványra emelni* ép' ezen módon lehet, — a' többtagú mennyiséget kéttagú gyanánt vévén, a' fentebbi módon. p. o.

$(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3$
$= (a+b)^3 + 3(a+b)^2.c + 3c^2(a+b) + c^3$

mellyet ha kifejtünk lesz:

1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
2) $3(a+b)^2c = 3a^2c + 6abc + 3b^2c$
3) $3c^2(a+b) = 3c^2a + 3c^2b.$
4) $c^3 = c^3$

melly 3 gyökértagról emelkedett koczka áll tíz tagból, jelesen: minden gyökértag' koczkájából, — minden gyökértag' négylegének hármazatából sokszorozva minden rajta kívüli gyökértagokkal, — végre mind a' három gyökértag' sokszorozmányából hatszor véve. p. o.

$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x$
$+ 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$

a' 3-nál több tagúak' koczkáját is könnyü lesz a' tanulónak ezek szerint kicsinálni.

98. §.

C) *Akárhányadik hatványra emelés.*

A' két- 's következőleg akárhány-tagú mennyiségek' hatványokra emelésében bizonyos rend uralkodik,

— mellyet néhány fokra emelésekben észrevehetünk, 's bizonyos szabályok alá vonhatunk, — mellyek szerint azután akármelly mennyiséget, akárhányadik hatványra emelhetünk. — T. i.

$[a+b]^2 = a^2+2ab+b^2$
$[a+b]^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$[a+b]^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$[a+b]^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+4ab^4+b^5.$

Ezeknek megtekintéséből e' következő emelési szabályokat vonhatjuk el:

1] A' kéttagú gyökérnek akárhányadik hatványa eggyel több tagból áll, mint a' hány *egy* van a' mutatóban. p. o. $(a+b)^2$ áll **3** tagból, $(a+b)^3$ áll 4-ből, $(a+b)^4$ áll **5**-ből 'sat.

2) a' két szélső tagok egyszerüek, — a' középsők a' két gyökértagok' sokszorozmányai.

3) az első gyökértag' mutatója fogydogál, a' másodiké nöddögél *egy-egy* különbséggel: $(a+b)^6 = a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$.

4) Az együtthatókat a' mutatókból lehet kicsinálni, megjegyezvén hogy az első tag' együtthatója, mindig az egység; — a' többiekét így csináljuk ki a' mutatókból: az első gyökértag' fogydogáló mutatói leíratnak sorba, — azok alá pedig íratnak nevezők gyanánt a' második gyökértag' nöddögélő mutatói, p. o. a' harmadik hatványra nézve: $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$. Már

a' *második tag*' együtthatóját mutatja az első törtszám $= \frac{3}{1} = 3$

a' *harmadikét* mutatja a' két első törtszám' sokszorozmánya $\frac{3.2}{1.2} = \frac{6}{2} = 3.$

a' *negyedikét* mutatja a' három törtszám' sokszorozmánya, t. i. $\frac{3.2.1}{1.2.3} = 1.$

és valóban: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

E' szerint a' hatodik emelésen az együtthatókat kicsinálom így: $\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$

első tagé $= 1$, p. a^6

2-dik tagé $= \frac{6}{1} = 6$, p. $6a^5b$

3-dik tagé $= \frac{6.5}{1.2} = {}^{30}/_{2} = 15$. p. $15a^4b^2$

4-dik tagé $= \frac{6.5.4}{1.2.3} = {}^{120}/_{6} = 20$. p. $20a^3b^3$.

5-dik tagé $= \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = {}^{360}/_{24} = 15$. p. $15a^2b^4$

6-dik tagé $= \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = \frac{720}{120} = 6$. p. $6ab^5$

7-dik tagé $= \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$. p. b^6.

Akárhányadik (n-dik) hatványnak egyetemi képlete tehát ez:

1) *mutatókra nézve:*

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + a^{n-4}b^4 \ldots\ldots + b^n$$

2) *együtthatókkal:*

$$a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \times a^{n-4}b^4$$

's ez mind addig folytatandó, mig a' tagok' száma $n+1$ nem lesz.

HARMADIK CZIKKELY.

Gyökér-vonásról.

99. §.

Betüs egytagú mennyiségbőli gyökérvonást látánk fentebb. (94. §.)

Betüs többtagú mennyiségből négyleg gyökeret fejteni ekként lehet:

Mivel akármelly kéttagú, sőt akármelly többtagú, — de az előadott módon kéttagúnak tekinthető gyökér' négyleghatványa ezekből áll: $a^2+2ab+b^2$: ehez-képest:

1) A' kiadott négyleg' első tagja levén a' gyökér' első tagjának négylege: ebből vonassék □ gyökér (a' 94. §. szerint); ez irassék óldalra, — emeltessék □-re, — 's az első tagból vonassék ki.

2) Mivel a' kiadott négyleg' második tagjában megvan 2ab, vagyis az első gyökértag' kettőzetének a' másodikkali sokszorozmánya: osztassék el ez az első gyökértag' kettőzetével, 's a' hányados lesz a' második gyökértag, — melly tehát illető jegyével az első után irassék.

3) Mivel két gyökértag' négylegében megkell lenni $2ab+b^2$-nek, — t. i. az első gyökértag' kettőzetének sokszorozva a' másodikkal, — és a' második gyökértag' négylegének: tehát ezeket ki kell csinálni, 's a' kiadott négylegből kivonni. Ha ekkor semmi maradék nincs: úgy a' gyökér két tagból áll. — Ha pedig még fenn maradt 3 tag: úgy még 3-dik gyökértagot kell keresni.

4) Mivel a' még fenn levő tagokban meg van mind az első, mind a' második gyökértagnak kettőzete

sokszorozva a' harmadikkal: tehát a' már kijött két gyökértagot nézzük úgy mint egyet $= a$, és azoknak kettőzetével osszuk el a' két következő tagot; — vagy mivel mindenik osztásból ugyanazon hányados fog kijőni, elég lesz csak egyiknek kettőzetével, a' négyleg' valamellyik következő tagját elosztani; 's ekkor kijő a' 3-dik gyökértag, — mellyet most úgy nézünk mint másodikat $= b$. — Ismét a' $2ab + b^2$-t kell kicsinálni, — azaz ezen új gyökértaggal sokszorozni kell mind az első- mind a' 2-dik gyökértagnak kettőzetét, — és ezen új gyökértagot $\square$-re emelni, — 's mind ezeket a' kiadott négylegből kivonni. Ha még ekkor is marad fenn 4 tag: keresni kell 4-dik gyökértagot az előadott módon. — Ha pedig az előbbi esetben 3-nál, itt pedig 4-nél kevesebb tag maradt volna fenn a' kiadott négylegből: akkor, ott ugyan 3-dik, itt pedig 4-dik gyökértagot keresni nem lehet, — hanem ez azt mutatja, hogy a' kiadott négylegnek ép gyökere nincs.

Egyébaránt néha megesik, hogy kevesebb tag láttatik maradni, mint szükséges volna; 's még is lehet fejteni új gyökértagot, mivel több tagok egybe vannak olvadva. p. o.

1) $\sqrt{(x^4 + 2x^2y + y^2 + 2x^2z + 2yz + z^2)} = x^2 + y + z$

$\pm x^4 \quad 2x^2$ $\qquad 2x^2$

0

$\pm 2x^2y \pm y^2 \pm 2x^2z \pm 2yz \pm z^2$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

2) $\sqrt{(y^4 + 4y^3 - 8y + 4)} = y^2 + 2y - 2$

$\pm y^4 \quad 2y^2$

0

$\pm 4y^3 \pm 4y^2$

$0 \quad -4y^2 - 8y + 4$

$+2y^2$

$\mp 4y^2 \mp 8y \pm 4$

$0 \quad 0 \quad 0.$

100. §.

Számjegyes mennyiségből négyleg-gyökeret fejteni.

Erre nézve elsőben is az egyes számok' négylegeire kell figyelmezni, mellyek is ezek:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Innen kitünik, hogy minden egyes szám' négylege, vagy egy-, vagy legfelebb kétjegyü szám lehet, mert a' legnagyobb egyes számnak **9**-nek négylege **81**. — Tovább menvén úgy találjuk, hogy minden kétjegyü gyökér' négylege legalább **3**-, és legfelebb **4** jegyü szám; — mert a' legkisebb kétjegyünek, **10**-nek négylege **100**; a' legnagyobb kétjegyünek **99**-nek pedig **9801**. — Továbbá minden **3** jegyü gyökér' négylege legalább **5**-, legfelebb **6** jegyü; — mert a' legkisebb **3** jegyüé, **100**-é $=1000$, — a' *legnagyobbé*, **999**-é $=998001$, 'sat.

Innen viszont következik, hogy minden egy- vagy kétjegyü négyleg' gyökere egyjegyü; — minden **3**- vagy **4** jegyü négylegé kétjegyü, 'sat.; — szóval a' négyleg vagy épen kétannyi, — vagy kétannyinál eggyel kevesebb jegyből áll mint a' gyökér, mellyről az emelkedett.

Ha tehát a' gyökér-vonás végett feladott négyleg jobbról balra, kétkét-jegyü csapotokra szakgattatik, — a' balról utolsóban egy jegy is lehetvén: a' hány csapat lesz, annyi jegyü a' gyökér. p. **2 96 87 25**-nek gyökere négyjegyü.

A' számjegyes mennnyiségek' négylegei is ép' azon részekből állanak, mellyekből a' betüsökéi, $a^2+2ab+b^2$; de ezen részek itt össze levén olvadva, néz-

zük meg, mellyik rész hol találtatik fel a' leírt számban? Erre nézve vegyünk fel előbb kétjegyü számot. p. $99 = (90+9)$, — ennek négylege így tétetik összve a' szokott részekből:

$$\begin{aligned} 90^2 &= 8100 = a^2 \\ 2.90.9 &= 1620 = 2ab \\ 9^2 &= 81 = b^2 \\ \hline & 9801 \end{aligned}$$

Ha ezen négylegnek $= 9801$, külön részeit figyelemmel megnézzük: úgy találjuk, hogy az első gyökértagnak, — itt tizesnek $(= 90)$ négylegében (8100) a' jelentő jegy a' jobbról harmadik helyen kezdődik, — melly eset mindenkori, mivel a' tizes' négylege mindig két 0-son végződik. — Továbbá az első gyökértag' (itt tizes') kettőzetének, a' 2-dikkali sokszorozmányában (1620) a' legalsó jelentő jegy (2) jobbról a' második helyre esik, — mi nem is lehet különben, mert minden tizesnek már magában is van egy 0-sa, — annyival inkább midőn itt két sokszorozó által is neveltetik. — Végre a' 2-dik gyökértagnak (itt egyesnek) négylegében a' legalsó jegy (1) jobbról első helyre esik, mint magától értetik.

A' felvett 9801 négylegben tehát, — a' 98-ban, megvan az első gyökérjegynek (tizesnek) négylege, és valami az első gyökér' kettőzetének a' 2-dikkali sokszorozmányából, — de a' második tag' négylegéből semmi sincs; — a' 980-ban van az első gyökértag' négylegén kívül, az egész kettőzött sokszorozmány, és még valami a' 2-dik gyökértag' négylegéből is.

Ha továbbá felveszünk három jegyü gyökeret, p. $999 = 900+90+9$: ennek négylege így tétetik összve a' szokott részekből:

$$900^2 = 810000 = a^2$$
$$2.900.90 = 162000 = 2ab.$$
$$90^2 = 8100 = b^2$$
$$2.(900+90).9 = 17820 = 2(a+b)c$$
$$9^2 = 81 = c^2$$
$$998901$$

Itt is látnivaló, hogy ezen 5 részekben, mellyek a' négyleget alkotják, a' legalsó jelentő jegyek, sorba egyegy hellyel jobbra odább odább esnek. Az a^2-nak legalsó jelentő jegye az 5-dik helyen esik, — a' 2ab-jé 4-diken, — a' b^2-jé 3-dikon, — a' $2(a+b)c$-jé a' 2-dikon, — a' c^2-jé az elsőn. — E' szerint könnyen beláthatni, hogy a' 998901 négylegben, a' külön alkotó részek közül mellyik hol kezdődik. — Hogy ugyanezen rend, más akárhánytagú gyökérről emelkedett négylegben is feltalálható, — könnyü általlátni.

101. §.

Ezen előzmények után a' számokbóli négyleggyökér-vonás' szabályai e' következők:

1) A' feladott szám, jobbról kezdve, kétkétjegyü csapatokra osztassék, a' balra utolsóban egy jegy is lehetvén.

2) Az első csapatban megvan a^2, t. i. az első gyökértag' négylege. Ennek kell hát venni legközelebbi □ gyökerét, — azt oldalra írni $= a$, — □ hatványra emelni, — az első csapatból kivonni, — a' maradékot feljegyezni.

3) A' második csapat' első jegyében, a' maradékkal együtt, — megvan 2ab; ezt tehát lehozván a' maradékhoz, el kell osztani 2a-val, t. i. a' már talált első gyökértag' kettőzetével, 's hányadosúl kijő a' b, t. i. a' második gyökérjegy. — Ekkor ki kell csinálni a' 2ab-t, t. i. az előbbi osztót, 2a-t, sokszorozni kell

az új gyökérjeggyel, b-vel, — ezt abból, mi az imént elosztatott, kivonni, — a' maradékot leirni. — Továbbá a' 2-dik csapat' 2-dik jegyében, a' maradékkal együtt, — megvan $b^2 =$ a' 2dik gyökérjegy' négylege; ezt hát abból ki kell vonni. p. o.

$$\begin{array}{r} \\ \sqrt{12|96} = \\ a^2 = 9 \\ \hline 2a = 6 \;|\; 39 \\ 2ab = 36 \\ \hline 36 \\ b^2 = 36 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\,b \\ 36 \end{array}$$

4) Ha 3-dik csapat is van: annak első jegyében a' maradékkal együtt, ismét 2ab (vagy $2(a+b)c$) van meg; — el kell hát azt osztani 2a-val, — de most már a = az addig talált két gyökérjegy, — és így ezeknek kettőzetével kell osztani, 's kijő a' 3-dik gyökérjegy; ezzel sokszorozván az előbbi osztót, lesz 2ab ($= 2(a+b)c$), 's ezt ki kell vonni. — Ezen csapat' 2-dik jegyéből is, a' maradékkal együtt, ki kell vonni b^2-t, vagyis most már sajátlag c^2-t. — Ha még több csapatok is volnának: épen így kell keresni 4-dik, 5-dik 'sat. gyökérjegyet. p. o.

$$\begin{array}{r} \\ \sqrt{18|92|25} = \\ 16 \\ \hline 8 \;|\; 29 \\ \quad\; 24 \\ \hline 52 \\ 9 \\ \hline 86 \;|\; 432 \\ \quad\; 430 \\ \hline 25 \\ 25 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\;b\;c \\ 4\;3\;5 \\ a\;b \end{array}$$

5) Néha megesik, hogy a' gyökérjegy' kettőzete az osztandóban nem találtatik; — illyenkor következő gyökérjegy lesz = 0; 's ezen csapatot egészen lehozván, mint maradékot, (mivel mind a' 2ab, mind a' b^2 = 0, és így az egész csapat fennmarad), által kell menni a' következő csapatra, — 's folytatni a' szokott munkát. p. o.

$$\sqrt{16|48|36} = 406$$

16

8 | 0 48
80 | 483
480

36
36
0

6) Ha egészekből és tizedes törtekből kell □ gyökeret fejteni: úgy szakgattassék el a' szám csapatokra, hogy a' törtszámjegyek külön csapatokat képezzenek, — 's ha belőlök épcsapat nem telik, jobbra 0-sal pótoltassanak; egyébaránt a' gyökévonás a' szokott módon megy; az egészekből egész, — a' törtekből tört gyökér jő ki. p. o.

$\sqrt{5|40,|09|76} = 23,24$

4

4 | 14
12

20
9

46 | 110
92

189
4

464 | 1857
1856

16
16
--

$\sqrt{3169,7}$ vagy

$\sqrt{31|69,|70} = 56,3$

25

10 | 66
60

69
36

112 | 337
336

10
9

1

7) Ha az utolsó csapatból is maradék van: jele hogy nincs ép gyökér; — de lehet közelgetés által törtgyökérjegyeket keresni, ha kétkét 0-sokból új csapatokat teszünk az előbbiek után, — 's a' fentebb előadott módon folytatjuk a' mütételt. — Tudjuk ugyanis, hogy a' szám után tett tizedestört jelentésü 0-sok a' szám' értekét nem változtatják; — azonban tizedrészes gyökérjegy' kedviért kell két 0, — századrészeséért négy 0; mert $\frac{1}{10} = \sqrt{\frac{1}{100}}$, és $\frac{1}{100} = \sqrt{\frac{1}{10000}}$ 'sat. p. o. $\sqrt{15}$, és $\sqrt{1945}$ kikeressük így:

$\sqrt{15,|00|00} = 3,87....$

9	
6	60
	48
	120
	64
76	560
	532
	280
	49
	.....

$\sqrt{19|45,|00|00|00} = 44,102$

16	
8	34
	32
	25
	16
88	90
	88
	20
	1
882	190
8820	19000
	17640
	13600
	4
	.....

102. §.

Betüs többtagú mennyiségből koczka-gyökeret fejteni ekként lehet:

Mivel akármelly kéttagú-, sőt illetőleg többtagú gyökér' koczka-hatványában ezek vannak meg: $\pm a^3 \pm 3a^2b \pm 3b^2a \pm b^3$: ehez képest:

1) A' feladott koczka-hatvány' első tagjából koczka-gyökeret kell vonni (94. §.), — az lesz első gyö-

kértag; — ezt koczka-hatványra emelni, 's az első tagból kivonni.

2) Mivel a' koczka' 2-dik tagja ($3a^2b$) ollyan *sokszorozmány*, *mellynek egyik sokszorozója* $= 3a^2$, t. i. az első gyökértag' négylegének hármazatja, — a' másik sokszorozója pedig $= b$, t. i. a' 2-dik gyökértag: tehát a' koczka' 2-dik tagját el kell osztani a' kijött első gyökértag' négylegének hármazatjával, 's a' hányados lesz $= b =$ 2-dik gyökértag.

3) Ekkor ki kell csinálni ezen 3 tagot: $3a^2b$, $3b^2a$, b^3, t. i. az első gyökértag' negylegének hármazatját sokszorozni a' 2-dik gyökértaggal, — továbbá a' 2-dik gyökértag' négylegének hármazatját sokszorozni az első gyökértaggal, — végre a' 2-dik gyökértagot koczkára emelni, — 's mind ezeket a' kiadott koczkahatványból kivonni. Ha maradék nincs: úgy a' gyökér kéttagú. p. o.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}a^3 - \tfrac{1}{2}a^2b^2 + \tfrac{2}{3}b^4a - \tfrac{8}{27}b^6)} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{2}{3}b^2$$

$$\pm\tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{3}{4}a^2$$

$$\mp\tfrac{1}{2}a^2b \quad \pm\tfrac{2}{3}b^4a \mp\tfrac{8}{27}b^6$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

4) Ha pedig még marad fenn 6 tag (vagy ha azok kevesebb számú tagokba vannak is összetéve): keresni kell 3-dik gyökértagot, olly móddal, hogy a' már kijött két gyökértagot egynek tekintvén $= a$, azoknak négylegök' hármazatjával, — vagyis azok közül csak egy taggal elosztjuk a' kiadott koczkahatvány' következő tagját, 's hányados lesz a' 3-dik gyökértag. — Ekkor ki kell csinálni ezeket: $3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3 = 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + c^3$, — 's ezen hat tagot a' koczkahatványból ki kell vonni 'sat.

példa a' koczka-gyökér' kivonására.

$$\sqrt[3]{(8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6)} = 2x^2 + 4cx - 3c^2.$$

$(2x^2)^3 = 8x^6$

0

$3.(2x^2)^2 = 12x^4$, $48cx^5$-ben

$12x^4 . 4cx = 48cx^5$

0

$60c^2x^4$

$3.(4cx)^2 . 2x^2 = \pm 96c^2x^4$

$-36c^2x^4 \quad -80c^3x^3$

$(4cx)^3 \quad = \pm 64c^3x^3$

$3.(2x^2+4cx)^2 = 12x^4+48cx^3+48c^2x^2 \quad (-36c^2x^4 - 144c^3x^3 - 90c^4x^2)$-ban

$-3c^2.(12x^4+48cx^3+48c^2x^2) = \mp 36c^2x^4 \mp 144c^3x^3 \mp 144c^4x^2$

$0 \quad 0 \quad +54c^4x^2 + 108c^5x$

$3.(-3c^2)^2.(2x^2+4cx) = \pm 54c^4x^2 \pm 108c^5x$

$0 \quad 0 \quad -27c^6$

$(-3c^2)^3 = \mp 27c^6$

0

103. §.

Számjegyes mennyiségből koczka-gyökeret fejteni.

Erre nézve is elsőben az egyes számok' koczka-hatványaira kell figyelmezni, mellyek is ime' táblácskában láthatók.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Innen kitűnik, hogy az egyes szám' koczkája vagy egy-, vagy két-, vagy legfelebb háromjegyü szám lehet, mert a' legnagyobb egyes számnak, **9**-nek koczkája = **729**. — Tovább menvén úgy találjuk, hogy a' kétjegyü gyökér' koczkája legalább **4**-, legfelebb **6**-jegyü, — *mert a' legkisebb kétjegyüé*, **10**-é = **1000**, — a' legnagyobbé, **99**-é = **970299**. — Továbbá a' **3**-jegyü gyökerek' koczkája legalább **7**-, legfelebb **9** jegyből áll.

Innen következik, hogy minden egy-, két-, vagy *háromjegyü koczka-hatvány'* gyökere egyjegyü; — minden négy-, öt-, hat-jegyüé kétjegyü; — minden **7**-, **8**-, **9**-jegyüé **3** jegyü. — Ha tehát a' feladott koczkahatvány, jobbról balfele, három-három-jegyü csapatokra szakgattatik, — a' balra utolsó csapatban két- vagy egy jegy is lehetvén — : a' hány illy csapat lesz, annyi jegyü a' gyökér. p. o.

2 | 368 | 397 | 089-nek gyökere négyjegyü.

A' számjegyes mennyiségek' koczkái is ép' azon részekből állnak, mellyekből a' betüsökéi: $a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$; de ezen részek itt össze levén olvadva, nézzük meg, mellyik hol találtatik fel a' leirt koczkában? Erre nézve vegyünk fel előbb kétjegyü számot,

$99 = (90+9)$; ennek koczkája így tétetik össze a' szokott részekből:

$$\begin{aligned} 90^3 &= 729000 = a^3 \\ 3.90^2.9 &= 218700 = 3a^2b \\ 3.9^2.90 &= 21870 = 3b^2a \\ 9^3 &= 729 = b^3 \\ \hline & 970299. \end{aligned}$$

Ha ezen koczkának $= 970299$ külön részeit figyelemmel megnézzük: úgy találjuk, hogy 90^3-nak legalsó jelentő jegye jobbról 4-dik helyen esik; — $(3.90^2.9)$-é 3-dikon, — $(3.9^2.90)$-é 2-dikon; — 90^3-é az elsőn. — A' felvett 970299 koczka' tagjai közt tehát, — a' 970-ben megvan az első gyökérjegy' (itt tizes') koczkája, és még valami az első gyökérjegy' hármazott négylegének a' 2-dik gyökérjeggyeli sokszorozmányából; — továbbá 9702-ben a' 90^3, és a' $3.90^2.9$; — a' 97029-ben a' $90^3+3.90^2.9+3.9^2.90$ 'sat.

Ha továbbá felveszünk háromjegyü gyökeret. p. o. $999 = 900+90+9$: ennek koczkája így tetetik összse a' szokott részekből:

$$\begin{aligned} 900^3 &= 729000000 = a^3 \\ 3.900^3.90 &= 218700000 = 3a^2b \\ 3.90^2.900 &= 21870000 = 3b^2a \\ 90^3 &= 729000 = b^3 \\ 3.(900+90)^2.9 &= 26462700 = 3(a+b)^2.c \\ 3.9^2.(900+90) &= 240570 = 3c^2(a+b) \\ 9^3 &= 729 = c^3. \\ \hline (900+90+9)^3 &= 997002999 = (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Itt is könnyü belátni, hogy azon hét részek közül, mellyekből a' koczka összetétetik, mindeniknek legalsó jelentő jegye egyegy hellyel alább alább esik; és így

az összeolvadt koczkában is mindeniknek hol kezdődését el lehet találni.

104. §.

Ezen előzmények szerint a' számokbóli koczka-gyökér-vonás' szabályai e' következők:

1) A' feladott koczkahatvány csapatokra szakgattatik, jobbról kezdve, — három jegy levén minden csapatban, — de az utolsóban kettő, vagy egy is lehetvén.

2) Az első csapatban meglevén a^3: abból a-t, t. i. az első gyökérjegyet keressük, vagy annak legközebb kisebb koczka gyökerét vesszük, — azt koczkára emeljük, — 's az első csapatból kivonjuk.

3) A' következő csapat' első jegyében, a' maradékhoz vévén azt, megvan $3a^2b$: és így osszuk el azt $3a^2$-val, t. i. az első gyökérjegy' négylegének hármazatjával, — 's hányados lesz a' b, t. i. a' második gyökértag.

4) Ekkor mielőtt új gyökérjegyet keresnénk, ezeket kell csinálni:

a) az első gyökérjegy' négylegének hármazatját, t. i. a' közelebbi osztót, a' 2-dik gyökérjeggyel sokszorozni $= 3a^2b$, — 's ezt a' 2-dik csapatnak a' maradékhoz csatolt első jegyéből kivonni, — a' maradékot feljegyezni;

b) ezen maradékhoz lehozni a' csapat' 2-dik jegyét, — mellyben meg van $3b^2a$, — t. i. a' 2-dik gyökérjegy' négylegének hármazatja, sokszorozva az első gyökérjeggyel; ezt hát ki kell csinálni, — belőle kivonni, a' maradékot feljegyezni;

c) ezen maradékhoz lehozni a' csapat' 3-dik jegyét, — mellyben megvan b^3, azaz a' 2-dik gyökér-

jegy' koczkája, — ezt hát ki kell csinálni, 's belőle kivonni.

5) Ha még van fenn csapat: keresni kell új gyökérjegyet, az előadott módon, — a' már talált két gyökérjegyet egynek vévén. — T. i. a' következő csapatnak, az előbbi maradékhoz lehozott első jegyében megvan $3(a+b)^2.c$; tehát azt el kell osztani a' megtalált két jegy' négylegének hármazatjával, — 's hányados lesz a' következő gyökérjegy $= c$; — most az új gyökérjeggyel az előbbi osztót sokszorozván, ki kell vonni. — A' maradékhoz lehozván a' csapat' 2-dik jegyét: ebből ki kell vonni $3c^2(a+b)$-t, t. i. a' 3-dik gyökérjegy' négylege' harmazatjának a' két elsőveli sokszorozmányát. — Az itteni maradékhoz lehozván a' csapat' 3-dik jegyét: abból ki kell vonni c^3-t.

6) Ha valamelly osztót nem találunk meg az osztandóban: akkor azon csapat' gyökérjegye $= 0$. Lehozván tehát az egész csapatot, mint maradékot: a' következő csapatra kell általmenni, — 's új gyökérjegyet keresni az előadott módon, — minden eddig kijött gyökérjegyeket egy gyanánt tekintvén.

7) Ha az utolsó csapatból is van maradék: jele hogy nincs ép gyökér; tehát közelgetés által kell keresni tört gyökérjegyeket, három 0-ból új csapatot csinálván, — mivel $^1/_{10} = \sqrt{}\,^1/_{1000}$; $^1/_{100} = \sqrt{}\,^1/_{1000000}$; — 's a' kijött ép gyökértagokat a' következőktől vonással elkülönítvén.

8) Ha egészekből és tizedes törtekből kell koczka-gyökeret vonni: itt is, mint a' négyleg-gyökér' kivonásánál megjegyeztetett, az egészek külön-, a' tört jegyek ismét külön csapatokat képezzenek; 's erre nézve, ha szükség, a' tört jegyek jobbra 0-sokkal pótoltassanak.

8) Az itt előforduló elosztásoknál vigyázni kell, hogy kelletinél kisebb hányadost ne vegyünk; — mellyre nézve inkább kelletinél nagyobbat kisértsünk meg előbb, — különben is a' lejendő ki nem vonhatások által útba fogunk igazíttatni. p. o.

$$\text{I, } \sqrt[3]{103|823} = \overset{ab}{47}$$

$$a^3 = 64$$

$$3a^2 = 48 \mid 398$$

$$3a^2b = 336$$

$$622$$

$$3b^2a = 588$$

$$343$$

$$b^3 = 343$$

$$0$$

$$\text{II, } \sqrt[3]{9|528|128} = \overset{abc}{212}$$

$$a^3 = 8$$

$$3a^2 = 12 \mid 15$$

$$3a^2b = 12$$

$$32$$

$$3b^2a = 6$$

$$268$$

$$b^3 = 1$$

$$3(a+b)^2 = 1323 \mid 2671$$

$$3(a+b)^2 \cdot c = 2646$$

$$252$$

$$3c^2(a+b) = 252$$

$$0\ 8$$

$$c^3 = 8$$

$$0$$

III, $\sqrt[3]{8|365|427} = 203$

8

12 | 03

1200 | 3654

3600

542

540

27

27

0

IV, $\sqrt[3]{25}$

vagy

$\sqrt[3]{25{,}000000\ldots} = 2{,}92\ldots$

8

12 | 170

108

620

486

1340

729

2523 | 6110

5046

10640

348

102920

8

102912....

NEGYEDIK CZIKKELY.

Gyökér-mennyiségek-, 's azok körülti mütételekről.

105. §.

Minden gyökérjeggyel illetett mennyiségek egyetemben neveztetnek ugyan *gyökérmennyiségek*-nek; azonban különösen azokat szokták ezen nevezet alatt érteni, mellyeknek gyökerét teljesen kivonni nem lehet. p. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[4]{5c}$ 'sat.

Egymutatójú gyökérmennyiségek azok, mellyeknek gyökérjegyük ugyanazon mutatóval bir; — ellenkező esetben *különmutatójuak*. p. $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab^3}$, $\sqrt{7y}$ egymutatójuak, — $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{a}$ különmutatójuak.

Tudjuk hogy a' gyökérmennyiségeket gyökérjegy nélkül is lehet irni, mint törtszám-mutatójú hatványokat; a' gyökérjegybeni mutatót, a' hatvány-mutatónak aláirván nevező gyanánt. (lásd 94. §.) p. o. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, hol az m, és n bármelly számot jelenthetnek; így $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{ab^3} = a^{\frac{1}{3}}b$; $\sqrt[4]{(a^2 - x^3)} = (a^2 - x^3)^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2 - x^3}} = \sqrt[3]{a(a^2 - x^3)^{-1}} = a^{\frac{1}{3}}(a^2 - x^3)^{\frac{-1}{3}}$.

Viszont a' törtszám-mutatóju hatvány gyökérmennyiség-alakban irathatik, — ha gyökérjegy tétetvén eleibe, abba iratik gyökérmutatóul az előbb törtszám-hatványjegy' nevezője, — számlálója pedig ott marad hatványmutató gyanánt. p. o. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{b^2c}$; $(a^2 - x^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^2 - x^3)}$.

Innen foly, hogy ha mind a' gyökér', mind a' hat-

vány' mutatója ugyanazon számmal sokszoroztatik vagy elosztatik, — a' mennyiség nem változik, — mert itt a' törtszámi számlálón 's nevezőn történik ezen változtatás. p. o. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, t. i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. — így $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}$, mert $= a^{\frac{m:p}{n:p}}$; — így $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; — $\sqrt{ab^3} = \sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{1}{3}}b}$; — $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{a}}$; így $\sqrt[6]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$. Honnan láthatni, hogy valamelly számból negyedik gyökeret lehet vonni, ha előbb vonunk másodikat, — abból ismét másodikat. Hasonlólag 6-dik gyökeret vonhatunk úgy, — ha a' 3-dik gyökérből 2-dikat, — vagy a' 2-dikból 3-dikat vonunk.

Némelly gyökérmennyiségeknél a' gyökérjegy alatt levő számok 's betük közül némellyikből teljes gyökeret lehet vonni, — 's azok a' gyökérjegy eleibe tétetnek (94 §.) p. o. $\sqrt[m]{a^m bc^{2m}} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{2m}{m}} = ac^2\sqrt[m]{b}$ — így $\sqrt[3]{8a^2b^3} = 2b\sqrt[3]{a^2}$.

példák:

I, $\sqrt[3]{16a^4b} = \sqrt[3]{2 . 8 . a^3 . a . b} = 2a\sqrt[3]{2ab}$.

II, $3\sqrt{8a^3b^5} = 3\sqrt{2 . 4 . a^2 . a . b^4 . b} = 6ab^2\sqrt{2ab}$.

III, $2\sqrt{(a^2x^2 - x^4)} = 2\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

IV, $\sqrt{(3a^2c + 6abc + 3b^2c)} = \sqrt{3c(a^2 + 2ab + b^2)} = (a + b)\sqrt{3c}$

Illynemü változtatás által gyakran a' különfajta tagok egyfajtákká, 's egymással összeadhatókká lesznek. p. o. $3\sqrt{8a^2b}$ és $4\sqrt{18a^2b}$ most különfajták; — de miután a' $3\sqrt{8a^2b}$-ből lesz $= 3\sqrt{2 . 4 . a^2 . b} = 6a\sqrt{2b}$; — és $4\sqrt{18a^2b}$-ből $= 4\sqrt{. 9 . 2 . a^2 . b} = 12a\sqrt{2b}$: ezek már egyfajták, 's összevéve $= 18a\sqrt{2b}$.

Viszont a' gyökérjegyen kívül levő számot vagy betüt, gyökérjegy alá lehet vinni: emelvén azt ollyan hatványra, millyet kiván a' gyökér' mutatója, 's ezzel a' gyökérjegy alatti többi számokat vagy betüket sokszorozván. p. $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$; $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$; — $3a\sqrt{2a} = \sqrt{18a^3}$; — $2\sqrt[3]{(a^2-x^2)} = \sqrt[3]{(8a^2-8x^2)}$; $(a-x).\sqrt{(a+x)} = \sqrt{(a-x)^2}.(a+x)$. — Illy móddal lehet gyakran kitüntetni, több gyökérmennyiségek közül melyikeknek legyen kisebb vagy nagyobb értéke. p. o. $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$, mert $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$; és $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

A' különmutatóju gyökérmennyiségeket egy mutatóra lehet vinni, értékük változása nélkül, — ha előbb törtmutatójú hatvány-alakra vívén azokat, — a' törtmutatókat egynevezőre visszük, — 's ekkor ismét a' törtmutató helyett gyökérjegyet teszünk. p. o.

I, $\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$

II, $\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$

III, $\begin{cases} \sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{3m}{3mn}} b^{\frac{3m}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{3m} b^{3m}} \\ \sqrt[3]{a^n c} = a^{\frac{n}{3}} c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{nnm}{3mn}} b^{\frac{nm}{3nm}} = \sqrt[3mn]{a^{nnm} b^{nm}} \\ \sqrt[m]{a^3} = a^{\frac{3}{m}} = a^{\frac{9n}{3mn}} = \sqrt[3nm]{a^{9n}}. \end{cases}$

Ezen egy mutatóra vivés által is ki lehet tüntetni, mellyik legyen több gyökérmennyiségek közül kisebb-nagyobb értekü. p. $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$, mert: $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, és $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$.

106. §.

A' gyökérmennyiségek' *összeadása*, — avvagy *kivonása végett*, összekötjük azokat az összeadás'-, vagy kivonás' jegyével, — 's a' netalán létező egyfajta tagokat összefogjuk; — 's gyakran, az előbbi §-ban előadott módon, a' különfajta tagokat előbb egyfajtákká tesszük.

példák:

I, $7\sqrt{8}+5\sqrt{8}=12\sqrt{8}=12\sqrt{2.4}=24\sqrt{2}$

II, $\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

III, $\sqrt[3]{16a^3b}+\sqrt{4a^2b}-\sqrt{a^2b}-\sqrt[3]{54a^3b}=2a\sqrt[3]{2b}$
$+2a\sqrt{b}-a\sqrt{b}-3a\sqrt[3]{2b}=a\sqrt{b}-a\sqrt[3]{2b}$

IV, $2\sqrt{(16\sqrt{18})}-\sqrt{(12\sqrt{2})}=2\sqrt{(16.3\sqrt{2})}$
$-\sqrt{(4.3\sqrt{2})}=8\sqrt{(3\sqrt{2})}-2\sqrt{(3\sqrt{2})}$
$=6\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{\sqrt{18}}=6\sqrt[4]{18}.$

V, $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=3\sqrt[3]{8(1+}$
$2\sqrt{5})-2\sqrt[3]{1+\sqrt{4.5}}=6\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$
$-2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5}.)}$

107. §.

A' gyökérmennyiségeket egymással *sokszorozandók:* egymutatójuakká tesszük azokat, — aztán sokszorozzuk a' gyökérjegy előtti sokszorozókat is egymással, — a' jegy utániakat is egymással. Ugyan is:

$$a\sqrt[m]{b}\times c\sqrt[n]{d}=ab^{\frac{1}{m}}.cd^{\frac{1}{n}}=acb^{\frac{1}{m}}d^{\frac{1}{n}}=acb^{\frac{1}{m}}d^{\frac{1}{n}}=acb^{\frac{n}{mn}}d^{\frac{m}{mn}}$$
$$=ac\sqrt[mn]{b^n d^m}.$$

példák:

I, $3\sqrt{6}\times 4\sqrt{2}=12\sqrt{12}=24\sqrt{3}$

II, $5\sqrt[3]{3}\times\sqrt{6}=5\sqrt[6]{9}.\sqrt[6]{216}=5\sqrt[6]{1944}.$

III, $\sqrt[4]{20} \times 6\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{20}} . 6\sqrt{3} = \sqrt{(2\sqrt{5})} . 6\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{(6\sqrt{5})}.$

IV, $3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})} \times 2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})} = 6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})}.$
$= 6\sqrt{10} . 10 = 6 . 10 = 60.$

Így megy a' mütétel akkor is, ha a' sokszorozók többtagúak:

V, $2\sqrt{3} \times (6 - \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}.$

VI, $a\sqrt{bc} \times (3\sqrt{ab} - \sqrt{c}) = 3a\sqrt{ab^2c} - a\sqrt{bc^2}$
$= 3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}.$

VII, $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{ab}$
$- \sqrt{b^2} = a - b.$

108. §.

A' gyökérmennyiségek' *elosztásánál*, azok egymutatóra vitetnek, — az osztó az osztandónak aláiratik törtszám alakban, — 's lehetőleg rövidíttetik. p. o.

I, $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{12/3} = \sqrt{4} = 2.$

II, $(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{72/8}$
$- \sqrt{32/8} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$

III, $2\sqrt{6} : 3\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[6]{6^3} : 3\sqrt[6]{9^2} = 2\sqrt[6]{216} : 3\sqrt[6]{81}$
$= \frac{2\sqrt[6]{216}}{3\sqrt[6]{81}} = 2/3\sqrt[6]{216/81} = 2/3\sqrt[6]{8/3}.$

IV, $\sqrt{(a^2 - x^2)} : \sqrt{(a+x)^2} = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}} =$
$\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{(a+x)^2}} = \sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)(a+x)}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$

V, $9 : \sqrt[3]{6} = \frac{9}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{729/6} = \sqrt[3]{243/2} =$
$\sqrt[3]{\frac{243 . 4}{2 . 4}} = \sqrt[3]{972/8} = \sqrt[3]{27/8} . 36 = 3/2\sqrt[3]{36}.$

Ha a' *nevező* kéttagú, és csupán négyleg gyökerek jőnek elő: a' nevező' egyik tagjának jegyét ellenkezőre változtatván, sokszoroztassék az egész nevezővel mind a' számláló, mind a' nevező.

VI, $\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} = \frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})} = \frac{b\sqrt{a}-b\sqrt{x}}{a-x.}$

VII, $\frac{8}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}).\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$

$= \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{3-\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$= \frac{24\sqrt{(3-\sqrt{5})}+8\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}{9-5}$

$= 6\sqrt{(3-\sqrt{5})}+2\sqrt{(15-5\sqrt{5})}.$

VIII, $\frac{3+\sqrt{7}}{4-\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{7})(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}$

$= \frac{12+3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10.}$

Ha a' nevező háromtagú: úgy abban két tag' jegye változtassék ellenkezőre, — 's úgy bánjunk vele mint az imént. — Sőt ezen szabályt több tagú nevezőkre is alkalmazhatni.

109. §.

Hatványra emeltetnek a' gyökérmennyiségek, ha a' gyökérjegynek mind előtte, mind utána álló mennyiségek' mutatói a' kiadott mutatóval sokszoroztatnak. p.

$(a\sqrt[m]{b})^n = a^n\sqrt[m]{b^n}$, mert $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n = a^n b^{\frac{n}{m}} = a^n\sqrt[m]{b^n}$. így:

$(3\sqrt[3]{2b})^2 = 9\sqrt[3]{4b^2}$; $(\sqrt{3a^2})^3 = \sqrt{27a^6}$;

$[3\sqrt{(a^2-x^2)}]^3 = 27\sqrt{(a^2-x^2)^3}$

$= 27\sqrt{(a^2-x^2)^2}.(a^2-x^2) = 27.(a^2-x^2).(a^2-x^2)$

Ha a' hatványmutató egyenlő a' gyökérmutatóval: akkor az emelés csupán a' gyökérjegy' elhagyása által történik. És így a' gyökérjegyen kívül levő mennyisé-

gek emeltetnek, — az az alattiak pedig csak a' gyökérjegytől fosztatnak meg. p. $(\sqrt[m]{a})^m = a$, — mert $(\sqrt[m]{a})^m = (a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$. így

$$(a\sqrt[m]{b})^m = a^m \sqrt[m]{b^m} = a^m b.$$

$$(4\sqrt[3]{2})^3 = 64 . 2 = 128; \quad (a\sqrt{b})^2 = a^2 b.$$

Gyökérmennyiségből másik gyökér vonatik, ha a' gyökérjegynek mind előtte mind utána levő mennyiségekből vonatik gyökér; mi hogy könnyebben történjék: a' gyökérjegyen kívül levő betűk annak előbb alá vitetnek (105. §.) — Egyébaránt gyökérmennyiségből gyökeret vonandók, a' vólt gyökérmutatót az új gyökérmutatóval sokszorozzuk. p. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$; így: $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$; mert $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2.3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. így:

$$\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[m]{a^n b^{\frac{n}{n}}} = a^{\frac{n}{nm}} b^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[mn]{a^n b}.$$

$$\sqrt{(2\sqrt[3]{120})} = \sqrt{\sqrt[3]{960}} = \sqrt[6]{960} = \sqrt[6]{64 . 15}$$

$$= 2\sqrt[6]{15} = 2\sqrt{\sqrt[3]{15}}.$$

NEGYEDIK SZAKASZ.

Egyenletek, — 's ezeknek algebrai feladatokra alkalmazása.

ELSŐ CZIKKELY.

Az egyenletekről, 's azoknak feloldásáról.

110. §.

Az eddig előadottakból kitünik, hogy egy ugyanazon mennyiség különféle alakban kifejeztethetik. P. o. ezen szám: 12, kifejeztethetik: 1) *összeadás* által: $3+7+2=12$; — 2) *kivonás* által: $16-4=12$; — 3) *sokszorozás* által: $3\times4=12$; — 4) *elosztás* által: $36:3=12$; — 5) *hatvány* által: $2^2+2^3=12$; — 6) *gyökér* által: $\sqrt{16}+\sqrt{64}=12$. — Látnivaló hogy mind ezen különféle, és még számtalan lehető kifejezések, egy és ugyanazon mennyiséget jelentik. Ha ezek közül kettő, egyenlőség' jegyével összeköttetik: azon kifejezést nevezzük *egyenlet*-nek. p. o.

$$3+7+2=16-4$$
$$3+4=36:3$$
$$2^2+2^3=\sqrt{16}+\sqrt{64}.$$

És az egyenlet *algebrai*-vá lesz: ha ezen számok közül legalább egy ismeretlen. p. o.

$$3+x+2=16-4$$
$$3\times4=x:3$$
$$2^2+2^3=\sqrt{16}+\sqrt{x}.$$

Minden egyenlet két *rész*-ből áll, — elválasztva az egyenlőség' jegyével, — mellyek közül akármellyik álljon a' jegytől jobbra vagy balra, mindegy. — Mindenik rész pedig állhat több kevesebb tagokból. p. o. $A = B$, itt az egyenlet' egyik része A, másik B; de ezen egyenlet'

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots$$
$$= \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 \ldots\ldots$$

mindkét része számtalan tagokból áll.

Ha az ismeretlen mennyiség első emelésen áll: úgy az egyenlet *egyszerü* vagy *első rendü*, p. o. $x + ax + bx = A$. — Ha pedig az ismeretlen második-, harmadik-, negyedik- 'sat. emelésen áll: az egyenlet *felsőbb*-, t. i. *második*-, *harmadik*-, *negyedik*- 'sat. *rendü*. p. o.

$x^2 - ax = A$, második-
$x^3 - x^2 + c = B$, harmadik-
$x^4 - x^2 + ax = C$, negyedik-rendü, a' rend' elnevezése a' legnagyobb emeléstől vétetvén.

A' *felsőbb rendü* egyenletek kétfélék, u. m. 1) *tiszták*, ha az ismeretlen csak egyféle magasb emelésen jő elő; — 2) *vegyesek*, ha az ismeretlen többféle emelésen fordul elő. p. o. $x^3 - 2x^3 = A$, *tiszta harmad-rendü*-, — $x^2 + ax = B$, *vegyes másod-rendü egyenlet.*

A' hány ismeretlen van az egyenletben: annyi *ismeretlenünek* neveztetik. p. o.

$x^5 - x^2 + ax = D$, *egyismeretlenü*
$x + y = a - b$, *kétismeretlenü*
$x + y + z = c$, *háromismeretlenü.*

111. §.

Az egyenlet' részeit sokkép' lehet változtatni, a' nélkül hogy egyenlőségök felbomlanék. És mind azon változtatások, az egyenlőséget illető, fentebb előadott alaptételeken épülnek. Jelesen:

1) *Ha egyenlőkhöz epyenlők adatnak, vagy egyenlőkből egyenlők vonatnak ki: az egyenlőség nem változik.* Ezen épülnek e' következők:

a) ha az egyenlet' mindenik részében ugyanazon tag, ugyanazon jeggyel fordul elő: azt mindenik részből ki lehet hagyni. p. o. $10+5=8+5+2$, kihagyván mindkét részből az 5-öt, lesz $10=8+2$, így $a+b=c+b$, kihagyván a' b-t, lesz: $a=c$; így $10-2=6+4-2$ lesz: $10=6+4$.

b) az egyenlet' egyik részéből a' másikba akármelly tagot által lehet vinni ellenkezőre változtatott jeggyel. Mert ha + jegyü tagot egyik résztől elveszek: azt annyival kevesítem; tehát a' másik részt is ugyanannyival kell kevesítnem, — azaz ugyanazon tagot — jeggyel oda tennem. — p. o. $20=15+5$ lesz: $20-5=15$. — Ha pedig — jegyü tagot veszek el eggyik résztől: azt annyival növesztem; tehát a' másik részt is ugyanannyival kell növesztenem, — azaz ugyanazon tagot + jeggyel általvinnem. p. o. $20=25-5$ lesz $=20+5=25$.

Ha az egyenlet' egyik részéből minden tagot által viszünk a' másikba változtatott jeggyel: ez által az egyik részben 0 lesz; vagyis ez által az egyenletet 0-ra visszük. p. o.

$$ax^3+bx^2+cx=a^2+b^2-c$$

lesz: $ax^3-bx^2+cx-a^2-b^2+c=0$.

c) két egyenletet egymással össze lehet adni. p. o.

$$12+3=20-5$$
$$15-9=2+4$$

összeadva: $12+3+15-9=20-5+2+4$

$=21$ $=21$

d) két egyenletet egymásból ki lehet vonni. p. o.

$$12+3=20-5$$
$$\pm 15\mp 9= \quad 2\pm 4$$

kivonva: $12+3-15+9=20-5-2-4$

$$= \quad 9 \quad = \quad 9$$

2) *Ha egyenlők egyenlőkkel sokszoroztatnak, vagy elosztatnak: az egyenlőség nem változik.* Ezen épülnek e' következők:

a) lehet az egyenlet' mindkét részét (vagy kapocsba zárva, vagy minden tagjait különvéve) ugyanazon mennyiséggel akár sokszorozni, akár elosztani. p. o. $2+3=5$, sokszorozva 4-el lesz: $(2+3).4=5.4$, vagy: $2.4+3.4=5.4$; így $20-4=12+4$, elosztva 4-el $=\frac{20-4}{4}=\frac{12+4}{4}$, vagy: $^{20}/_{4}-{}^{4}/_{4}={}^{12}/_{4}+{}^{4}/_{4}$; így: $an+bn=3xn-cn$ elosztva n-el lesz: $a+b=3x-c$; — és $a+b=c-d$, sokszorozva b-vel lesz: $(a+b)b=(c-d)b$, vagy: $ab+b^2=bc-bd$.

b) ha minden tagnak ugyanazon osztója van: azt mind alól elhagyhatom, = mert ez által minden tag, — és így az egyenlet' mindkét része ugyanannyiszorta nagyobbá tétetik. p. o. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{d}{b}$, lesz: $a+c=d$; így: $\frac{8+2}{5}=\frac{15-5}{5}$ lesz: $8+2=15-5$.

c) ha az egyenlet' valamellyik része sokszorozókkal van kifejezve: egyik, akármellyik sokszorozót általvihetem a' másik részbe osztás' jegyével. Mert midőn az egyenlet' egyik részéből a' sokszorozó elhagyatik: az által azon rész annyiszorta kevesittetik, vagyis annyival osztatik el, — és így a' másik részt is ugyanazzal el kell osztani. p. o. $3\times 4=20-8$, lesz $4=\frac{20-8}{3}$, v. $3=\frac{20-8}{4}$; így: $ab=c-d$, lesz: $a=$

$\frac{c-d}{b}$, vagy: $b=\frac{c-d}{a}$. Erre nézve gyakran az egyenlet' valamellyik része sokszorozókra ki is szokott fejtetni. p. o.

$$x^2a^2-x^2b^2=a^2+2ab+b^2$$
$$=x[a^2-b^2]=[a+b]^2$$
$$=x^2=\frac{[a+b]^2}{a^2-b^2},\ v.\ x^2=\frac{[a+b].[a+b]}{[a+b].[a-b]}$$
$$=x^2=\frac{a+b}{a-b.}$$

d) ha valamelly tag' együtthatója elhagyatik: ez által az annyiszorta kevesíttetik, vagyis az által elosztatik; és így a' többi minden tagokat is ugyanazzal el kell osztani. p. o. $3x=a+b$, lesz: $x=\frac{a+b}{3}$; így: $ax-a^2+b=A$, lesz: $x-a+\frac{b}{a}=\frac{A}{a.}$

e) ha valamelly törtszám-tag' nevezője elhagyatik: ez által az annyiszorta nagyobbá lesz, vagy is annyival sokszoroztatik; — és így a' többi tagokat is ugyanazzal sokszorozni kell. Így lehet az egyenletből a' törteket kiirtani. p. o. $^{12}/_3+2=6$, lesz: $12+2.3=6.3$; így $\frac{a}{b}=c$, lesz: $a=bc$; így: $\frac{x}{4}-\frac{a}{3}+{}^1/_2=A$,

lesz: $x-\frac{4a}{3}+{}^4/_2=4A$

$$=3x-4a+{}^{12}/_2=12A$$
$$=6x-8a+12=24A$$

vagy: $3x-4a+6=12A$

f) ha az egyenlet' minden tagjai — 1-el sokszoroztatnak, vagy elosztatnak: ez által az egyenlőség nem változik; azonban a' tagok ugyanazok maradnak, de jegyeik ellenkezőkké lesznek. — Innen ha az egyen-

let' minden tagjai ellenkező jegyüekké válnak: az egyenlőség megmarad. p. o.

$$12-3=15-6$$
$$\times \text{ vagy } :-1$$
$$=-12+3=-15+6$$

g) ha az egyenlet' mindenik részét ugyanazon hatványra emeljük: az egyenlőség nem változik, — mert ez annyit tesz, hogy mindenik részt magát magával ugyanannyiszor sokszorozzuk. Innen látnivaló, hogy a' tagokat külön véve emelni nem jó volna, — hanem az egész részt együtt véve. p. o.

$2+3=8-3$, lesz: $[2+3]^2=[8-3]^2$;

így: $\sqrt{25}=8-3$, lesz: $25=[8-3]^2$. —

Az emelést ott használjuk, mint e' példa mutatja, hol valamelly tagot gyökérjegyétől akarunk megszabadítni. $\sqrt{x}=a-b$, lesz: $x=[a-b]^2$.

h) ha az egyenlet' mindenik részéből ugyanazon gyökeret vonjuk: az egyenlőség nem változik; mert ez annyit tesz, mintha mindenik részt ugyanazon mennyiséggel, t. i. a' gyökérrel ugyanannyi izben elosztanánk.

p. o. $64=42+22$, lesz:

$$\sqrt{64}=\sqrt{42+22}.$$

A' gyökérvonást ott használjuk, hol a' hatványjegyet akarjuk elenyésztetni. p. o. $8^2=64$, lesz: $8=\sqrt{64}$;

$2^3=8$, lesz: $2=\sqrt[3]{8}$; így $x^m=A$, lesz; $x=\sqrt[m]{a}$.

112. §.

Az egyenlet' *feloldása* nem egyéb, mint abból az ismeretlen mennyiség' értekének kifejtése. Ezen kifejtés pedig abban áll, hogy az egyenlet, az előbbi §-ban előadott módokon, mind addig változtatik, mig végre annak egyik részében maga az ismeretlen, tisztán, minden hatvány- 's gyökérjegy-, együttható-, nevező

nélkül, +jeggyel álljon; — az egyenlet' másik részében pedig csupán ismert mennyiségek legyenek. — És az egyenletek' egyedüli czélja az, hogy az ismeretlen', vagy ismeretlenek' értekét megtaláljuk.

Mint említők, az egyenleteket 0-ra lehet vinni az által, ha egyik rész' tagjait változtatott jegyekkel, a' másik részbe tesszük, — 's az illyen 0-ra vitt, egyismeretlenü egyenlet' képviselője lehet ez: $x^n \pm A = 0$, hol x^n bármilly emelésü, 's bárhány, x-el összekötött tagot képviselhet; $\pm A$ pedig magában foglalja mind azon tagokat, mellyekben csak ismert mennyiségek jőnek elő, bármelly alakban, 's bármilly jegyüek legyenek. — Ha több egyenletek 0-ra vitetnek: akkor azok egyenlők, 's egymás helyett tetethetők, mert ha $A = 0$, és $B = 0$: természetesen $A = B$.

Lássuk a' különnemü egyenletek' feloldását.

I, *Első rendü egyismeretlenü egyenletek' feloldása.* — Erre nézve ezeket tesszük.

1) a' nevezőket, ha vannak, kiirtjuk, sokszorozván velők minden többi tagokat.

2) az ismeretlent magokban foglaló tagokat mind, az egyenlet' egyik részébe, — a' csupa ismerteket pedig másik részébe tesszük, változtatott jegyekkel.

3) az egyfajta tagokat, ha vannak; összefogjuk.

4) ha több tagokban jő elő az ismeretlen: az azon tagok által kifejezett mennyiséget sokszorozókra szakgatjuk, úgy hogy az ismeretlen legyen egyik sokszorozó.

5) az ismeretlent sokszorozó-társától, vagy együtthatójától megszabadítjuk, elosztván azzal az egyenlet' másik részét.

6) ha az ismeretlen' jegye — volna: az egyenlet' minden tagjait ellenkező jegyüekké tesszük.

7) végre a' betük helyett azoknak számi értékö-ket tesszük; 's megvi'sgáljuk ha e' szerint az egyenlet' két részei valósággal egyenlők-e.

Példák:

I, $3x+2a-4b=g$

$3x=g-2a+4b$

$x=\frac{g-2a+4b}{3}$

legyen $g=10$, $a=5$, $b=3$, lesz:

$x=\frac{10-10+12}{3}=\frac{12}{3}=4$

és valóban: $\begin{cases} 3x+2a-4b=g \\ 3.4+2.5-4.3=10. \end{cases}$

II, $ab+\frac{c}{x}=d$

$\frac{c}{x}=d-ab$

$c=(d-ab)x$

$\frac{c}{d-ab}=x$, vagy: $x=\frac{c}{d-ab}$.

III, $\sqrt{ax}=b+c$

$ax=(b+c)^2$

$x=\frac{(b+c)^2}{a}$

IV, $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-a=\frac{3}{4}x-\frac{b}{a}$

$x+\frac{4x}{3}-2a=\frac{6}{4}x-\frac{2b}{a}$

$3x+4x-6a=\frac{18}{4}x-\frac{6b}{a}$

$12x+16x-24a=18x-\frac{24b}{a}$

$$12ax + 16ax - 24a^2 = 18ax - 24b$$
$$12ax + 16ax - 18ax = 24a^2 - 24b$$
$$28ax - 18ax = 24(a^2 - b)$$
$$x(28a - 18a) = 24(a^2 - b)$$
$$x = \frac{24(a^2 - b)}{10a.}$$

V, $ab + x = 2c + 3x$
$$x - 3x = 2c - ab$$
$$-2x = 2c - ab$$
$$-x = \frac{2c - ab}{2}$$
$$x = \frac{ab - 2c}{2}$$

VI, $ax + bc = dc + x$
$$ax - x = dc - bc$$
$$x(a - 1) = dc - bc$$
$$x = \frac{dc - bc}{a - 1}$$

VII, $a^2 - x^2 = \frac{ab + bx}{c}$
$$(a + x).(a - x) = \frac{b(a + x)}{c}$$

az egyenlet' mindkét részét elosztván $(a + x)$-el:

$$a - x = \frac{b}{c}$$
$$-x = \frac{b}{c} - a$$
$$x = a - \frac{b}{c}.$$

113. §.

II, *Első rendü-, több ismeretlenü egyenletek' feloldása.*

Könnyü belátni, hogy egy egyenletből csupán egy ismeretlen' értekét lehet kifejteni 's meghatározni. Mert ha egy egyenletben két vagy több ismeretlen van: bárminő változtatásokkal azt el nem érhetjük, hogy az egyik részben egy ismeretlen, — a' másikban pedig csupán ismertek legyenek. p. o.

$$x + y = a$$

innen: $x = a - y$

és: $y = a - x$.

Valamint azt is által fogjuk látni, hogy 3 ismeretlent 2 egyenletből, — 4-et 3-ból 'sat. ki nem lehet fejteni: a' honnan szükség, hogy a' hány az ismeretlen, annyi külön egyenlet legyen. — Azonban hogy minden külön egyenletben, minden külön ismeretlen előforduljon, nem szükség.

A' feloldásra nézve oda dolgozunk, hogy előbb egyen kívül a' többi ismeretleneket kiirtsuk, 's mindeniknek kiirtásával egyegy egyenlettel kevesebb legyen, — mig végre csupán egy ismeretlen lesz, egy egyenletben, mellyet a' szokott módon meghatározhatunk. — Ekkor ennek már meghatározott értéke' segitségével, a' másikat, 's igy tovább kifejthetjük.

Az ismeretlen' vagy ismeretlenek' kiirtásának több módjai vannak, u. m.

1) *hellyette-tétel*, melly szerint az első egyenletből egy ismeretlen (x) meghatároztatván, — olly móddal, hogy kifejezetében a' többi ismeretlenek befoglaltatnak —, ennek értéke a' 2-dik egyenletben az x helyett tétetik, — melly szerint már eggyel kevesebb ismeretlen, 's egyenlet lesz. Ekkor a' 2-dik egyenletből ismét egy másik ismeretlen (y) meghatároztatik, — 's annak értéke a' következő egyenletben az y helyett tétetik, — mi által már két ismeretlennel, 's egyenlettel

lesz kevesebb; — így tovább, mig végre egy ismeretlen lesz, egy egyenlettel. p. o.

$$\begin{aligned} &\text{I}, \quad x+y+z=a \\ &\text{II}, \quad x-y+2z=b \\ &\text{III}, \quad x+2y-z=c. \end{aligned}$$

az I-ből: x' értéke $= a-y-z$. IV; ezt a' II-dikban az x helyett tévén, lesz:

$$a-y-z-y+2z=b$$

vagy: $a-2y+z=b$

's ebből y' értéke $= a+z-b=2y$

vagy $y=\frac{a+z-b}{2}$, V.

és a' IV-ből: $x=a-\frac{a+z-b}{2}, -z$

vagy: $x=\frac{2a-a-z+b-2z}{2}=\frac{a-3z+b}{2}$, VI.

már mind az x-nek VI, mind az y-nak V. alatti értékét a' III-dik egyenletben helyette tévén,

lesz: $\frac{a+b-3z}{2}+\frac{2(a+z-b)}{2}-z=c$

vagy: $\frac{a+b-3z+2a+2z-2b-2z}{2}=c.$

vagy: $3a-b-3z=2c$

vagy: $3z+b-3a=-2c$

és: $3z=3a-2c-b$

végre: $z=\frac{3a-2c-b}{3}$

Ha már most a' z' meghatározott értekét az V- és VI-dik egyenletben helyette tesszük: mind a' 3 ismeretlen' értéke meghatároztatik.

2) *összetétel*, melly szerint két egyenletből valamellyik ismeretlen' értéke kifejeztetvén, ezen két kife-

jezetek, mivel egyenlők, új egyenletbe összeköttetnek, mellyből már amaz ismeretlen kimaradt. p. o.

$$\begin{array}{l|l} 3x+5y=a & x=\dfrac{a-5y}{3} \\ 10x-2y=b & \\ & x=\dfrac{b+2y}{10} \end{array}$$

$$\frac{a-5y}{3}=\frac{b+2y}{10}$$

$$10a-50y=3b+6y$$

$$10a-3b=50y+6y$$

$$y=\frac{10a-3b}{56}$$

$$x=\frac{b}{10}+\frac{2(10a-3b)}{560}$$

3) gyakran két egyenletek' *összeadása*, vagy egymásbóli *kivonása* által is kiirtatik egyik ismeretlen, olly móddal, hogy egyik egyenletben levő, a' másikban levőt lerontja, 's így kimarad. Erre nézve szükség, hogy a' kiirtandó ismeretlen, mindenik egyenletben ugyanazon emelésen, 's ugyanazon együtthatóval álljon; — és ha jegyeik ugyanazok, — *kivonás-*, ha ellenkezők —, *összeadás* által irtatnak ki. — Ha együtthatóik nem egyenlők: gyakran egyik', vagy mindkét egyenletnek bizonyos mennyiséggeli sokszorozása- vagy elosztása által egyenlőkké tétetnek. p. o.

I, $3x-2y=a$
$2x+2y=b$

összeadva: $5x=a+b$

II, $3x-2y=a$
$\pm 4x\mp 2y=\pm b$

kivonva: $3x-4x=a-b$

III, $3x-4y=a$, *(A)*
$2x+2y=b$, *(B)*

a' B egyenletet kettővel sokszorozván:

$$\begin{array}{r} 3x-4y=a \\ 4x+4y=2b \\ \hline 7x \quad =a+2b \end{array}$$

IV, $6x+9y=a-c$, *(A)*
$3x+6y=b+d$, *(B)*

elosztván az *A* egyenletet 3-al, — a' *B*-t pedig 2-vel:

$$\begin{array}{r} 2x+3y=\frac{a-c}{3} \\ \frac{3x}{2}+3y=\frac{b+d}{2} \\ \hline \textit{kivonva}: \; 2x-\frac{3x}{2}=\frac{a-c}{3}-\frac{b+d}{2} \end{array}$$

4) Bezout' fogása által is ki lehet irtani egyik ismeretlent, melly szerint egyik egyenlet sokszoroztatik valamelly határozatlan jelentésü betüvel, p. o. m-el, — összeadatik a' másik egyenlettel, vagy abból kivonatik, — az ugyanazon ismeretlent biró tagok sokszorozókkal fejeztetnek ki; — ekkor az m-nek ollyan érték adatik, melly által a' kiirtandó ismeretlen' sokszorozótársa 0-sá legyen, 's ez által a' sokszorozmány is, mint $=0$, kimaradjon. Lássuk példában.

$$4x+3y=65$$
$$5x+8y=111$$

sokszorozván a' másodikat m-el, 's az elsőhöz adván:

$$5mx+4x+8my+3y=m111.m+65$$
$$x(5m+4)+y(8m+3)=111+65$$

most ha x-et akarjuk kiirtani, m' értéke lesz $=-4/5$, és igy $5m=-20/5=-4$, 's e' szerint:

$$x(-4+4)+y(8m+3)=111.m+65$$
$$=y(8m+3)=111.m+65$$
$$y=\frac{111.m+65}{8m+3}=7.$$

Ha pedig az y-t akarjuk kiirtani, m' értéke lesz $=-{}^{3}/_{8}$, és $8m=-{}^{24}/_{8}=-3$, 's e' szerint:

$$x(5m+4)+y(-3+3)=111.m+65$$
$$x(5m+4)=111.m+65$$
$$x=\frac{111.m+65}{5m+4}=11.$$

más példa:

$$x+5=y-5$$
$$y+5=2x-10$$
$$10=y-x$$
$$15=2x-y$$
$$15m+10=2mx-x-my+y$$
$$15m+10=x(2m-1)+y(-m+1)$$

az x' kiirtására nézve lesz $2m=1$, $m={}^{1}/_{2}$, és így

$$15.m+10=x(1-1)+y(-m+1)$$
$$15.m+10=y(-m+1)$$
$$\frac{y}{2}=10+{}^{15}/_{2}={}^{35}/_{2}$$
$$y=35.$$

az y' kiirtására nézve pedig lesz $m=1$. 's e' szerint:

$$15m+10=x(2m-1)+y(-1+1)$$
$$15.1+10=x(2-1)$$
$$x=25.$$

114. §.

III. *Másod-rendü egyenletek' feloldása.*

A' másod- 's felsőbb rendü egyenleteknél, az ismeretlen' értéke az *egyenlet' gyökerének* neveztetik, mi-

vel azon gyökerét keressük az ismeretlennek, a' melly emelésen jő elő az egyenletben. Azonban tudjuk, hogy minden másod-gyökérnek két értéke van, *állító* és *tagadó*; 's e' szerint a' másod-rendü egyenletnek is két gyökere van, egyik állító, másik tagadó, — 's mindkét érték megfelel az egyenletnek.

A' *tiszta* másodrendü egyenletek' feloldása igen egyszerü, — 's csak abban áll, hogy az egyenlet' mindkét részéből gyökér vétetik. p. o.

$$x^2 = a$$

feloldatik így: $x = \pm\sqrt{a}$

így $ax^2 = b$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

De a' *vegyes* másodrendü egyenletek' feloldása nem illy könnyü. Erre nézve ezeket kell csinálni:

1) az egyenlet olly rendbe vétessék, hogy annak első részében álljon a' második emelésü ismeretlen, minden nevező-, 's együttható nélkül, + jeggyel; ugyanazon részben álljanak az ismeretlen' első emeléseit magokban foglaló tagok is, egy tagba összevonva; — a' melly tagokban pedig ismeretlen nincs, azok a' másik részbe tétessenek. p. o. $ab - bx = d - ax^2$, lesz: $ax^2 - bx = d - ab$, és: $\frac{x^2 - bx}{a} = \frac{d - ab}{a}$.

Hasonlólag: $bx - ax^2 + d = cx - dx^2 + b$

$$dx^2 - ax^2 + bx - cx = b - d$$

$$x^2(d-a) + (b-c)x = b - d$$

$$x^2 + \left\{\frac{b-c}{d-a}\right\} \cdot x = \frac{b-d}{d-a}$$

Honnan látnivaló, hogy akármelly vegyes másodrendü egyenlet ezen képlet alá vétethetik: $x^2 \pm Ax = \pm B$, mellyben az A az első emelésü ismeretlennek akármelly együtthatóját —, a' B pedig akárminő és akárhány tagból álló ismert mennyiségeket jelent.

2) mivel látni való hogy ezen egyenlet': $x^2 \pm Ax = \pm B$, első részéből gyökeret nem vonhatni; — azonban ha azon első részt figyelemre vesszük, szembetünik, hogy az csonka négyleg-hatvány, mellynek harmadik tagja, t. i. a' második gyökértag' négylege hiányzik. Ha tehát ezt ahoz hozzá adnánk: úgy azon első részből ép gyökeret fejthetnénk. De a' mit az egyik részhez adnánk, ugyanazt a' másikhoz is kellene adni, hogy az egyenlőség megmaradjon. — Kérdés tehát, miként találjuk meg a' második gyökértagot? Tudjuk hogy a' négyleg' 2-dik tagjában, az első gyökértag van sokszorozva, a' második gyökértag' kettőzetével, — és így az Ax-ben, x levén az első gyökértag, az A nem egyéb, mint a' második gyökértag' kettőzete, — 's innen a' második gyökértag $= \frac{1}{2}A$, — 's általában a' *második gyökértag mindenkor az x' együtthatójának fele.* Ezt kell tehát négylegre emelni, 's az egyenlet' mindkét részéhez adni. p. o.

$$x^2 \pm Ax + \frac{1}{4}A^2 = B + \frac{1}{4}A^2$$

így a' fentebbi példában:

$$x^2 \pm \frac{bx}{a} = \frac{d - ab}{a}$$

az első rész' gyökértagjai: $x \pm \frac{b}{2a}$, 's kipótolva lesz:

$$x^2 \pm \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{d - ab}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

így: $x^2 \pm \left\{\frac{b - c}{d - a}\right\}.x = \frac{b - d}{d - a}$

gyökértagok: $x \pm \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}$, — *kipótolva:*

$$x^2 \pm \left\{\frac{b-c}{d-a}\right\} . x + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2 = \frac{b-d}{d-a} + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2$$

3) ekkor az egyenlet' mindkét részéből gyökér fejtessék, — 's az első részben az ismeretlen magánoson hagyassék. p. o.

$$x^2 \pm Ax + {}^1/_4 A^2 = B + {}^1/_4 A^2$$
$$x \pm {}^1/_2 A = \pm \sqrt{(B + {}^1/_4 A^2)}$$
$$x = \pm \sqrt{(B + {}^1/_4 A^2)} \mp {}^1/_2 A.$$

így:

$$x^2 \pm \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{d-ab}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$x \pm \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\left\{\frac{d-ab}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right\}}$$
$$x = \pm \sqrt{\left\{\frac{d-ab}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right\}} \mp \frac{b}{2a}$$

így:

$$x^2 \pm \left\{\frac{b-c}{d-a}\right\} . x + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2 = \frac{b-d}{d-a} + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2$$
$$x \pm \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\} = \pm \sqrt{\left[\frac{b-d}{d-a} + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2\right]}$$
$$x = \pm \sqrt{\left[\frac{b-d}{d-a} + \left\{\frac{b-c}{2d-2a}\right\}^2\right]} \mp \frac{b-c}{2d-2a.}$$

így:

$$ay^2 - by - c = cy^2 - ay$$
$$ay^2 - cy^2 + ay - by = c$$
$$y^2(a-c) + y(a-b) = c$$
$$y^2 + y . \left\{\frac{a-b}{a-c}\right\} = c : (a-c)$$
$$y^2 + y \left\{\frac{a-b}{a-c}\right\} + \left\{\frac{a-b}{2a-2c}\right\}^2 = \frac{c}{a-c} + \left\{\frac{a-b}{2a-2c}\right\}^2$$

$$y \pm \frac{a-b}{2a-2c} = \pm \sqrt{\left[\frac{a}{a-c} + \left\{\frac{a-b}{2a-2c}\right\}^2\right]}$$

$$y = \mp \frac{a-b}{2a-2c} \pm \sqrt{\left[\frac{a}{a-c} + \left\{\frac{a-b}{2a-2c}\right\}^2\right]}$$

Az ollyan felsőbb rendü egyenleteket is, mellyekben az ismeretlen két különböző emelésen fordul elő, de úgy *hogy egyik hatvány-mutató a' másiknak kettőzete*, — a' másod-rendü egyenletek szerint lehet feloldani. p. o.

$$ax^{2m} = a^2b - cx^m$$

$$ax^{2m} + cx^m = a^2b$$

$$x^{2m} + \frac{c}{a}x^m = ab$$

$$x^{2m} + \frac{c}{a}x^m + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = ab + \left(\frac{c}{2a}\right)^2$$

$$x^m \pm \frac{c}{2a} = \pm\sqrt{(ab + \frac{c^2}{4a^2})}$$

$$x^m = \mp\frac{c}{2a} \pm \sqrt{(ab + \frac{c^2}{4a^2})}$$

$$x = \sqrt[m]{[\mp\frac{c}{2a} \pm \sqrt{(ab + \frac{c^2}{4a^2})}]}.$$

Ha a' másod- vagy felsőbb rendü egyenletben *két ismeretlen* van; azok közül egyiket itt is kiirtjuk, leginkább *helyette-tétel* által, 's az egyenletet egy ismeretlenüre vivén, a' szokott módon dolgozunk; — 's gyakran ha felsőbb emelésen volna is a' kiirtandó, sokszorozókra fejtés által emeléséről leszállitjuk. p. o.

I, $x + y = a \mid x = a - y$

$xy = b \mid (a-y)y = b$

$ay - y^2 = b$

$y^2 - ay = -b$. 'sat.

II, $x+3y=a \mid x=a-3y$
$x^2+y^2=b \mid (a-3y)^2+y^2=b$
$a^2-6ay+9y^2+y^2=b$
$10y^2-6ay=b-a^2$ 'sat.

III, $xy+y^2=5$
$x^3+x^2y=y^2+7$

az elsőből: $x=\frac{5-y^2}{y}$, 's ez által a' másik:

$$\frac{(5-y^2)^3}{y^3}+\frac{(5-y^2)^2}{y^2}.y=y^2+7$$

vagy: $\frac{(5-y^2)^3}{y^3}+(5-y^2)^2y^{-1}=y^2+7.$

a' nevezőt elenyésztetvén:

$$(5-y^2)^3+(5-y^2)^2y^2=y^5+7y^3$$
$$125-75y^2+15y^4-y^6+25y^2-10y^4+y^6=y^5+7y^3$$
$$y^5-5y^4+7y^3+50y^2-125=0.$$

melly már egy ismeretlenü, de ötödik rendü egyenlet.

IV. $x^2+3y^2=6x$
$2x^3-3y^2=8$

elsőből: $x^2=6x-3y^2$, ezt a' másodikba téve: $2x(6x-3y^2)-3y^2=8$
$=12x^2-6xy^2-3y^2=8$

az x^2 értékét $(6x-3y^2$-t) helyette tévén:

$$72x-36y^2-6xy^2-3y^2=8$$
$$x(72-6y^2)-36y^2-3y^2=8$$
$$x=\frac{8+39y^2}{72-6y^2}$$

ezen x' értekét az első egyenletben: $x^2+3y^2=6x$ helyette tévén, lesz:

$$\left(\frac{8+39y^2}{72-6y^2}\right)^2+3y^2=6.\left(\frac{8+39y^2}{72-6y^2}\right)$$ 'sat.

tovább dolgozza a' tanuló.

115. §.

A' *felsőbb rendü egyenletek' tulajdonairól, 's feloldásáról* is lássunk valamit.

A' felsőbb rendü vegyes egyenletek *teljesek*, ha az ismeretlen a' felsőtől a' legalsóig minden emelésen előfordúl, p. o. $x^3 - 4x^2 + 3x = 12$; — ellenkező esetben *nem-teljesek*, p. o. $x^4 - 5x^3 + 25x = 125$.

Ezek körül legelső mütétel a' *rendbeszedés*; mellyre nézve

1) minden tagok vitessenek az egyenlet' első részibe, — hogy a' másik részben 0 legyen, — vagyis az egyenlet vitessék 0-ra.

2) első tagban álljon a' legnagyobb emelésü ismeretlen, nevező- és együttható nélkül, + jeggyel.

3) a' következő tagokban sorba álljon az ismeretlen, eggyel-eggyel fogyatkozó mutatói szerint; az utolsó tagban 0 mutatója legyen, — vagy is onnan az együttható mellől az ismeretlen elmaradjon; különben azzal elosztatván az egész egyenlet, egy fokkal lejebb szállana.

4) a' nem teljes egyenleteknél a' hiányzó emelésü tag' helye *-al jeleltessék.

5) ha az egyenletben ollyan tag vagy tagok vannak, mellyekben az ismeretlen gyökérjeggyel, vagy törtmutatóval illetett: ezen tagok az egyenlet' egyik részébe tétessenek, a' többiek a' másikba; ekkor emeltessék az egyenlet azon hatványra, mellyet a' gyökérjegy' mutatója kiván; ez által a' gyökérjegy vagy törtmutató elenyészvén, a' rendbeszedés megtörténhetik.

példák:

I, $\frac{4x^2 - 2x^3}{3} = 8 - 5x,$

$4x^2 - 2x^3 = 24 - 15x,$

$2x^3 - 4x^2 - 15x + 24 = 0$

rendezve: $x^3 - 2x^2 - {}^{15}/_{2}x + 12 = 0$

II, $100 - 20x^2 = \frac{500}{x} - 4x^3$,

$100x - 20x^3 = 500 - 4x^4$

$4x^4 - 20x^3 + 100x - 500 = 0$

rendezve: $x^4 - 5x^3 * + 25x - 125 = 0.$

III, $10x - \sqrt{12x} = 2x^2$

$10x - 2x^2 = \sqrt{12x}$

$100x^2 - 40x^3 + 4x^4 = 12x$

$4x^4 - 40x^3 + 100x^2 - 12x = 0$

az egész egyenletet elosztva 4x-el, lesz:

$x^3 - 10x^2 + 25x - 3 = 0.$

Akármelly rendezett felsőbb rendü egyenletnek képviselője lehet tehát ezen képlet: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Q = 0$; így az első példában: $m = 3$, $A = 2$, $B = {}^{15}/_{2}$, $Q = 12$.

Azon érték, mellyet a' rendezett felsőbb egyenletben az ismeretlen helyett tehetünk, 's melly által az egyenlet' tagjai egymást lerontják, neveztetik, mint tudjuk, az egyenlet' *gyökerének;* p. o. ezen egyenletben: $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$, a' gyökér $= 3$, mert 3 az x helyett tetetvén, az egyenlet 0-ra vitetik. Azonban ugyanazon egyenletnek gyökerei még a' 7 és -1 is, mert azok által is 0-ra vitetik az egyenlet. — Innen látnivaló hogy a' felsőbb egyenletnek egynél több gyökere is van; — de hány legyen, — és mimódon akadunk azokra, alább látándjuk.

116. §.

Ha valamelly 0-ra vitt egyszerü egyenlet, p. o. $x - a = 0$, valamelly illy forma kéttagú mennyiséggel: $x - b$, sokszoroztatik: lesz a' sokszorozmány:

$$x - a = 0$$
$$x - b$$
$$\left.\begin{matrix} x^2 - a \\ -b \end{matrix}\right\} . x + ab = 0. \; A$$
$$= x^2 - ax - bx + ab = 0$$

olly másodrendü egyenlet, mellynek gyökeréül akár a, akár b vetethetik, — mert akármellyik tetessék az x helyett: az egyenletnek eleget tesz. p. o.

ha $x = a$, lesz: $a^2 - a^2 - ab + ab = 0$
ha $x = b$, lesz: $b^2 - ab - b^2 + ab = 0$.

Ha az A egyenlet ismét egy kéttagú sokszorozóval, $x - c$, sokszoroztatik: lesz

$$\left.\begin{matrix} x^3 - a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x \quad -abc = 0. \; B$$
$$= x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0,$$

olly harmadrendü egyenlet, mellynek gyökere mind az a, mind a' b, mind a' c, mert

ha $x = a$:
$$a^3 - a^3 - ba^2 - ca^2 + a^2b + a^2c + abc - abc = 0.$$
ha $x = b$:
$$b^3 - ab^2 - b^3 - cb^2 + ab^2 + acb + b^2c - abc = 0.$$
ha $x = c$:
$$c^3 - ac^2 - bc^2 - c^3 + abc + ac^2 + bc^2 - abc = 0.$$

Ha a' B egyenlet ismét valamelly kéttagú sokszorozóval, $x - d$, sokszoroztatik: lesz

$$\left.\begin{matrix} x^4 - a \\ -b \\ -c \\ -d \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^3 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} -abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \end{matrix}\right\} x \quad +abcd = 0$$

olly negyedrendü egyenlet, mellynek gyökerei: a, b, c, d.

példák:

I, $(x-3)(x-5)(x-6)(x+10)=0$, lesz
$=x^4-4x^3-77x^2+540x-900=0$, — gyökerei: 3, 5, 6 és -10

II, $(x+3)(x+6)(x-9)=0$, lesz
$=x^3*-63x-162=0$, gyökerei: $-3, -6, +9$.

117. §.

Minden rendezett felsőbb egyenletet úgy lehet tehát tekinteni, mint sokszorozmányt annyi kéttagú sokszorozókból, a' hányadik rendü az egyenlet. És minden sokszorónak egyik-, t. i. az ismert tagja, az egyenletnek gyökere. Innen minden egyenletnek annyi gyökere van, a' hányadik rendü, — csakhogy azok közt némellyek +, mások — jegyüek, — némellyek egyenlők egymással, — némellyek képzetesek.

Azonban az előbbi §-ban levő egyenletek' figyelmetes megtekintéséből, — a' felsőbb egyenletek' természetét illető, e' következő szabályokat vonhatjuk el:

1) a' rendezett felsőbb egyenlet' második tagjának együtthatója nem egyéb, mint minden gyökerek' összege, ellenkezőre változtatott jeggyel. Innen ha a' 2-dik tag hiányzik: jele hogy annyi + mint — jegyü gyökér van.

2) a' 3-dik tag' együtthatója nem egyéb, mint a' lehető változatok szerint, páronként egymással sokszorozott gyökerek' összege, — illető jegyökkel; — a' negyedik tag' együtthatójában pedig hármával vétetnek épen olly móddal a' gyökerek, — az ötödikben négyivel 'sat.

3) az utolsó tag nem egyéb, mint minden gyökerek' sokszorozmánya; — melly ha a' legfelső mutató

páros, saját jegyével van; — ha páratlan: ellenkezővel.

118. §.

Innen a' melly felsőbb egyenlet' együtthatói, és utolsó tagja épszámok: annak lehető tökéletes gyökereit könnyü kikeresni. T. i.

1) az utolsó tag fejtessék fel sokszorozóira, — 's ezek vagy mindnyájan gyökerek fognak lenni, ollyan jegyekkel, mellyek szerint összeadatván, a' 2-dik tag' együtthatóját hozzák elő, ellenkező jeggyel, — vagy legalább az egyenlet' gyökerei ezek közt feltaláltatnak. p. o.

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

az utolsó tag' sokszorozói: 1, 2, 3, 4, 6, 12; ha ezeket próbáljuk egymásután az x helyett tenni: úgy találjuk hogy $x = 1$, és $x = 2$, és $x = 6$.

Igy: $x^3 + 10x^2 + 31x + 30 = 0$,

a' 30' sokszorozói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, és mivel minden tagok + jegyüek, látnivaló hogy itt — jegyü gyökerek lesznek; 's valóban — 2, — 3 és — 5 az egyenlet' gyökerei.

Igy: $x^4 + 18x^3 * - 274x + 255 = 0$

az utolsó tag' sokszorozói: 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255; mivel a' tagok' jegyei változnak, itt váltogató jegyü gyökereket gyaníthatunk; — 's valóban + 1, + 3, — 5, és — 17 az egyenlet' gyökerei.

2) ha illy móddal nem akadunk annyi gyökérre, a' hányadik rendü az egyenlet; jele hogy a' többi gyökerek vagy tökéletlenek, vagy képzetesek, vagy a' már találtakkal egyenlők. — Illyenkor hogy a' még hátra levőket megtalálhassuk: szállittsuk lejebb az egyenletet, ollyan rendüre, a' hány gyökér még hátra van, — olly móddal, hogy x-ből és a' talált gyökérből, el-

lenkező jeggyel véve, kéttagú osztót, vagy midőn több talált gyökerek vannak, az azokból alakúlt kéttagúakat egymással sokszorozván, abból egy osztót csinálunk, 's ezzel az egyenletet elosztjuk, — és a' leszállított egyenletből új gyökeret keresünk. p. o.

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$$

a' 12-nek sokszorozói: 1, 2, 3, 4, 6, 12; — de ezek közűl, akár + akár — jeggyel próbálva, csak + 4 tesz eleget az egyenletnek. Tehát a' felvett egyenletet elosztjuk $x - 4$-el, az osztás' szabályai szerint, — melly által az leszáll $x^2 + 3 = 0$-ra, — mellyből $x = +\sqrt{-3}$; és így az egyenlet' gyökerei: $4, +\sqrt{-3}, -\sqrt{-3}$.

Így: $x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8 = 0$; itt az utolsó tag' sokszorozói: 1, 2, 4, 8, mellyekből: $-1, +2, +4$ az egyenletnek eleget tesznek, — de még két gyökér hiányzik; — innen ezen 3 kéttagút: $x + 1$, $x - 2$, $x - 4$ sokszorozván egymással, lesz belőlök: $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, mellyel a' felvett egyenlet elosztatván lesz: $x^2 - 4x - 1 = 0$; — 's ebből: $x = 2 + \sqrt{5}$, vagy $x = 2 - \sqrt{5}$.

3) ha az utolsó tag' sokszorozói közűl egyik sem tesz eleget, bárminő jeggyel vétessék is, az egyenletnek: jele hogy semmi tökéletes gyökér nincs. Azonban tökéletlen gyökér létezhetik, mellyet közelgetés által lehet keresni, illy móddal:

a) a' természeti számokat: 0, 1, 2, 3 'sat. vagy + vagy — jeggyel, a' szerint a' minőknek lenni gyanitjuk a' gyökereket, az egyenletben az x helyett tenni próbálgatjuk; ez által az egyenlet 0-ra soha sem vitetik, hanem most több annál, majd kevesebb; — és azon szám, mellynél a' jegy változik, nagyobb, — a' megelőző pedig kisebb a' gyökérnél, és így a' gyökér a' kettő közt esik. p. o.

$x^3 - 3x^2 - 17x + 43 = 0$, hogy az x' értekét meghatározzuk, ezt cselekesszük:

x	*eredvények*
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 43 = +43$
1	$1 - 3 - 17 + 43 = +24$
2	$8 - 12 - 34 + 43 = +5$
3	$27 - 27 - 51 + 43 = -8$
4	$64 - 48 - 68 + 43 = -9$
5	$125 - 75 - 85 + 43 = +8$ 'sat.

ax x-nek tehát egyik igenleges értéke 2 és 3 közt, — másik 4 és 5 közt esik.

b) nevezzük tehát azt a' törtszámot, melly a' 2-ön, vagy 4-en felül van f-nek, — 's lesz: $x = 2 + f$, — és ezen kifejezetet az egyenletben tegyük az x helyett így:

$$\begin{aligned} x^3 &= +8 + 12f + 6f^2 + f^3 \\ -3x^2 &= -12 - 12f - 3f^2 \\ -17x &= -34 - 17f \\ +43 &= +43 \\ \hline 5 &- 17f + 3f^2 + f^3 = 0 \end{aligned}$$

mivel az *f* valóságos tört: annak 2-dik és 3-dik hatványa nagy hiba nélkül elmaradhat, 's lesz $5 - 17f = 0$, innen $f = {}^5/_{17} = 0{,}29$, — 's innen $x = 2{,}29$.

Ha x' értekét még szorosabban akarjuk meghatározni: az előbbi módon az x helyett $2{,}29 + f$-et tehetünk az egyenletben, 's az f-et ismét kikereshetjük.

Jegyz. Ezen felsöbb egyenletek' feloldásmódját a' másodrendüekre is lehet alkalmazni, hol mindig két gyökér van, egyik +, másik — jegyü. p. o.

$$x^2 + 6x + 9 = 100$$
$$x^2 + 6x - 91 = 0$$

91-nek sokszorozói 7, és 13, és valóban az x' értéke $= +7$, és -13.

így: $x^2 + x = 90$

$x^2 + x - 90 = 0$

90-nek sokszorozói: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 45; és ezek közül $+9$ és -10 az x' értékei.

így: $x^2 - 2x = 48$; $x^2 - 2x - 48 = 0$,

a' 48' sokszorozói', 2, 2, 2, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 közül $+8$ és -6 eleget tesz az egyenletnek.

MÁSODIK CZIKKELY.

Az algebrai feladatokról, 's azoknak feloldásáról.

119. §.

Algebrai feladatnak neveztetik az ollyan tétel, melly által kivántatik, hogy néhány ismert mennyiségekből, más ismeretlenek, mellyek amazokkal bizonyos összefüggésben állnak, az ezen összefüggésen alapított egyenletek' segítségével kerestessenek ki. — p. o. *mellyik szám az, mellyhez ha fele hozzáadatik, 12 jő ki?* feladat, mellyben a' 12-tő, ismert, amaz említett tulajdonú szám pedig keresendő ismeretlen. — Így: *két ollyan számot kell keresni, mellyeknek összege* $= 17$, — *különbsége* $= 7$, — feladat, mellyben a' 17 és 7, ismert számok, — másik két szám pedig keresendő. — Amaz előbbi feladat *egyismeretlenü*, mert csak egy szám kerestetik; — emez utóbbi pedig *kétismeretlenü*, mert általa két szám kerestetik. — Általában a' feladatok 1-, 2-, 3-, 4- 'sat. *ismeretlenüek*, a' szerint, a' mint 1, 2, 3, 4 'sat. mennyiség kerestetik általok.

Határozott feladat az, mellyben minden keresendő mennyiségre nézve csak egyegy számot lehet találni, melly a' feladat' feltételeinek eleget tesz; — ha pedig

több illyen számok is találtatnak, úgy a' feladat *határozatlan*. Így p. o. az iménti két feladatok határozottak, mert az előbbiben ugyan a' keresett szám csak 8 lehet, — az utóbbiban pedig csak 12 és 5 tesznek eleget az egyenletnek. — Ellenben a' következő feladat: *két számot találni, mellyek' sokszorozmánya 12 legyen*, — határozatlan, — mert több számok eleget tesznek a' kivánatnak, mint: 3×4, 2×6, 1×12, $\frac{1}{2}\times24$, 's számtalan törtek. — Végre az ollyan feladatok, mellyek' kivánatainak semmi szám sem tesz eleget, *lehetlenek*.

120. §.

A' *feladatok' felodása* végett, az ismeretlen mennyiségeket az abécze' hátulsó betüivel: x, y, z, v, — az ismerteket pedig vagy csak számjegyekkel, vagy néha, könnyebbség' okáért, *a*-, *b*-, *c*-vel szoktuk kifejezni. Továbbá az ismeretlen mennyiségeknek az ismertekkeli összefüggését jól megvi'sgálván: ezen összefüggésekből egyenletet csinálunk, még pedig annyit, a' hány ismeretlen van; — 's ezen egyenlet- vagy egyenletekből, az ismeretlen', vagy ismeretlenek' értekét, a' már előadott egyenlet-feloldási szabályok szerint kikeressük. Legfőbb dolog itt az egyenlet-készítés, — mellyre ámbár kimerítő szabályokat adni nem lehet, — 's legtöbbet tesz a' gyakorlás által élesített belátás: mindazáltal nem lesznek feleslegesek e' következő jegyzetek:

1) a' kérdést jól meg kell érteni, hogy tisztán lássa az ember, mi van kiadva, mint ismert, — mi kerestetik, mint ismeretlen mennyiség?

2) minden előfordúló mennyiségeket (az ismerteket számmal, vagy a-, b-, c-..vel, az ismeretleneket x-, y-, z-...vel) oldalt fel kell jegyezni.

3) a' külön betük' számát, kivált az ismeretlenek-

re nézve, nem kell szükség nélkül szaporítni. Ha tehát egyiket a' másikból ki lehet fejezni: azt tegyük. Ez pedig több esetekben történhetik, p. o.

a) ha egyik ismeretlen a' másiknak kettőzete, hármazata, négyzete 'sat: akkor, ha az egyik $= x$, — a' másik lesz $= 2x$, $3x$, $4x$ 'sat.

b) ha egyik a' másiknak része, p. o. fele, harmada, kétharmada, háromnegyede 'sat: tört alakban kell kifejezni, így: x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{2x}{4}$ 'sat.

c) ha két ismeretlen' összege $(= s)$ kiadatik: akkor egyik $= x$, másik $= s - x$.

d) ha két ismeretlen közti különbség (d) adatik: a' kisebbik $= x$, nagyobbik $= x + d$.

e) ha két ismeretlennek sokszorozmánya kiadatik (f): akkor ha egyik $= x$, másik lesz $= \frac{f}{x}$.

f) ha két ismeretlen közti viszony kiadatik: akkor arany-szabály' segitségével egyiket a' másikból kifejezhetni. P. o. volnának egymáshoz olly viszonyban mint $2 : 3$: tehát az egyik lesz $= x$, — a' másik' kifejezetét így találom meg: $2 : 3 = x : \frac{3x}{2}$, lesz tehát a' másik $= \frac{3x}{2}$.

g) miután a' feladatban előforduló minden mennyiségek ki vannak fejezve, 's elnevezve: ekkor figyelmesen meg kell vi'sgálni: *mik ott egyenlők egymással?, — vagy miket lehetne egyenlőkké tenni valami változtatással?, — vagy micsoda mennyiség az, mellyet két alakban lehetne kifejezni?*, — 's ekkor az egyenlők egyenlőség' jegyével összeköttetvén, kész az egyenlet.

h) ha az ismeretlenek egymástól nem függnek annyira, hogy egymásból egy betü' segitségével kifejez-

tessenek, — hanem kifejezésökre külön betük x, y, z 'sat. kivántatnak: akkor a' feladat' feltételeiből annyi külön egyenletet szükség készitni, a' hány külön ismeretlen van.

i) miután az ekként elkészített egyenletből az ismeretlen' értéke, a' fentebbi szabályok szerint kikerestetik: az a' feladat' feltételeire illesztessék.

121. §.

I, *Első rendü egyismeretlenü feladatok.*

1) *feladat*: Mellyik az a' szám, mellyhez ha saját-fele adatik, kijő 12?

feloldás: a' keresett szám $= x$

$$\text{ennek fele} = \frac{x}{2}$$

$$\text{innen: } x + \frac{x}{2} = 12$$

$$2x + x = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = {}^{24}/_{3} = 8$$

és valóban $8 + {}^{8}/_{2} = 12$

2) *feladat*: Mellyik szám az, melly ha 3-al elosztatik, épen annyi jő ki, mint ha ugyanabból 30 kivonatik?

feloldás: a' keresett szám $= x$

$$\text{ez 3-al elosztva} = \frac{x}{3}$$

$$\text{ugyanebből 30-t kivonva} = x - 30$$

$$\text{innen: } \frac{x}{3} = x - 30$$

$$\text{és } x = 3x - 90$$

$$\text{és } 90 = 3x - x = 2x$$

$$x = {}^{90}/_{2} = 45$$

$$\text{és valóban: } {}^{45}/_{3} = 45 - 30$$

3) *feladat:* Kérdeztetvén egyvalaki, hány forintja legyen?, így felelt: pénzemnek fele, harmada, és negyede összevéve 2 forinttal több, mint a' mennyi van.

feloldás: forintjai' száma $= x$,

annak fele $= \frac{x}{2}$, harmada $= \frac{x}{3}$, negyede $= \frac{x}{4}$

összevéve: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$,

és mivel ezen mennyiség két forinttal több mint x: tehát vagy ebből vonjunk ki 2-t, vagy az x-hez adjunk 2-t, — mindjárt egyenlők lesznek.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2 = x$$

vagy: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 2$

's a' szokott módon feloldva: $x = 24$

's valóban: $^{24}/_{2} + {}^{24}/_{3} + {}^{24}/_{4} = 24 + 2$

$12 + 8 + 6 = 26.$

Jegyzet. Midőn a' feladatban összeg, és annak részei forognak fenn: vagy összeveszem a' részeket, 's azok egyenlők lesznek az összeggel; — vagy az összegből kivonok némelly részeket, — 's a' különbség egyenlő a' többi részekkel; vagy ha minden részt kivonok, $= 0$.

4) *feladat:* Hány éves vagy? Annyi a' mennyi, — az anyám kétannyi, — az atyám öt évvel idősebb az anyámnál, — mindnyájunk' ideje együtt 100 év.

feloldás: a' keresett évek' száma $= x$

az anyáé $= 2x$

az atyáé $= 2x + 5$

's ezen részek x, 2x, $2x + 5$ együtt $= 100$; lesz tehát az egyenlet:

$$x + 2x + 2x + 5 = 100$$

vagy: $100 - x = 2x + 2x + 5$

vagy: $100 - x - 2x = 2x + 5$

vagy: $100 - x - 2x - 2x = 5$
vagy: $100 - x - 2x - 2x - 5 = 0$
's kifejtetvén: $x = 19$

Jegyzet. Midőn két mennyiség közötti különbség van kiadva: ezt vagy kivonjuk a' nagyobbikból, 's lesz = kisebbik; vagy hozzáadjuk a' kisebbikhez, 's lesz = nagyobbik, — vagy a' kisebbiket a' nagyobbikból ki vonjunk, 's lesz = különbség.

5) *feladat.* A' gazda 25 napra napszámost fogadván, vele így egyezék: minden napért mellyen dolgozol, fizetek 6 garast, — minden napért mellyen nem dolgozol, tartásod' fejében te fizetsz nekem 4 garast; eltelvén az idő, fizetett a' gazda 10 garast. Kérdés: hány nap' dolgozott? — hány nap' hevert?

feloldás: dolgozó napok' száma $= x$
heverő napoké $= 25 - x$
vagy $(a = 25) = a - x$
fizetés a' dolgozó napokért $= 6x$
visszafizetés a' heverő napokért $= 4a - 4x$

Ezen két mennyiség között: $6x$, mellyet a' gazda fizetett, és $4a - 4x$, mellyet a' napszámos visszafizetett, a' különbség $= 10$; $6x$ több 10-zel mint $4a - 4x$, — és így illyen egyenletek lehetnek:

$$6x - 10 = 4a - 4x$$
vagy $6x = 4a - 4x + 10$
vagy $6x - 4a + 4x = 10$
$$10x = 4a + 10 = 110$$
$$x = {}^{110}/_{10} = 11.$$

dologtevő napok' száma tehát, $x = 11$
heverő napoké $= 25 - x = 14$
a' gazda fizet: $11 \times 6 = 66$
a' napszámos fizet: $14 \times 4 = 56$ } garast
különbség $= 10$

6) *feladat.* Ha két annyi idős volnék mint vagyok:

úgy 100-on annyival volnék felül, mint most alól vagyok. Hány éves vagyok hát? x éves;

ez 100-on alól van, és így $100 - x$,

két annyi idő volna $= 2x$,

ez 100-on felül van: $2x - 100$,

és $100 - x = 2x - 100$

$100 + 100 = 3x$

$x = {}^{200}/_{3} = 66^{2}/_{3}$

7) *feladat.* Hány éves vagy? Ha 5 évvel korosabb volnék: úgy éveim' száma kétannyi lenne, mint ha 5 évvel ifjabb volnék.

felold. éveim' száma: x

5 évvel több: $x + 5$

5 évvel kevesebb: $x - 5$

és $x + 5$ kétannyi mint $x - 5$,

egyenlőkké lesznek, ha vagy az elsőnek felét, vagy a' másodiknak kettőzetét veszem.

$$\frac{x+5}{2} = x - 5$$

vagy: $x + 5 = 2x - 10$

$x = 15$

8) *feladat.* Hány éves vagy? — Most $^{1}/_{3}$ résznyi mint az atyám, — de 50 év múlva az atyám csak éveinek $^{1}/_{4}$ részével lesz idősebb nálam.

felold. gyermek' évei $= x$,

atyáéi $= 3x$,

50 év múlva a' gyermekéi: $x + 50$

— — — az atyáéi: $3x + 50$

az $x + 50$-nél a' $3x + 50$ nagyobb $\frac{1}{4}$ részével $= \frac{3x+50}{4}$

-el; mellyet tehát vagy amahoz adni, vagy ettől el kell venni, hogy egyenlők legyenek:

$$x + 50 + \frac{3x+50}{4} = 3x + 50$$

9) *feladat:* Néhány koldusnak alamí'snát akarván adni: ha mindeniknek öt-öt krt. adok, úgy 3 kr. hiányzik pénzemhez; — ha négy-négy krt adok, úgy megmarad két krom. Hány koldús? és hány krom van?

felold. koldúsok' száma $= x$.

ha mindeniknek öt-öt krt. adnék: ki kellene adnom $5x$-et; de így 3 krom hiányzanék, — és így a' pénzem $= 5x - 3$. — Ha mindeniknek négy-négy krt adok: ki kell adnom $4x$-et, 's ekkor megmarad 2 krom, — innen a' pénzem $= 4x + 2$. A' pénzem' mennyisége tehát kétképen van kifejezve, — melly két kifejezetek egyenlők:

$$5x - 3 = 4x + 2$$
$$x = 5 = \text{a' koldusok' száma};$$
$$5x - 3 = 22 = \text{krok' száma}.$$

10) *feladat.* Egy úr az inasának igért egész évre 150 forintot, és egy ruhát; — az inas 8 hónap múlva leköszönvén, kapott 86 forintot és a' ruhát. Mennyibe esett a' ruha?

felold. a' ruha' ára $= x$.

Itt az a' mit két alakban lehet kifejezni, egy hónapi bér. T. i. egész évi, vagy 12 hónapi bér $= 150 + x$, innen egy hónapi bér $= \frac{150+x}{12}$; továbbá 8 hónapi bér $= 86 + x$, innen egy hónapi $= \frac{86+x}{8}$; és így

$$\frac{150+x}{12} = \frac{86+x}{8}; \quad -(x = 42)$$

11) *feladat:* Egy takácshoz visznek fonalat, hogy szőjön belőle 66 röföt, — úgy még kíván hozzá 2 fontot; — no hát szőjön csak 54 röföt, — úgy vissza ád 2 fontot. — Hány font a' fonal?

felold. — a' fonal x font. — Itt kétképen kell kifejezni egy fonthoz kivántató fonalat; t. i. 66 röfhöz kell

$x+2$, 's innen egy rőfhöz: $\frac{x+2}{66}$; továbbá 54 rőfhöz kell $x-2$, innen egy rőfhöz: $\frac{x-2}{54}$; és így: $\frac{x+2}{66} = \frac{x-2}{54}$.

12) *feladat.* Elindúl egy ember, 's naponként megy 6 mértföldet; — másik 5 nap múlva indul el, 's megy naponként 8 mértföldet. — Hány nap mulva éri be?

felold. x nap mulva. A' mit kétképen kifejezhetek, azon mértföldek' száma, mellyeket mindenik el tartozik végezni, mig együvé érnek. Az első már 5 nap alatt ment $5 \times 6 = 30$-t, még x nap alatt megy $6x$-et, és így $30+6x$; — a' másik megy $8x$-et, 's ezek egyenlők, mert úgy érheti be, — és így:

$$30+6x = 8x$$

13) *feladat.* Egy ember megy naponként 6 mértföldet; — a' másik 5 nap múlva indúl, és 15 nap múlva be kell érnie az elsőt. Hány mértföldet menjen naponként?

felold. x mértföldet.

$30+90 = 15x$; $x = 8$.

14) *feladat.* Egy edény vízvezető szivárvány által megtellik 5 percz alatt; — egy csap által pedig kiürül 7 percz alatt. — Kérdés: ha mind a' kettő nyitva van, hány percz alatt tellik meg?

felold. Az edénybe férő vizmennyiség legyen $= 1$. Ezt az 1-et még másként is kifejezhetem, t. i. az x idő alatt a' szivárványon bejövő-, a' csapon pedig kimenő viz közötti különbséggel. Mert amazon több jő be, mint ezen kimegy, és x idő alatt épen annyival kell többnek bejőni a' kimenőnél, a' mennyi fér az edénybe $= 1$. Kérdés tehát: mennyi jő be x idő alatt? Ezt kitalálom

így: 5 percz alatt megtellik az edény, és így jő $= 1$ víz: hát x percz alatt mennyi jő? $5 : 1 = x = \frac{x}{5}$, jő hát $\frac{x}{5}$. Továbbá kérdés: mennyi foly ki x idő alatt? kitalálom így: 7 percz alatt kiürül az egész edény, vagyis kifoly $= 1$ viz: hát x percz alatt mennyi foly ki? $7 : 1 = x : \frac{x}{7}$, és így kifoly: $\frac{x}{7}$. Innen

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{7} = 1. \quad (x = 17\frac{1}{2}.)$$

15) *feladat.* Libussa kisasszony 3 kérőit illy próbára tette: találjátok ki hány szem szilva van a' kosaramban? Ha egyiknek adnám felét és még egyet, — másiknak a' maradék' felét és még egyet, — harmadiknak a' maradék' felét és még hármat: magamnak egy sem maradna.

felold. Ebben a' járandóságoknak, és a' maradékoknak kifejezésére kell különösen vigyázni.

Szilvák' száma $= x$.

Első' járandósága $= \frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$

1-ső maradék: $x - \frac{x-2}{2} = \frac{2x-x-2}{2} = \frac{x-2}{2}$

Második' járand: $\frac{x-2}{4} + 1 = \frac{x-2+4}{4} = \frac{x+2}{4}$

2-dik marad: $\frac{x-2}{2} - \frac{x-2}{4} = \frac{2x-4-x-2}{4}$

$$= \frac{x-6}{4}$$

Harmadik' járand: $\frac{x-6}{8} + 3 = \frac{x-6+24}{8}$

$$= \frac{x+18}{8}$$

És ezen 3 járandóság együttvéve $= x$.

Egyenlet: $\frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+18}{8} = x$

minden tagot 8 nevezőjüvé tevén:

$$\frac{4x+8}{8} + \frac{2x+4}{8} + \frac{x+18}{8} = \frac{8x}{8};$$

$$4x+8+2x+4+x+18 = 8x;$$

$$7x+30 = 8x$$

$$30 = 8x-7x$$

$$x = 30.$$

Jegyzet. Vannak ollyan feladatok, mellyekben két ismeretlennek összege és különbsége adatik ki. Az illyeket egyenlet nélkül is feloldhatjuk, — mert mint fentebb is már látánk: *ha félösszeghez félkülönbség adatik, kijő a' nagyobbik; ha félösszegből félkülönbség kivonatik, kijő a' kisebbik ismeretlen.* t. i. legyen az összeg = s, — különbség = d, nevezzük előbb a' nagyobbik ismeretlent x-nek, — lesz a' kisebbik = x-d, és a' kettő együtt teszi az összeget.

$$x+x-d = s$$

$$2x = s+d$$

$$x = \frac{s+d}{2}$$

továbbá nevezzük a' kisebbiket x-nek: lesz a' nagyobbik = x + d, — 's innen

$$x+x+d = s$$

$$2x = s-d$$

$$x = \frac{s-d}{2}.$$

p. o. mellyik két szám az, mellyeket ha összeadunk, 70, — ha egymásból kivonunk 54 jő ki? —

$$\text{nagyobbik} = \frac{70+54}{2} = 62$$

$$\text{kisebbik} = \frac{70-54}{2} = 8.$$

E' következő feladatokat maga oldja fel a' tanuló.

16. *feladat.* Két ember, kiknek egyenlő pénzösszegük vólt, összetesznek **100** forintot; egyik a' pénzének $^1/_3$ —, másik $^1/_5$ részét adja. Kérdés: mennyi pénzök volt? és mellyik mennyit adott?

17. *feladat.* Öt vadász közül mindenik öttel lőtt többet az előtte valónál; azonban az utolsó épen háromannyit lőtt, mint az első. — Mellyik mennyit lőtt?

18. *feladat.* Ketten egyenlő pénzzel indultak el; egyik elköltött 50 forintot, — másik 130-at; — és az elsőnek ötannyi pénze maradt, mint a' másiknak. — Mennyivel indultak el?

19. *feladat.* Pest Párishoz 300 mértföld; egyik útazó jő Párisból Pest felé, 's megy naponként 8 mértföldet; — másik két nap múlva indúl Pestről Páris felé, 's megy naponként 10 mértföldet. — Hány nap múlva, és hol érnek össze?

20. *feladat.* Egy koldús elment a' Jupiter' templomába, 's kérte hogy pénzét tegye kétannyivá; — meglett, — 's ő háladatosságból 2 forintot ott hagyott. — Megmaradt pénzével ment az Apolló' templomába, — az is kétannyivá tette pénzét, 's ő 2 forintot ott hagyott. Ekkor haza ment, 's megszámlálván pénzét, volt = 1 forintja. — Mennyi volt elsőben?

21. *feladat.* Egy ember vagyonát évenként annak $^1/_3$ részivel növeszti; — de elköl évenként 1000 forintot, — és a' 3-dik év' végén kétszerte gazdagabb, mint volt kezdetben. — Mennyivel bírt kezdetben?

22. *feladat.* Egy ember minden hónapban letesz 10 forintot; — egy másik két év múlva követi példáját, de 15 forintot tesz le hónaponként. Mennyi idő mulva lesz ennek annyi pénze, mint amannak?

23. *feladat.* Két napszámos egyenlő napibérért dolgozott. Egyik 32 napra kapott 4 fort, és 6 'sák zabot; — másik 56 napra kapott 8 ft. 54 krt., és 9 'sák zabot. — Mennyibe esett egyegy 'sák zab?

24. *feladat.* Egy haldokló atya illyen végrendeletet tett: a' legidősebb fiam vegyen ki hagyományomból 1000 forintot, és a' maradék' $^1/_6$-át; — a' második

fiam vegyen ki a' maradékból 2000 forintot, 's az ekkori maradék' $^1/_6$-át; — a' 3-dik fiam ismét vegyen ki a' maradékból 3000 forintot, 's az ekkori maradék' $^1/_6$-át, — 's e' szerint szedje a' többi is. Azonban azt jegyzette meg, hogy ha így osztoznak: egyik sem fogja megcsalni a' másikat. — Mennyi a' hagyomány? hány a' fiu? 's mellyik mennyit kap?

122. §.

II. *Első rendü, több ismeretlenü feladatok.*

1) *feladat.* Ha 5 forintot nyerek tőled: úgy egyenlő pénzünk lesz; — de ha te nyersz tőlem 5 forintot, neked kétannyi lesz mint nekem.

feloldás.

én pénzem $= x$

tied $= y$

ha tőled 5-t nyerek: enyim lesz $= x + 5$

tied lesz $= y - 5$

és ezek egyenlők levén: első egyenlet lesz:

$$x + 5 = y - 5 .$$

ha te nyersz tőlem 5-t: lesz az enyim $= x - 5$

tied lesz $= y + 5$

és ezen $y + 5$ kétannyi mint $x - 5$; tehát második egyenlet lesz: $x - 5 = \frac{y + 5}{2}$, vagy: $2x - 10 = y + 5$

Ezek tehát a' két egyenletek:

$$x + 5 = y - 5$$
$$2x - 10 = y + 5,$$

mellyekből az x' és y' értekét a' 113 §-ban előadott módok közül akármellyiken kikereshetni. p.

összetétel által: $x = y - 10$

$$x = \frac{y + 15}{2}$$

$$y-10=\frac{y+15}{2}$$

$$2y-20=y+15$$

$$2y-y=20+15$$

$$y=35$$

$$x=y-10=25.$$

helyette tétel által:

az első egyenletből: $x=y-10$, ezt a' másik egyenletbe tévén: $2y-20-10=y+5$

ebből: $2y-y=20+10+5$

$$y=35.$$

kivonás által: $x+5=y-5$

$$\pm 2x\mp 10=\pm y\pm 5$$

$$-x+15=-10$$

$$x-15=10$$

$$x=25.$$

Bezout' fogásával:

$$x+5=y-5$$

$$2x-10=y+5$$

a' második egyenletet m-el sokszorozva, 's belőle az elsőt kivéve, lesz:

$$2xm-x-10m-5=ym-y+5m+5$$

$$x(2m-1)-10m-5=y(m-1)+5m+5$$

az x' kiirtása végett lesz $m=1/2$, 's innen

$$x(1-1)-5-5=\frac{y}{2}+5/2+5$$

$$0-10=\frac{y+5}{2}+5$$

$$-20=y+5+10$$

$$y=20+5+10=35$$

az y' kiirtása végett lesz $m=1$, 's innen

$$x(2-1)-10-5=y(1-1)+5+5$$
$$x \quad -15 \quad = \quad 0 \quad +10$$
$$x \quad =25.$$

2. *feladat.* Ha a' városban több lakos lett volna 3000-el: úgy egyegy lakosra kevesebb fizetés esett volna 10 forintal. Ha pedig 1000-el kevesebb lakos lett volna: úgy egyegy többet fizetett volna 10 ftal. — Hány lakos volt? — mit fizetett egyegy? — mennyi volt az egész fizetendő mennyiség?

felold. lakosok' száma $=x$
egy egy fizet $=y$
az egész fizetés $=xy$
$1000=a$, $3000=3a$.

ha több lakos lett volna 3000-el, $=x+3a$:

akkor egyegy fizetett volna: $\frac{xy}{x+3a}$-t,

és ez 10 ftal kevesebb mint y; — innen

első egyenlet: $\frac{xy}{x+3a}=y-10$;

ha pedig kevesebb lakos lett volna 1000-el $=x-a$:

akkor egyegy fizetett volna: $\frac{xy}{x-a}$-t,

és ez 10 ftal több lett volna mint y, — innen

második egyenlet: $\frac{xy}{x-a}=y+10$.

$$\frac{xy}{x+3a}=y-10 \quad | \quad xy=xy-10x+3ay-30a$$
$$\frac{xy}{x-a}=y+10 \quad | \quad xy=xy+10x-\ ay-10a$$
$$xy-xy+10x=3ay-30a$$
$$xy-xy-10x=-ay-10a$$
$$10x=3ay-30a$$

$$* \quad 10x = ay + 10a$$

$$3ay - 30a = ay + 10a$$

$$3ay - ay = 30a + 10a$$

$$2ay = 40a$$

$$y = \frac{40a}{2a} = 20$$

a' * szerint: $x = \frac{ay + 10a}{10} = 3000.$

az egész fizetés: $xy = 60000.$

3. *feladat.* Van valakinek kétféle bora, egyiknek akója 8-, a' másiké 13 forintos; — ezekből elegyíteni akar 50 akót, olly szándékkal, hogy akóját adja 10 forinton. Mellyikből mennyit vegyen?

feloldás: egyikből x-et, másikból y-t, és a' két mennyiség = 50 akó; innen

első egyenlet: $x + y = 50$

az egyikből x akó' ára = 8x, — a' másikból y akó' ára = 13y, — és ezek együtt annyit tesznek mint 10 frjával 50 akó' ára = 500 ft, — innen

második egyenlet: $8x + 13y = 500.$

4) *feladat.* Egy pénzváltó így szól: itt van 3 erszény, A, B, és C, 's bennök tallérok. Ha mind a' B-ből mind a' C-ből tiz-tiz tallért kiveszek, 's azokat az A-ba teszem: úgy az A-ban épen annyi lesz, mint a' B- és C-ben együtt. — Ha az A- és C-ből tizenöt-tizenöt tallért kivévén, azokat a' B-be teszem: ebben annyi lesz, mint az A- és C-ben együtt. — Végre ha az A- és B-ből húsz-húsz tallért kivévén, azokat a' C-be teszem: ebben annyi lesz mint az A- és B-ben együtt. — Hány tallér van külön mind a' háromban?

felold. A-ban x, B-ben y, C-ben z tallér. A' feltételek szerint ezek az egyenletek:

$x+20=y-10+z-10$. *vagy* I, $x-y-z=-40$
$y+30=x-15+z-15$. *v.* II, $y-x-z=-60$
$z+40=x-20+y-20$. *v.* III, $z-x-y=-80$
összeadván az I, és II egyenletet, lesz:

$$-2z=-100, \text{ vagy: } z=50 \text{ tallér.}$$

összeadván: az I és III-t lesz:

$$-2y=-120, \text{ vagy: } y=60 \text{ tallér.}$$

összeadva a' II és III-t, lesz:

$$-2x=-140 \text{ vagy: } x=70 \text{ tallér.}$$

's ezen értékek az egyenletnek eleget tesznek.

5) *feladat.* A' vendéglő kérdeztetvén, mi árú borai vannak? így felelt: 2 itcze az első fajtából, 2 itcze a' másodikból, és 1 itcze a' harmadikból együtt érnek 1 forintot; — 2 itcze az elsőből, 3 a' másodikból, 4 a' harmadikból, 2 forintot; — 10 az elsőből, 4 a' másodikból, 2 a' harmadikból 3 forintot. Mi árú egyegy itcze minden külön fajból?

felold. az elsőből x-, a' másodikból y-, a' harmadikból z kr. árú. — Egyenletek

$$\text{I}, \quad 2x+2y+z=60 \text{ kr.}$$
$$\text{II}, \quad 2x+3y+4z=120.$$
$$\text{III}. \quad 10x+4y+2z=180.$$

az I-ből a' z-t meghatározván:

$$z=60-2x-2y$$

's ezt a' II és III-ban helyette tévén:

$$\text{II}, \quad 2x+3y+240-8x-8y=120$$
$$120=6x+5y$$
$$\text{III}, \quad 10x+4y+120+4x-4y=180$$
$$6x=60$$
$$x=10$$

ezt az előbbi $120=6x+5y$-ban helyette tevén:

$$120=60+5y$$
$$120-60=5y$$
$$y=\tfrac{60}{5}=12$$

mind az x', mind az y' értékét az I egyenletből kifejtett z' meghatározatába tévén

$$z = 60 - 20 - 24$$
$$z = 16.$$

A' következőket maga oldja fel a' tanuló.

6) *feladat.* Az én juhom a' tiednek felével együtt 3000; — a' tied az enyimnek egyharmadával 3000. — Mennyi az enyim? mennyi a' tied?

7) *feladat.* Kérdi a' tanitvány a' tanitótol, hogy 300 tanulótársai közt ő hányadik? Ha úgymond az előttedvalók' számát négyszer veszed, annyi lesz, mint ha az utánadvalókét 6-al elosztod.

8) *feladat.* Ha kettővel kevesebben volnánk: egynek-egynek 1000 frttal több jutna; — ha pedig hárommal többen volnánk, úgy egy-egy 1000 frttal kevesebbet kapna. — Hányan vagyunk? 's mennyit kap egy egy?

9) *feladat.* Három bombizó hányta egész nap a' bombit. A' két első együtt 26-al vetett többet, mint a' harmadik; — a' két utolsó 38-al többet mint az első; — az első és utolsó 24-el többet mint a' középső. Mellyik mennyit hányt?

123. §.

III. *Másodrendü feladatok.*

1) *feladat.* Mellyik szám az, mellynek fele harmadával sokszoroztatván, lesz = 294.

felold. $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6} = 294 = a$

$$\frac{x^2}{6} = a,\ x^2 = 6a$$
$$x = \sqrt{6a} = 42.$$

2) *feladat.* Egy atya így szóll fiaihoz: ha külön mindnyájótoknak három-három aranyat adnék: úgy minden pénzem' oda adnám; — ha pedig egynek-egynek

annyit adnék, a' mennyi magamnak van: úgy 300 aranyra volna szükségem. — Hány fia? hány aranya volt?

felold. fia $= x$ | $3x = y$ | $x = {}^{y}/_{3}$
aranya $= y$ | $xy = 300$ | $x = {}^{300}/_{y}$

$$\frac{y}{3} = \frac{300}{y}$$
$$y^2 = 900$$
$$y = \sqrt{900} = 30$$
$$x = \frac{y}{3} = 10.$$

3) *feladat.* Két számok közti különbség $= 6$, — sokszorozmányuk $= 91$, — mellyek azon számok?

felold. egyik x
másik $x + 6$
sokszorozmány: $x(x+6)$; $x^2 + 6x$
egyenlet $x^2 + 6x = 91$. — *gyökér:* $x \pm 3$
kipótolva: $x^2 + 6x + 9 = 91 + 9$
$x \pm 3 = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10 \mp 3 = +7$ vagy -13;
ha egyik szám $= +7$, úgy a' másik lesz: $x + 6 = +13$, 's ezek a' feladat' feltételeinek eleget tesznek; — hasonlólag ha egyik szám -13, — úgy a' másik $= -13 + 6 = -7$, — 's a' feltételeknek ezek is eleget tesznek.

Ugyanezt a' felsőbb egyenletek' szerint oldván fel:

$$x^2 + 6x = 91$$
$$x^2 + 6x - 91 = 0$$

91-nek sokszorozói: 7 és 13, mellyek épen az x' értékei, vagyis az egyenlet' gyökerei.

4. *feladat.* Mellyik az a' 3 jegyü szám, mellynek jegyei olly természetüek, hogy 1] a' 3 jegy' (helyértékét nem tekintve) négylegeinek összege $= 104$; 2] a' középső jegy' négylege 4-el több mint a' két szélső

jegy' sokszorozmányának kettőzete; — 3] ha a' kérdéses számból 594 kivonatik, a' különbségben a' 3 jegyek, mellyek a' kérdéses számot teszik, megfordított rendben állnak.

felold. azon szám' első jegye $= x$,
második jegye $= y$,
harmadik jegye $= z$;

első egyenlet: $x^2 + y^2 + z^2 = 104$. *A*

második egyenl. $y^2 = 2xz + 4$. *B*

a' harmadik feltételben hely szerinti érték kivántatván, lesz:

$$100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x. \quad C$$

ezen utolsó *C* egyenletből az x-et meghatározván:

$$x = \frac{99z + 594}{99} = z + 6;$$

az x' ezen értékét $= z + 6$, az *A* és *B* egyenletben helyette tévén, lesz:

A-ból: $z^2 + 12z + 36 + y^2 + z^2 = 104$, — *vagy*
$2z^2 + 12z + 36 + y^2 = 104$. „ *D.*

B-ből: $y^2 = 2z^2 + 12z + 4$, *vagy*
$2z^2 + 12z + 4 = y^2$ „ „ *E.*

az *E* egyenletet a' *D*-ből kivonván:

$$y^2 + 32 = 104 - y^2$$
$$2y^2 = 104 - 32 = 72$$
$$y^2 = \sqrt{36}$$
$$y = 6.$$

az y' értékét az *E* egyenletbe tévén:

$$2z^2 + 12z + 4 = 36,$$

innen a' z' értékét a' felsőbb egyenletek' szabálya szerint legrövidebben kikeresvén:

$$2z^2 + 12z - 32 = 0$$
$$z^2 + 6z - 16 = 0$$

16' sokszorozói: 2, 4, 8, mellyek közül (mivel 16 — jegyü) + 2 az egyenletnek eleget tesz,

$$z = 2$$

ezen értéket amaz előbbi: $x = z + 6$, egyenletben helyette tévén:

$$x = 2 + 6 = 8.$$

így tehát a' keresett szám = 862.

5) *feladat.* Mellyik az a' szám, melly saját négylegéhez adatva, tesz 90-t?

felold. $x^2 + x = 90.$

gyökér: $x \pm {}^1/_2.$

kipótolva: $x^2 + x + {}^1/_4 = 90 + {}^1/_4$

mindkét résznek gyökerét véve:

$x \pm {}^1/_2 = \pm\sqrt{(90 + {}^1/_4)} = \pm\sqrt{{}^{361}/_4} = \pm {}^{19}/_2$

$x = \pm {}^{19}/_2 \mp {}^1/_2$

$x = +9$ és $= -10;$

mind a' $+9$, mind a' -10 eleget tesz a' feladat' feltételeinek, t. i. $+9 + 9^2 = 9 + 81 = 90$; és $-10 + 10^2 = -10 + 100 = 90.$

Ugyan ezen egyenletet:

$$x^2 + x = 90$$

a' felsőbb egyenletek szerint oldván fel:

$$x^2 + x - 90 = 0;$$

90-nek sokszorozói 9 és 10, 's mint látánk az egyenlet' gyökerei $+9$, és -10.

6) *feladat.* Két ember, A és B, vettek együtt 30 rőf posztót; — A egyegy rőfért négyannyit fizetett, mint a' hány rőföt vett B, 's fizetett összesen 500 forintot. — Mellyik hány rőföt vett? 's mi áru volt rőfi?

felold. *A* vett $= x$ rőföt

B „ $= 30 - x$ rőföt.

A fizet mindnyájáért $4(30 - x).x = 120x - 4x^2$

egyenlet: $120x - 4x^2 = 500$

$4x^2 - 120x = -500$

$x^2 - 30x = -125$

$x^2 - 30x + 125 = 0$

125' sokszorozói: 5 és 25, és ha $x = -5$

akkor: $5^2 - 30 . 5 + 125 = 0$; — szintén ha

$x = +25$, akkor: $25^2 - 30.25 + 125 = 0$

$= 635 - 750 + 125 = 0.$

$x = 25$, vagy $= -5$

$30 - x = 5$, vagy $30 - (-5) = 35.$

de mivel a' feladat' természete csak igenlegesen menynyiségeket szenved meg, (— 5 rőf mi volna?)

tehát egyik vett: $x = 25$,

másik: $30 - x = 5$ rőföt

's egy-egy rőf' ára: $4 \times 5 = 20$ for.

Ugyanezen egyenletet:

$x^2 - 30x = -125$, pótlékkal oldván fel:

gyökér: $x - 15$,

pótolva: $x^2 - 30x + 225 = -125 + 225$

$x \pm 15 = \pm\sqrt{100}$

$x = \pm 10 \mp 15$

$x = 25$ vagy -5.

7) *feladat.* Egy haldokló atya 30,000 forint hagyományáról úgy rendelkezett, hogy özvegye kapja felét, — másik felén gyermekei osztozzanak egyenlően. Kevés idő mulva meghalt a' gyermekek közül kettő, 's ekkor 625 frttal többet kapott egyegy, mint kapott volna előbb. — Hány gyermeke volt?

felold. osztoznak a' gyermekek $^{30000}/_{2} = 15000 =$ a forinton. —

Gyermekek' száma előbb $= x$, ekkor kap egyegy $= \frac{a}{x}$

„ „ később $= x - 2$ „ „ $= \frac{a}{x-2}$

és ezen $\frac{a}{x-2}$ több 625 forttal, mint $\frac{a}{x}$; innen

egyenlet: $\frac{a}{x-2} = \frac{a}{x} + b.$

$$a = \frac{ax-2a}{x} + bx - 2b$$

$$ax = ax - 2a + bx^2 - 2bx$$

$$ax - ax - bx^2 + 2bx = -2a$$

$$-bx^2 + 2bx = -2a$$

$$bx^2 - 2bx = 2a$$

gyökér $= x-1 \mid x^2 - 2x = \frac{2a}{b}$

pótolva: $x^2 - 2x + 1 = \frac{2a}{b} + 1$

$$x \pm 1 = \pm\sqrt{(\frac{2a}{b}+1)} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

$$x = \pm 7 \mp 1$$

$x = 8$ vagy -6

gyermekek' száma előbb $= 8$, és: $^{15000}/_{8} = 1875$

„ „ később $= 6$, és: $^{15000}/_{6} = 2500$

különbség $= 625$

más feloldás: $x^2 - 2x = \frac{2a}{b} = 48$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$48 = 8 \times 6$, 's innen $x = +8$

$x = -6$

Az ollyan feladatoknál, mellyekben két ismeretlen, egyik nagyobb, másik kisebb, fordúl elő, gyakran könnyithetni a' feloldást az által, ha nem rendes módon nevezzük el, egyiket x-nek, másikat y-nak, — hanem a' kettő' összegét nevezzük 2x-nek, és a' kettő közti különbséget 2y-nak. — Már félösszeghez fél-különbség adatván: kijö a' nagyobbik; innen a' nagyobbik' kifejezete lesz: $x+y$; — és fél-összegből félkülönbség kivonatván kijö a' kisebbik, 's innen a' kisebbik' kifejezete lesz: $x-y$. Ekként nevezvén tehát el a' keresendöket, rendesen bánunk velek. p.

8) *feladat.* Melyik két szám az, mellyeknek sokszorozmányuk $= 160$; — négylegök' különbsége pedig $= 156$?

felold. a' két szám' összege $= 2x$

„ „ különbsége $= 2y$

a' nagyobbik szám $= x + y$

a' kisebbik „ $= x - y$

a' két szám' sokszorozmánya: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

négylegök' különbsége $= (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

Egyenletek: I, $x^2 - y^2 = 160$

II, $4xy = 156$

az I-ből: $x = \sqrt{(160 + y^2)}$

a' II-ből: $x = \frac{156}{4y}$

$$\sqrt{(160 + y^2)} = \frac{156}{4y}$$

$$160 + y^2 = \frac{(156)^2}{16y^2}$$

$$160 . 16y^2 + 16y^4 = (156)^2$$

$$\text{III}, \quad y^4 + 160y^2 = \frac{(156)^2}{16} = 1521$$

$$y^4 * + 160y^2 * - 1521 = 0$$

1521-nek sokszorozói: 3, 3, 169, — és ha $y = 3$, ez az egyenletnek eleget tesz.

innen: $x = \frac{156}{4y} = {}^{156}/_{12} = 13.$

E' szerint $x + y = 13 + 3 = 16 =$ nagyobbik

és $x - y = 13 - 3 = 10 =$ kisebbik.

és $16 \times 10 = 160$; és $(16)^2 - (10)^2 = 156$

Vagy a' III egyenletet pótlékkal oldván fel:

$y^4 + 160y^2 = 1521$. (gyökér $y^2 + 80$)

$y^4 + 160y^2 + (80)^2 = 1521 + (80)^2$

$y^2 + 80 = \sqrt{(1521 + (80)^2)}$

$y^2 + 80 = \sqrt{7921}$

$$y^2 = 89 - 80 = 9$$
$$y = 3.$$

9) *feladat.* Két számot találni, mellyeknek összegök, — sokszorozmányuk, — és négylegök' különbsége, — mind ezen 3 eredvények egymással egyenlők.

felold. a' kétszám' összege legyen $= 2x$
„ „ különbsége . . $= 2y$
a' nagyobbik szám $= x + y$
a' kisebbik . . $= x - y$
sokszorozmányuk $= x^2 - y^2$
négylegök' különbsége $= 4xy$

Egyenletek: I, $2x = 4xy$
II, $2x = x^2 - y^2$
az I-ből: $\frac{2x}{4x} = y$
és így: $y = \frac{1}{2} = 0{,}5$

ezen értéket a' II-ben helyette tévén, lesz:

$$2x = x^2 - 0{,}25$$
$$x^2 - 2x = 0{,}25$$
(gyökér $= x - 1$)
kipótolva: $x^2 - 2x + 1 = 0{,}25 + 1 = 1{,}25$
$$x - 1 = \sqrt{1{,}25}$$
$$x = 1 + \sqrt{1{,}25}$$
$x = 2{,}118\ldots =$ félösszeg
$y = 0{,}5\ldots. =$ félkülönbség
$x + y = 2{,}618\ldots =$ nagyobbik keresett
$x - y = 1{,}618\ldots =$ kisebbik keresett

és ezen számok a' feladat' kivánatainak megfelelnek.

10) *feladat.* Ketten vetettünk el 24 mérő gabonát; ha nekem minden mérőre annyi terem, a' hány mérőt te elvetettél: lesz 135 mérőm. — Mennyit vetett el kiki közülünk?

11) *feladat.* Melyik szám az, mellynek négylege magánál a' számnál 306-al nagyobb?

12) Két szám keresendő, mellyeknek összegök, saját négylegök' összegéből kivonatván 78-at, — de összegök sokszorozmányukhoz adatván, 39-et ád?

124. §.

IV. *Határozatlan feladatok.*

Mik legyenek azok, már fentebb előadatott. T. i. ha a' feladat' feltételeiből nem lehet annyi egyenletet készítni, a' hány ismeretlen van: akkor az ismeretlenek' értékét nem lehet csupán egy meghatározott módon fejteni ki; mert nem lehet egy ollyan egyenletre jutni, mellynek egyik részében csupa ismert mennyiségek lennének. P. o. ha valamelly feladat' feltételeiből ezen egyenlet fejlenék ki:

$$ax \pm by = \pm c,$$

a' nélkül hogy más, ettől független egyenletet is lehetne csinálni: akkor a' feladat határozatlan. Mert ha ezen egyenletből egyik ismeretlent, p. az x-et kifejtjük, lesz:

$$x = \frac{\pm c \mp by}{a}$$

hol az x' értéke mindig az y' értekétől függ, 's végetlen sokféle lehet.

Ha az illynemü feladatok mellett semmi megszorító feltételek nincsenek, — 's az ismeretlen x lehet akár egész-, akár tört-, akár igenleges-, akár nemleges szám: úgy a' megfejtés nem nehéz, mert az y-nak tetszés szerint akármelly értéket adjunk, az által az x' értéke is meglesz határozva. p. o. *mellyik az a' két szám mellynek összege* $= 1$? $x + y = 1$.

Látnivaló hogy bármelly értéket adjunk az y-nak: az x-nek olly értéke lesz, hogy a' kettőjé együtt $= 1$ legyen. p. o.

ha y' értéke	úgy x' értéke lesz
$=-1$	$=+2$
$=-2$	$=+3$
$=-875000$	$=+875001$
$=+9000000$	$=-8999999$
$=-\frac{1}{100000}$	$=+\frac{10^5+1}{100000}$
$=+\frac{10^9-1}{10^9}$	$=-\frac{1}{10^9}$
$=+\sqrt{(a-x)}$	$=-\sqrt{(a-x)}+1$
$=\pm 0$	$=1$
$=\pm\infty$	$=\mp\infty+1$ 'sat.

Azonban rendesen a' feladat' feloldása korlátoltatni szokott az által, hogy az ismeretlenek csak egész, — és igenlegesen számok tartoznak lenni; 's ehez-képest az y-nak nem adhatunk tetszés szerint akármelly értéket, hogy a' feladat' feltételeinek elég tétessék. — Például legyen ezen határozatlan egyenlet:

$$8x-11y=1$$

ebből: $x=\frac{11y+1}{8}$

ollyan egész-, és igenleges számot kell felvenni y' értékeül, melly 11-szer vétetvén, 's hozzá 1 adatván: 8 által kereken elosztathassék. Próbálgatok tehát értékeket adni az y-nak, mig kielégitőkre nem találok, — 's azok által az x is meghatároztatik. p. o.

ha $y=5$, úgy: $x=\frac{11.5+1}{8}=7$

$y=13$, „ „ $x=\frac{11.13+1}{8}=18$

$y=21$, „ „ $x=\frac{11.21+1}{8}=29$ 'sat.

Azonban mivel a' tört képletbe foglalt y-nak ér-

téket találni bajos: könnyíthetni a' dolgot illy formán: Ha az x egész szám akar lenni: úgy a' $\frac{11y+1}{8}$-nak is egésznek kell lenni, azaz a' 8 osztója a' $11y+1$-nek. Osszuk el tehát vele, — lesz $= y + \frac{3y+1}{8}$, 's innen: $x = y + \frac{3y+1}{8}$, ... I.

Úgyde az x csak úgy lehet egész szám, ha a' $\frac{3y+1}{8}$ is egész, — nevezzük el hát azt valami betűvel, p. a-val, 's innen:

$$a = \frac{3y+1}{8},\ 8a = 3y+1,$$

's innen $y = \frac{8a-1}{3}$

$$y = 2a + \frac{2a-1}{3}, \quad \ldots\ldots \text{II.}$$

Úgyde a' $\frac{2a-1}{3}$-nak is egész számnak kell lenni, nevezzük hát azt b-nek, 's innen:

$$b = \frac{2a-1}{3},\ 3b = 2a-1$$

$$a = \frac{3b+1}{2}$$

$$a = b + \frac{b+1}{2}, \quad \ldots\ldots \text{III.}$$

Úgyde a' $\frac{b+1}{2}$-nek is épszámnak kell lenni, — nevezzük hát azt c-nek, 's innen:

$$c = \frac{b+1}{2},\ 2c = b+1$$

$$b = 2c-1, \quad \ldots\ldots \text{IV.}$$

Miután már a' b' kifejezetében törtszám nincs: men-

jünk most vissza az előbbi egyenletekre helyettetételekkel; — előbb is a' IV egyenletből a' b' értekét tegyük a' III egyenletbe, — lesz:

$$a = 2c - 1 + \frac{2c-1+1}{2}$$
$$a = 2c - 1 + c$$
$$a = 3c - 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{V.}$$

Ezen V egyenletben kifejezett *a*' értekét tegyük a' II egyenletbe:

$$y = 6c - 2 + \frac{6c-2-1}{3}$$
$$y = 6c - 2 + 2c - 1$$
$$y = 8c - 3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VI.}$$

És végre ha a' VI egyenletből az y' értekét az I egyenletben helyette teszem:

$$x = 8c - 3 + \frac{24c - 9 + 1}{8}$$
$$x = 8c - 3 + 3c - 1$$
$$x = 11c - 4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII.}$$

Már a' két utolsó (VI, és VII) egyenletekben a' *c*' értékeül sorba vévén az épszámokat, 1, 2, 3, 'sat. az által az x' és y' értéke meghatároztatik:

ha *c*' értéke $= 1$, úgy: $y = 5$, és $x = 7$
„ „ $= 2$ „ $y = 13$ „ $x = 18$
„ „ $= 3$ „ $y = 21$ „ $x = 29$ 'sat.

és mind ezen értékek az egyenletnek megfelelnek:

t. i. $8 . 7 - 11 . 5 = 56 - 55 = 1$
$8 . 18 - 11 . 13 = 144 - 143 = 1$
$8 . 29 - 11 . 21 = 232 - 231 = 1.$

Ha az x' és y' értekét még tovább is keresnénk: úgy fognánk találni, hogy azoknak növekedésök bizonyos rendet tart; t. i. a' x-nek minden következő értéke 11-el-, az y-né pedig 8-al növekszik.

Jegyezzük meg még, hogy az x' és y' értékei épszámok csak úgy lehetnek, ha azoknak együtthatói *viszonyos első* számok, t. i. ha közös osztójok nincs. — Mert legyen péld. az x' együtthatója $= a$, — az y-né $= b$, — 's legyen illyen egyenlet:

$$ax + by = c$$

Már tegyük fel hogy az a- és b-nek volna közös osztójok, p. *m*, — melly általi hányados lenne $\frac{a}{m} = a'$, és $\frac{b}{m} = b'$; az egyenlet így lenne:

$$a'mx + b'my = c,$$
$$m(a'x + b'y) = c,$$
$$a'x + b'y = \frac{c}{m},$$

már ha x és y épszámok volnának: úgy $a'x$ és $b'y$ is, — és ezeknek összegük $a'x + b'y$ is épszámok volnának; úgyde azoknak értéke $= \frac{c}{m}$, az pedig törtszám, — és így ezen esetben x' és y' értékeinek csak törtszám felelhetne meg.

Példák:

1) *feladat.* Mellyik azon szám, melly 6 által osztatván 5-t ád maradékul, 7 által osztatván pedig 3-at?

felold. a' keresett számot tekintsük mint nem teljes sokszorozmányt 6-ból és x-ből, melly 6x-hez még 5 kell, hogy a' keresett szám kiteljen; — hasonlólag 7-ből és y-ból, melly 7y-hoz még 3 kell, hogy a' szám kiteljen.

Innen: $6x + 5 = 7y + 3$

$$x = \frac{7y + 3 - 5}{6}$$

$$x = \frac{7y-2}{6} = y + \frac{y-2}{6}, \quad \ldots \text{ I.}$$

$$\frac{y-2}{6} = a, \; y-2 = 6a, \; y = 6a+2. \quad \ldots \text{ II.}$$

az y' értekét az I egyenletbe tévén:

$$x = 6a+2+\frac{6a+2-2}{6}$$

$$x = 7a+2, \quad \ldots \ldots \ldots \text{ III.}$$

tehát x' és y' értékei, ha

$a = 0, \quad x = 2, \quad y = 2$
$= 1, \quad x = 9, \quad y = 8$
$= 2, \quad x = 16, \quad y = 14$
$= 3, \quad x = 23, \quad y = 20$ 'sat.

's a' kivánt számnak értékei: $6x+5 = 7y+3$

$$\left.\begin{matrix} 6.2+5 \\ 7.2+3 \end{matrix}\right\} = 17, \quad \left.\begin{matrix} 6.9+5 \\ 7.8+3 \end{matrix}\right\} = 59, \quad \left.\begin{matrix} 6.16+5 \\ 7.14+3 \end{matrix}\right\} = 101,$$

2. *feladat.* Egy férfiakból és nőkből álló társaság ebédelt vendéglőben, 's fizettek összesen 215 forintot. A' férfiak fejenként fizettek 5 —, a' nők $1\frac{1}{2}$ forintot. Hány férfiból, — és hány főből állhatott a' társaság?

felold. férfi volt $= x$, nő $= y$

$$5x + 1\tfrac{1}{2}y = 215$$

$$5x + \frac{3y}{2} = 215$$

$$10x + 3y = 430$$

$$3y = 430 - 10x$$

$$y = \frac{430-10x}{3}$$

$$y = 143 + \frac{1-10x}{3}$$

vagy: $y = 143 - \frac{10x-1}{3}$

$$y = 143 - 3x - \frac{x-1}{3}. \quad \ldots \ldots \text{ I.}$$

Legyen $\frac{x-1}{3} = a$, $x-1 = 3a$

$$x = 3a+1; \quad \ldots\ldots \text{II.}$$

az x' ezen értekét az I-ben helyette tévén:

$$y = 143 - 9a - 3 - \frac{3a+1-1}{3}$$

$$y = 140 - 9a - a$$

$$y = 140 - 10a. \quad \ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

Az x' és y' értékei ezek lesznek:

ha	$a = 0$,	$x = 1$,	$y = 140$
	$= 1$,	$x = 4$,	$y = 130$
	$= 2$,	$x = 7$,	$y = 120$
	$= 3$,	$x = 10$,	$y = 110$
		'sat.	'sat.
ha	$a = 13$,	$x = 40$,	$y = 10$
	$= 14$,	$x = 43$,	$y = 0$.

Látnivaló hogy ezen feladat csak 13 féle feloldást szenved meg; — mert már ha $a = 14$, akkor $y = 0$, azaz egy nő sem lett volna, — mi a' feladat' feltételei ellen van. — Az x' értékei nőnek 3-, az y-néi fogynak 10 különbséggel, — t. i. az alapegyenletben

$$10x + 3y = 215$$

az x' és y' kicserélt együtthatóival.

És hogy az x' és y' talált értékei a' feladat feltételeinek megfelelnek, világos, — mert:

1.5 *forint* $+ 140.{}^3/_2$ *forint* $= 215$ *forint.*

4.5 „ $+ 130.{}^3/_2$ „ $= 215$ „

7.5 „ $+ 120.{}^3/_2$ „ $= 215$ „

'sat. 'sat.

Jegyzet. Ha három ismeretlen van a' feladatban: akkor két egyenlet készíttetik; — egy ismeretlen a' szokott módon kiirtatik; — a' megmaradt kettővel pedig rendesen bánunk. p. o.

3) *feladat.* Húszan sereztek együtt, — megittak 60 garas áru sert; — a' férfiak fizettek hathat garast, — a' nök négyet-négyet, — a' gyermekek kettőt-kettőt. — Hány férfi? hány nő?, — hány gyermek volt?

felold. férfi $= x$, nő $= y$, gyermek $= z$.

$$\text{I}, \quad x + y + z = 20$$
$$\text{II}, \quad 6x + 4y + 2z = 60.$$

az I-ből: $x = 20 - y - z$; *A.*

a' II-ből: $x = \frac{60 - 4y - 2z}{6}$

össze-téve: $20 - y - z = \frac{60 - 4y - 2z}{6}$

$$= 120 - 6y - 6z = 60 - 4y - 2z$$
$$= 60 = 2y + 4z$$
$$= 30 = y + 2z$$
$$y = 30 - 2z; \; B.$$

már a' z-nek olly értékeket kell adni, mellyhez kepest a' többiek' értékei is a' feltételeknek megfeleljenek. p. o.

ha: $z = 11$, úgy: $y = 8$, $x = 1$
$z = 12$, „ $y = 6$, $x = 2$
$z = 13$, „ $y = 4$, $x = 3$
$z = 14$, „ $y = 2$, $x = 4$

és valóban:

$$2 . 6 + 6 . 4 + 12 . 2 = 60$$
$$1 . 6 + 8 . 4 + 11 . 2 = 60$$
$$3 . 6 + 4 . 4 + 13 . 2 = 60. \text{ 'sat.}$$

4) *feladat.* Háromféle bort akar valaki elegyíteni: az elsőnek itczéje 36-, a' 2-diké 24-, a' 3-diké 16 kr.; ezekből 40 itczét akar úgy elegyíteni, hogy az elegy' itczéje 20 krt. érjen. Mellyikből hány itczét vegyen?

feloldás: az elsőből $= x$, — 2-dikból $= y$, 3-dikból $= z$ itczét.

$$\text{I, } x+y+z=40$$
$$\text{II, } 36x+24y+16z=800$$

az I-ből: $x = 40-y-z$

a' II-ből: $x = \frac{800-24y-16z}{36}$

összetéve: $40-y-z = \frac{800-24y-16z}{36}$

$$1440-36y-36z = 800-24y-16z$$
$$1440-800 = 36y-24y+36z-16z$$
$$640 = 12y+20z$$
$$y = \frac{640-20z}{12} = \frac{160-5z}{3}$$

már ezen: $y = \frac{160-5z}{3}$ egyenletben találgatással kell a' z-nek értéket adni. p. o. legyen: $z = 21$, akkor $y = \frac{160-21.5}{3} = 18\frac{1}{3}$; és $x = 40-y-z = 40-18\frac{1}{3}-21 = \frac{2}{3}$. — 'S ekként találgatások által illyen értékekre akadunk:

$z = 21$,	22,	24,	„ „	30
$y = 18\frac{1}{3}$,	$16\frac{2}{3}$,	$13\frac{1}{3}$,	„ „	$3\frac{1}{3}$
$x = \frac{2}{3}$,	$1\frac{1}{3}$,	$2\frac{2}{3}$,	„ „	$6\frac{2}{3}$ 'sat.

125. §.

Vannak feladatok, mellyek határozottaknak látszanak, — mégis valóban határozatlanok. p. o. mellyik 3 szám az, mellyek közűl a' két első' összege $= 40$, — a' két utolsó' összege $= 100$, — az utolsó' és első'

különbsége $= 60$? — Elnevezvén a' 3 számot x-, y-, z-vel, illyen egyenletek állnak elő:

$$x + y = 40$$
$$y + z = 100$$
$$z - x = 60.$$

Úgy látszik mintha a' feladat határozott volna, mert épen annyi egyenlet van, mint ismeretlen. — Azonban pedig az utolsó feltétel, semmi új egymástóli függését a' számoknak nem mutat, — csak azt ismétli, mi a' két elsőbben már ki van fejezve; — mivel csak össze kell adni a' két első egyenletet, kijő a' 3-dik; — következőleg a' feladat határozatlan; — 's az előadott módon feloldatván, illy számok jönek ki:

$x = 1,$	2,	3,	4,	5
$y = 39,$	38,	37,	36,	35
$z = 61,$	62,	63,	64,	65

126. §.

Vannak végre ollyan feladatok is, mellyeknek feloldása lehetetlen, vagyis mellyekben az ismeretleneknek nem lehet olly értékeket találni, mellyek a' feladat' feltételeinek megfelelnének. — Ez az eset van, ha vagy a' feladat' feltételei egymásnak ellenmondanak, — mi az egyenletek' változtatásakor tüstént szembe tűnik; — vagy ha azon feltételek épen igenleges —, arányos számokat kivánnak, — 's a' feloldásban tört-, nemleges-, vagy aránytalan számok jönek ki. — p. o.

feladat. 3 számot találni, mellyek közűl a' két első' összege $= 28$, — a' két utolsó' összege $= 30$, — az első' és utolsó' különbsége $= 15$ legyen?

felold. legyenek a' számok: x, y, z.

$$\text{I},\ x+y=28$$
$$\text{II},\ y+z=30$$
$$\text{III},\ x-z=15$$

az I-et a' II-ból kivonván:

$$z-x=2$$

ezt a' III-hoz adván:

$$x-z+z-x=17$$
$$o=17$$

melly utolsó egyenlet képtelen lévén: a' feladat fel nem oldható.

ÖTÖDIK SZAKASZ.

Viszonyok, — Arányok, — Sorzatok.

(Ratio, — Proportio, — Progressio).

ELSŐ CZIKKELY.

A' viszonyokról.

127. §.

Két mennyiségnek egymáshoz képesti nagysága neveztetik *viszony*-nak. Kétképen lehet pedig a' mennyiségeket egymással egybevetni; t. i. vagy azt nézzük, *hánnyal* több, vagy kevesebb egyik a' másiknál? — mit *kivonás* által lehet megtudni, midőn a' viszonyt mutatja a' *különbség;* — vagy pedig azt nézzük *hányszorta* nagyobb, vagy kisebb egyik a' másiknál?, — mit *elosztás* által lehet megtudni, — midőn a' viszonyt mutatja a' *hányados.* — Innen a' viszony kétféle, u. m.

1) *Különbségi-*, vagy *számtani viszony* (ratio arithmetica), mellyben két mennyiség közti különbséget nézzük; — 's ennek jegye a' két szám (úgynevezett *tagok*) közé tett vizmentes vonal, t. i. a' kivonás' jegye, — vagy némellyek szerint ez (÷), 's mások szerint egy pont. p. o. $5-9$, vagy $5 \div 9$, vagy 5.9; — 's így mondatik ki: *„öt kilenczhez"*. —

2) *Hányados-*, vagy *tértani viszony*, (ratio geometrica), mellyben a' két tag' hányadosát tekintjük, — 's mivel az elosztás által jő ki: innen ezen viszony' je-

gye az a' mi az elosztásé (:) p. 5 : 15, — öt *tizenöthöz.*

A' melly viszonyban a' második tag nagyobb az elsőnél, az *növőnek* — (ratio crescens), — a' mellyben pedig az első tag nagyobb a' másodiknál, az *fogyónak* (decrescens) neveztetik.

A' növő számtani viszonynál a' különbség, — 's a' tértaninál a' hányados kijő, ha amott az első tag a' másodikból kivonatik, — itt az elsővel a' második elosztatik. p. o. 5 — 9, különbség = 4, és 4 : 8, hányados = $^8/_4$ = 2. — A' *fogyónál* a' 2-dik tagot kellene az elsőből kivonni, — vagy azzal ezt elosztani. p. 9 — 5, különbség = 4, és 8 : 4, hányados = $^8/_4$ = 2. — Azonban szokottabb az, hogy itt is az első tag vonatik ki a' másodikból, — 's ekkor a' különbség nemleges, — vagy az elsővel osztatik el a' második, 's ekkor a' hányados valóságos törtszám. p. o. 9 — 5, különbség = — 4, és 8 : 4, hányados = $^4/_8$ = $^1/_2$, — *így* ezen számtani viszonyoknak: 13 — 39, 14 — 15, 20 — 12 különbségeik: 26, 1, — 8; és ezen tértani viszonyoknak: 12 : 36, 14 : 21, 18 : 8, hányadosaik: 3, $^3/_2$, $^4/_9$.

A' tértani viszonyok, látnivaló, nem egyebek mint elosztási példák, vagy törtszámok, — és a' mi azokról igaz, mind az igaz a' tértani viszonyokról is.

128. §.

Egyenlő számtani viszonyok azok, mellyeknek különbségök ugyanaz, p. o. 2 — 7, és 5 — 10 egyenlők, mert mindeniknél a' különbség = 5. *Egyenlő tértani viszonyok* azok, mellyeknek hányadosuk ugyanaz, p. o. 2 : 4, 3 : 6 egyenlők, mert mindeniknél a' hányados = 2. — Így: 15 — 8, 10 — 3, 8 — 1 egyenlő számtani viszonyok, mert mindnyájának különbsége = — 7; — és 8 : 1, 80 : 10, 24 : 3 egyenlő tértani viszonyok, mert

a' hányados mindnyájában $= 1/8$. Ellenben 8:3, és 9:24 nem egyenlő viszonyok, mert az első' hányadosa $= 3/8$, a' másodiké $= 8/3$. Az illyen viszonyok, mellyek közül egyik növő, másik fogyó, — 's ha egyiket megfordítnánk egyenlőkké válnának, — neveztetnek *viszás viszonyoknak* (rationes inversae, vagy indirectae), — míg az egyenlők, *egymenetelüeknek* (directae). — A' melly viszonyok egy harmadikkal egyenlők: azok egymással is egyenlők. — Az egyenlő viszonyokat egymással fel lehet cserélni. p. o. akár ezt mondjam: ugy van az én pénzem a' tiedhez, mint 3:6, — akár ezt: úgy van mint 4:8, mindegy.

129. §.

A' *számtani viszonyban* a' második tag származik az elsőből, — ha növő hozzáadatván-, ha fogyó kivonatván belőle a' különbség. p. o. $5-8=5-(5+3)$, és $8-5=8-(8-3)$. Ha tehát az első tag $= a$, különbség $= d$: a' számtani viszony' egyetemes képlete ez: $a-(a\pm d)$. — Vagy így is mondhatom: a' 2-dik tag származik az elsőből (a), — hozzá adatván a' különbség (d), melly a' növőben +, a' fogyóban — jegyü, de mindenik esetben a' *d*' hozzá adása által előterjesztethetik, — 's e' szerint egyetemes képlet: $a-(a+d)$.

A' *tértani viszonyban* a' 2-dik tag származik az elsőből, — ha növő, sokszoroztatván az a' hányadossal, — ha fogyó, azzal elosztatván. p. $4:8=4:4\times 2$, és $8:4=8:{}^8/_2$. Ha tehát az első tag $= a$, — hányados $= q$: a' tértani viszony' egyetemes képlete ez: $a:aq$ növőjé, $a:{}^a/_q$ fogyóé. — Vagy így is mondhatom: a' 2-dik tag származik az elsőből (a), sokszoroztatván az a' hányadossal (q), melly a' növőben épszám, vagy lárvás tört, — a' fogyóban valóságos tört, — de a' sokszorozó q által előterjesztethetik, — 's e' szerint e-

gyetemes képlet: a : aq. p. o. 4 : 8, hányados $= {}^{8}/_{4} = 2$, és így: $4 : 8 = 4 : 4 \times 2$; és 8 : 4, hányados $= {}^{4}/_{8} = {}^{1}/_{2}$, — és így $8 : 4 = 8 : 8 \times {}^{1}/_{2}$; az elsőben $q = 2$, a' másodikban $q = {}^{1}/_{2}$.

130. §.

A' viszony' értéke, a' számtaninál ugyan a' különbség, a' tértaninál pedig a' hányados levén: változtathatni a' viszony' tagjait, a' nélkül hogy annak értéke változnék; jelesen

1) a' számtani viszony' értéke változatlan marad, ha mindkét tagjához ugyanaz adatik, — vagy mindkettőből ugyanaz vonatik ki. p. o. $a - (a + d)$, ha mindenik tagjához p adatik lesz: $(a + p) - (a + d + p)$, — mindenik esetben d a' különbség, és így a' viszony' értéke nem változott. Így $5 - 7$, hozzájok adva 3-t: $8 - 10$, és kivéve 3-t: $2 - 4$; és $5 - 7 = 8 - 10 = 2 - 4$.

2) a' tértani viszony' értéke változatlan marad, ha annak (mint törtszámnak) mindkét tagja (első = nevező, második = számláló) ugyanazon mennyiséggel sokszoroztatik, vagy elosztatik. p. o. a : aq, ha m-el sokszoroztatik, lesz: am : amq; — 's ha n-el elosztatik lesz: $\frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$; — és $a : aq = am : amq$, — és $a : aq = \frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$, mert mindben q a' hányados, — pedig a' hányados teszi a' viszony' értékét. Így: 2 : 4, ha 3-al sokszoroztatik lesz: 6 : 12, — ha 2-vel elosztatik: 1 : 2; és: $2 : 4 = 6 : 12 = 1 : 2$, mindben 2 a' hányados.

Gyakran a' nagy számokkal kifejezett viszony átláthatóbbá lesz, ha mindkét tagjai ugyanazon számmal elosztatnak, p. o. 18 : 63, elosztva 9-el lesz: 2 : 7.

Ha a' tértani viszonynak vagy egyik- vagy mindkét tagja törtszám: épszámuakká változtathatjuk, ha egyik' számlálóját a' másik' nevezőjével sokszorozzuk, — 's a' nevezőt mindenik alól elhagyjuk. p. o. $\frac{2}{3} : 5$ lesz $= 2 : 15$; mert a' viszony mindkét tagját 3-szorta tettem nagyobbá; — és $\frac{2}{3} : \frac{5}{4}$ lesz $= 8 : 15$, — az első tagot a' nevező 3' elhagyása által 3-szorta, — és ismét a' másik' nevezőjével is sokszorozván 3×4-szerte tettem nagyobbá; hasonlóul a' másik tagot is a' nevező 4' elhagyása által 4-szerte, — és ismét a' másik tag' nevezőjével is sokszorozván 4×3-szorta tettem nagyobbá; 's e' szerint mindkét tagot ugyanazzal, t. i. 3×4-el sokszoroztam.

132. §.

Ha több tértani viszonyok' első tagjai egymással, 's utolsó tagjai egymással sokszoroztatnak, onnan származik úgynevezett *összetett viszony*, mellynek hányadosa a' külön, egymással sokszorozott viszonyok' hányadosainak sokszorozmánya. — Ugyanis minden viszony' hátulsó tagja nem egyéb, mint az első tag' és a' hányados' sokszorozmánya; innen midőn minden hátulsó tagok sokszoroztatnak egymással, az itt eredő sokszorozmányban megvannak mint sokszorozók, minden első tagok, és minden hányadosok; és ha ez az első tagok' sokszorozmányával elosztatik, hányadosul ki jő a' külön viszonyok' minden hányadosainak sokszorozmánya. p. o.

a : am, *hányados* m
b : bn, „ „ n
c : cr, „ „ r

abc : abcmnr, *hányados:* mnr

így: 2 : 4, *hányados* 2
3 : 9, „ „ 3
4 : 6, „ „ $\frac{3}{2}$

24 : 116, *hányados* 9

Már ha az egyszerű viszonyok egyenlők: akkor az összetett viszony' hányadosa, az egyszerűek' közös hányadosának annyidik hatványa, a' hány egyszerű viszonyok tétetnek össze, — t. i. négylege ha két-, koczkája ha három egyenlő viszonyok tétetnek össze. 'sat. p. o.

a : aq	a : aq	$2 : 4$	$2 : 4$
b : bq	b : bq	$3 : 6$	$3 : 6$
$ab : abq^2$	c : cq	$6 : 24$	$4 : 8$
	$abc : abcq^3$		$24 : 192$

És mivel az egyenlő viszonyokat egymás helyett lehet tenni: az illyen összetett viszony egyenlő mind azon viszonyokkal, mellyek származnának, ha az egyszerű viszonyok közül akármellyik, a' többi helyett is tetetvén, maga magával annyi ízben sokszoroztatnék, vagyis annyidik hatványra emeltetnék, a' hány külön egyszerű viszony van; p. o.

2 : 4 vagy	2 : 4 vagy	3 : 6 vagy	4 : 8
3 : 6	2 : 4	3 : 6	4 : 8
4 : 8	2 : 4	3 : 6	4 : 8
$24 : 192 =$	$8 : 64 =$	$27 : 216 =$	$64 : 512$

A' honnan a' két- három- 'sat. egyenlő viszonyokból összetett viszonyok *négyleg-, koczka-* 'sat. *viszonyok*nak is (ratio quadratica, cubica, vagy duplicata, triplicata 'sat.) neveztetnek.

Azon viszony, mellyben vannak valamelly viszonynak négyleg-gyökerei, *alnégyleg* (r. subquadratica); az pedig mellyben vannak koczkagyökerei, *alkoczka viszonynak* (r. subcubica) neveztetik; p. o. ezen viszonynak: a : b alnégyleg viszonya $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, — alkoczka viszonya: $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$.

132. §.

Ha több tértani viszonyok' első tagjai egymással, és utólsó tagjai egymással összeadatnak:

az itt származó viszony, minden egyes viszonyokkal egyenlő lesz; — vagy az egyenlő tértani viszonyok' első tagjainak összege, úgy van utólsó tagjainak összegéhez, mint azok közül akármellyik viszony' első tagja, saját utólsó tagjához. p. o.

a : am	2 : 4
b : am	3 : 6
c : cm	4 : 8
(a + b + c) : (am + bm + cm)	9 : 18

Ha az első taggal (a + b + c), az utólsó tag (am + bm + cm) elosztatik: hányados lesz = m, melly minden külön viszonyoknak is hányadosa. És így: (a + b + c) : (am + bm + cm) = a : am = b : bm = c : cm.

Hasonlóul két egyenlő viszonyok' első tagjainak különbsége, úgy van utólsó tagjainak különbségéhez, mint akármellyik külön viszony' első tagja saját utólsójához.

a : am	4 : 8
b : bm	3 : 6
(a — b) : (am — bm)	1 : 2

ha a — b-vel elosztatik am — bm; hányados lesz = m; — és így: (a — b) : (am — bm) = a : am = b : bm.

MÁSODIK CZIKKELY.

Az arányokról.

133. §.

Ha két egyenlő viszonyok egyenlőség' jegyével összeköttetnek: előáll az *arány* (proportio), melly tehát nem egyéb, mint két viszonyok' egyenlősége, — 's így mondjuk ki: a' mint van az egyik viszony' első tagja a' maga' utolsójához, — úgy van a' másik viszony'

első tagja is a' maga' utolsójához. — Ha két számtani egyenlő viszonyok köttetnek össze: azokból lesz *számtani arány*, p. o. $5-7=9-11$, — vagy egyetemes képlettel: $a-(a+d)=b-(b+d)$. — Ha pedig tértani egyenlő viszonyok köttetnek össze: azokból lesz *tértani arány*, p. o. $2:4=3:6$, vagy egyetemes képlettel: $a:aq=b:bq$.

Ha az egyenlő viszonyok mindketten vagy növök, vagy fogyók: akkor az arány *egyenes*, p. o. $2:4=6:12$, vagy $4:2=12:6$; — ha pedig egyik növő, másik fogyó: akkor az arány *fonák*, vagy *viszás*, p. o. $2:4=12:6$.

Minden arány 4 tagból áll, mellyek közül az első és negyedik, *szélső*knek; — a' második és harmadik, *belső*knek, vagy *középső*knek; — viszont az első és harmadik, *előtago*knak; — a' 2-dik és 4-dik, *utótago*knak; — 's az előtagok egymáshoz-, és utótagok egymáshoz képest, *egynevű* tagoknak neveztetnek. p. o.

$$2:4=3:6$$

a' 2 és 6 *szélsők*, — a' 4 és 3 *belsők*; a' 2 és 3 *előtagok*, 's *egynevűek*, — a' 4 és 6 *utótagok* 's hasonlólag *egynevűek*.

A' melly arányban a' két középső tag ugyanazon mennyiség: az neveztetik *folytonos arány*nak (prop. continua), p. o. $3-7=7-11$, és $6:18=18:54$, mellyet három taggal irhatunk, egyenletjegy nélkül, a' számtaninak eleibe tévén ezen jegyet ($\div$) a' tértaninak pedig ezt ($\div\div$) p. o.

$$\div\ 3-7-11$$
$$\div\div\ 6:18:54$$

Itt a' középső tag neveztetik *középszeres*nek vagy *közép-arányos*nak (medius proportionalis), az utólsó tag *harmadarányos*nak (tertius proportionalis), — mellyek tehát vagy számtaniak, vagy tértaniak.

134. §.

A' számtani arány' fő törvénye ez: *a' két szélső tagok' összege annyi mint a' két belsőké.* p. o.

$$3-7=5-9, \qquad \begin{matrix} 3+9=12 \\ 7+5=12 \end{matrix}$$

Ugyanis az utótagok állván az előtagokból és a' különbségből:

$$3-(3+4)=5-(5+4)$$

mikor a' szélsők összeadatnak, akkor sajátlag ezen 3 részekből áll elő egy összeg: az első viszony' első tagjából, a' 2-dik viszony első tagjából, és a' különbségből, $(3+5+4)$; — mikor a' középsők adatnak össze, akkor is épen ezen 3 részekből áll elő egy összeg $(3+4+5)$, csak hogy most a' különbség az első viszony' előtagja mellett van; — már pedig ugyanazon részek ugyanazon összeget adják; és így a' szélső tagok' összege a' belsőkével egyenlő. — Vagy így is megmutathatjuk:

$$3-7=5-9,$$

mivel a' számtani arányok nem egyebek, mint kivonási példák, — ezen feltett egyenletben, a' tagokat változtatott jeggyel átvivén, lesz:

$$3+9=5+7.$$

Innen a' folytonos számtani arányban, a' szélső tagok' összege annyi mint a' középszeres' kettőzete. p.

$$\therefore 3-7-11;\ 3+11=7.2.$$

Akármelly számtani arányból könnyű tehát egyenletet csinálni; t. i. a' két szélső tagok' összege a' két belső tagok' összegével, vagy a' folytonosoknál a' középszeres' kettőzetével egyenletbe tétetik. p.

$$5-8=3-6$$

$$5+6=8+3$$

így: $\therefore 5-8-11$

$$16=2.8.$$

Viszont akármelly egyenletből, vagyis két egyenlő összegből könnyü számiani arányt csinálni, — a' két egyenlő összeget két-két részre szakgatván, 's az egyik összeg' két részét szélső tagokká, a' másikéit pedig belsőkké tevén. p. o.

egyenlet: $4+5=6+3$

arány: $4-6=3-5$, vagy: $5-6=3-4$, vagy: $6-4=5-3$, vagy: $3-4=5-6$.

A' számtani arány' alakját változtatni lehet, a' nélkül hogy az arányosság változnék; ha ollyan változtatásokat teszünk, mellyek mellet a' szélső tagok' összege a' középsőkével egyenlőnek marad. p. o.

1) ha a' szélső tagok' helyét felcseréljük.

$$4-6=3-5$$
$$5-6=3-4$$

2) ha a' középső tagok' helyét felcseréljük.

$$4-6=3-5$$
$$4-3=6-5$$

3) ha mindenik viszonyt megfordítjuk.

$$4-6=3-5$$
$$6-4=5-3$$

4) ha ezenkivül az első viszonyt utolsóvá is teszszük.

$$4-6=3-5$$
$$5-3=6-4$$

5) ha az arány' minden tagját ugyanannyival növesztjük vagy fogyasztjuk. p.

$$4-6=3-5,$$

2-vel növ. $6-8=5-7$

2-vel fogy. $2-4=1-3$

6) ha vagy csak az előtagokat, vagy csak az utótagokat ugyanannyival növesztjük, vagy fogyasztjuk.

$$4-6=3-5 \begin{cases} 5-6=4-5 \\ 4-7=3-6 \end{cases} \begin{matrix} \text{előtag} \\ \text{utótag} \end{matrix} \Big\} \text{1-el növ.}$$

$$\begin{cases} 3-6=2-5 \\ 4-5=3-4 \end{cases} \begin{matrix} \text{előtag} \\ \text{utótag} \end{matrix} \Big\} \text{1-el fogy.}$$

Szinte az előadott főtörvényből következőleg, a' számtani arány' négy tagjai közül kiadatván három, a' 4-diket, akármelly helyen esőt, könnyű kikeresni, — a' keresendőt x-nek nevezvén, — az arányból egyenletet csinálván, 's abból az x-et kifejtvén. p. o.

arány. $a-b=c-x$, vagy: $x-b=c-a$

egyenl. $a+x=c+b$

innen. $x=c+b-a$

E' szerint ha valamellyik szélső tag keresendő: adassanak össze a' két belsők, 's ezen összegből a' kiadott szélső vonassék ki.

Hasonlólag:

$$a-b=x-c$$

vagy: $a-x=b-c$

egyenl. $a+c=b+x$

innen. $x=a+c-b$

E' szerint ha valamellyik középső tag keresendő: adassanak össze a' két szélsők, 's ezen összegből a' kiadott középső vonassék ki.

Sőt ha csak az egynevű pár tagok adatnak is ki, a' különbséggel együtt: ezekből a' másik pár egynevű tagokat ki lehet csinálni; — mert ha előtagok a és b, — különbség d: utótagok lesznek $a+d$, és $b+d$; — ha utótagok a és b, kül. d: előtagok lesznek: $a-d$, $b-d$.

A' *folytonos számtani arány*ban, épen illy módon, akármelly tagot kikereshetni; — péld. a' *középszeres* kijő, ha a' két szélsők' összege 2-vel elosztatik; — mert, mint mondánk, a' középszeres' kettőzete annyi mint a' két szélsők' összege:

$$\therefore a - x = b$$
$$2x = a + b$$
$$x = \frac{a+b}{2}$$

Innen akármelly két szám között számtani középszerest úgy találunk, ha a' kiadott két számot úgy tekintvén, mint folytonos arány' szélső tagjait, összeadjuk azokat, 's az összegnek felét vesszük. p. o. 45 és 132 közt mi a' számtani középszeres? $= \frac{45+132}{2} = 88\frac{1}{2}$.

Hasonlólag ha két számhoz harmadarányos kerestetik: a' 2-dik tag' kettőzetéből az első tagot vonjuk ki, 's kijő a' keresett szám, — mert

$$\therefore a - b = x$$
$$a + x = 2b$$
$$x = 2b - a.$$

így 15 és 47-hez 3-adarányos lesz:
$= 2 \times 47 - 15 = 79$, 's valóban: $\therefore 15 - 47 = 79$.

Jegyzet. Gyakran a' kisérletekben, 's közéletbeni számításokban, nem csak két — de több számok közt is keresünk középszerest, olly móddal, hogy a' számokat összeadjuk, 's az összeget elosztjuk annyival, a' hány számot adtunk össze, — p. o. ha megakarjuk tudni, hogy valamelly helyen mi a' légmérő' közép állása, — feljegyezzük azt p. egy éven által minden naponként, — ezen 365 különböző állást mutató számokat összeadjuk, 's az összeget 365-el elosztjuk, — a' hányados mutatja az ezen évbeni közép állást. Igy ha megakarjuk tudni, hogy valamelly városban millyen a' halandóság, közép számmal: több, p. 10 évről feljegyezzük mindenikben különkülön hány halt meg, — ezen 10 számot összeadjuk, 's az összeget 10-el elosztjuk.

A' számtani arányoknak alig vesszük más hasznát, mint a' számtani középszeres' kikeresését. — Ellenben a' tértani arányok' használata minden mértani tudományokban felette kiterjedt. Innen mikor a' mértanárok arányt emlegetnek, mindig tértanit értenek, — ha csak a' *számtani* melléknév nyilván ki-nem tétetik; mit a' következőkben mi is követendünk.

135. §.

A' tértani arány' fő törvénye ez: *a' két szélsők' sokszorozmánya annyi mint a' két belsőké. p. o.*

$2 : 4 = 3 : 6$, $\quad a : aq = b : bq$

$2 . 6 = 4 . 3$ $\quad abq = aqb.$

Ugyanis mint az egyetemes képlet mutatja, mind a' két szélsők', mind a' két belsők' sokszorozmánya három ugyanazon sokszorozókból, t. i. az első viszony' előtagjából $= a$, — a' második viszony' előtagjából $= b$, — és a' hányadosból $= q$ cred; — már pedig ugyanazon sokszorozók ugyanazon sokszorozmányt adnak.

Vagy így is megmutathatjuk:

$2 : 4 = 3 : 6$, mivel a' tértani arányok törtszámok, másként írva: $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$, — 's ebből az egyenletek' törvénye szerint lesz: $4 . 3 = 6 . 2$.

Innen a' folytonos tértani arányoknál, a' két szélsők' sokszorozmánya annyi mint a' középszeres' négylege.

$\div 2 : 4 : 8$

$2 . 8 = 4^2$.

Innen akármelly tértani arányból egyenletet lehet csinálni, úgy hogy a' két szélső tagok' sokszorozmánya tegye az egyenlet' egyik részét, — a' két belsőké pedig a' másikat. p. o.

arány $\quad a : b = c : d$

egyenl. $\quad ad = bc.$

Viszont akármelly egyenletből tértani arányt lehet csinálni, — úgy hogy az egyenlet' mindkét részét két-két sokszorozókra fejtjük, 's az egyik pár sokszorozóból szélső —, a' másik párból belső tagokat csinálunk. p. o. $12 = 12$, sokszorozókra fejtve: $3 \times 4 = 2 \times 6$, arány lesz: $3 : 6 = 2 : 4$ sat. Hasonlólag: $x = ab$, sok-

szorozókra fejtve: $1 . x = a . b$, arány lesz: $1 : a = b : x$ 'sat; így: $nd - d = ag - bg$, sokszorozókkal: $d . (n-1) = g . (a-b)$, arány lesz: $d : g = a - b : n - 1$.

136. §.

A' tértani arány' valamelly ismeretlen tagját az előadott főtörvény' nyomán kikeresni igen könnyű; jelesen:

1) akármellyik szélső tag kijő, ha a' két belsők' sokszorozmánya a' kiadott szélsővel elosztatik; mert

$$a : b = c : x, \text{ vagy: } x : b = c : a,$$
$$ax = bc$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

Három számhoz tehát negyedik arányost úgy találunk, ha az elsővel, a' 2-dik' és 3-dik' sokszorozmányát elosztjuk. p. o. 5, 8, 13-hoz mi a' negyedarányos? —

$$\frac{8 \times 13}{5} = \frac{104}{5} = 20{,}8. \text{ és valóban}$$
$$5 : 8 = 13 : 20{,}8, \text{ mert}$$
$$5 \times 20{,}8 = 8 \times 13$$

2) akármellyik belső tag kijő, ha a' két szélsők' sokszorozmánya a' kiadott belsővel elosztatik, mert

$$a : x = b : c, \text{ vagy: } a : b = x : c$$
$$bx = ac$$
$$x = \frac{ac}{b}$$

3) az előtagokból és a' hányadosból az utótagokat,— vagy az utótagokból és a' hányadosból az előtagokat ki lehet csinálni. p. ha egyik előtag $= a$, másik $= b$, hányados $= q$: lesz egyik utótag $= aq$, másik bq. — Ha egyik utótag $= a$, másik $= b$, hányados $= q$: lesz egyik előtag $= \frac{a}{q}$, másik $= \frac{b}{q}$.

4) a' folytonos tértani arányban, a' középszeres kijő, ha a' két szélsők' sokszorozmányából négyleggyökér vonatik; mert

$$\div a : x : b$$
$$x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}.$$

Akármelly két szám közt tehát tértani középszerest találunk, ha a' két szám' sokszorozmányából négyleggyökeret vonunk. p. o. 15 és 27 közt mi a' tértani középszeres? $= \sqrt{15 \times 27} = \sqrt{405} = 20{,}12$; — és valóban: $\div 15 : 20{,}12 \ldots : 27$.

5) a' folytonos tértani arányban a' harmadik tag, — vagyis akármelly két számhoz harmadarányos kijő, ha a' második tag' négyleg-hatványa az első taggal elosztatik: mert

$$\div a : b : x$$
$$ax = b^2$$
$$x = \frac{b^2}{a}$$

Így: 15-höz és 22-höz mi a' harmadarányos? $= \frac{22^2}{15} = \frac{22 \times 22}{15} = \frac{484}{15} = 32\,{}^4/_{15}$, 's valóban: $\div 15 : 22 : 32\,{}^4/_{15}$.

6) a' folytonos tértani arányban, a' hányadosból, és akár az első, akár a' középső tagból, az egész arányt ki lehet egészíteni; mert legyen az első tag $= a$, — hányados $= q$: lesz:

$$a : aq = aq : aq^2;$$

legyen a' középső tag $= a$, — hányados $= q$: lesz:

$$\frac{a}{q} : a = a : aq$$

vagy: $aq : a = a : \frac{a}{q}$.

137. §.

A' tértani arány' alakját sokképen lehet változtatni, a' nélkül' hogy az arányosság felbomlanék. T. i. az arányosságnak megismertető jellemei ezek lévén: 1) a' két viszony' ugyanazon hányadosa, 2) a' két szélső, és két belső tagok' szokszorozmányának egyenlősége: míg ezen jellemek az arányban megvannak, addig az helyes, bármint változzanak tagjai. — Legyen tehát példaul:

$$a : aq = b : bq. \text{ vagy: } 3 : 5 = 6 : 10,$$

változtathatjuk következő módokon:

I. *a' szélsőket felcserélvén:*

$$bq : aq = b : a; \quad 10 : 5 = 6 : 3$$

II. *a' középsőkkel helyet cseréltetvén:*

$$a : b = aq : bq; \quad 3 : 6 = 5 : 10$$

III. *mindkét viszonyt megfordítván:*

$$aq : a = bq : b; \quad 5 : 3 = 10 : 6$$

IV. *az első viszonyt utólsóvá, az utólsót elsővé tevén:*

$$b : bq = a : aq; \quad 6 : 10 = 3 : 5$$

V. *mindenik viszony' tagjainak összegét, a' viszony' első vagy utólsó tagjához viszonyítván:*

$$a+aq : aq = b+bq : bq; \quad 8 : 5 = 16 : 10$$

$$a : aq+a = b : bq+b; \quad 3 : 8 = 6 : 16$$

VI. *mindenik viszony' tagjainak különbségét, az első — vagy utólsó taghoz viszonyítván:*

$$a : aq-a = b : bq-b; \quad 3 : 2 = 6 : 4$$

$$a-aq : a = b-bq : b; \quad -2 : 3 = -4 : 6$$

$$aq-a : aq = bq-b : bq; \quad 2 : 5 = 4 : 10$$

VII. *vagy mind a' négy-, vagy csak az egynevű pár-tagokat, vagy csak az egyik viszony' mindkét tagjait ugyanazon mennyiséggel sokszorozván:*

$$am : amq = bm : bmq; \quad 9 : 15 = 18 : 30$$

$$am : aq = bm : bq; \quad 9 : 5 = 18 : 10$$

$a : amq = b : bmq$; $3 : 15 = 6 : 30$

$ap : amq = bp : bmq$; $12 : 15 = 24 : 30$

$a : aq = bm : bmq$; $3 : 5 = 18 : 30$

$am : amq = b : bq$; $9 : 15 = 6 : 10$

$ap : apq = bm : bmq$; $9 : 15 = 24 : 40$

Ennek könyebb felvehetésére segit, ha meggondoljuk, hogy a' tért. viszony = törtszám; 's a' tért. arány = két egyenlö törtszám. p. o. $^3/_5 = {}^6/_{10}$.

VIII. *elosztván az arány' tagjait épen illyen módon:*

$$\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = b : bq; \quad 1 : \frac{5}{3} = 6 : 10.$$

$$\frac{a}{m} : aq = \frac{b}{m} : bq; \quad 1 : 5 = 2 : 10$$

$$a : \frac{aq}{m} = b : \frac{bq}{m}; \quad 3 : \frac{5}{3} = 6 : \frac{10}{3}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{aq}{n} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{n}; \quad 1 : \frac{5}{2} = 2 : 5$$

IX. *mind a' négy tagot ugyanazon fokra emelvén:*

$a^2 : a^2q^2 = b^2 : b^2q^2$; $9 : 25 = 36 : 100$

X. *mind a' négy tagból ugyanazon gyökeret vonván:*

$\sqrt{a} : \sqrt{aq} = \sqrt{b} : \sqrt{bq}$; $\sqrt{3} : \sqrt{5} = \sqrt{6} : \sqrt{10}$.

138. §.

Az arányok' ekkénti változtatásának hasznai következők:

1) az I, II, III, IV által az arány' akármelly tagját akármelly helyre tehetjük. p. o. ha ezen arányban: $a : b = c : d$, az a-t utolsóvá akarom tenni, lesz: $d : b = c : a$, vagy: $d : c = b : a$.

2) az V-dik' segitségével, ha valamelly aránynak egyik pár egynevü tagjai ismeretlenek, de összegük kiadatik, magokat azon tagokat kikereshetni; p. o. $6 : x = 9 : y$; azonban $x + y = 25$: tehát a' II. szerint: $6 : 9 = x : y$, az és V szerint: $(6 + 9) : 9 = (x + y) : y$; $15 : 9 = 25 : y$, — innen $15y = 9 \times 25$, és $y = \frac{9 \times 25}{15} = 15$; — innen: $x = 10$; és igy: $6 : 10 = 9 : 15$.

3) a' VI-diknak épen ezen haszna van, — mikor az egynevű ismeretlen pár-tagnak különbsége adatik ki.

4) a' VII-dik' segítségével az arányból a' törtszámot kiirthatni. p. o. volna ezen arány: $8 : 13\frac{1}{3} = 3 : 5$, — 3-al sokszorozván, vagy mind a' két viszony' utótagjait, — vagy az első viszony' mindkét tagjait: $8 : 40 = 3 : 15$, vagy: $24 : 40 = 3 : 5$.

5) a' VIII-dik' segítségével, valamelly nagy számokkal kifejezett arányt kisebb számokra lehet venni, ha valamellyik pár' egynevű tagjai ugyanazon mennyiséggel elosztatnak; p. o. ha ezen 3 számhoz: 320, 256, 480, negyedik arányost kell keresni, lesz: $320 : 256 = 480 : x$ és: $2 : 256 = 3 : x$, és: $1 : 128 = 3 : x$, innen $x = 384$

6) a' IX és X-nek a' hatvány- és gyökérjegyek' kiirtására vesszük hasznát; p. o. $a : b = c : \sqrt{d}$ helyett lesz: $a^2 : b^2 = c^2 : d$; így: $a : b = \sqrt[3]{c} : \sqrt{d}$ helyett: $a^2 : b^2 = \sqrt[3]{c^2} : d$, és: $a^6 : b^6 = c^2 : d^3$.

139. §.

Ha több arányok' tagjai, saját rendük szerint, egymással sokszoroztatnak: innen is helyes arány származik; — mert az arányok = egyenlő viszonyok = egyenlő törtszámok; már pedig ha egyenlők egyenlőkkel sokszoroztatnak, az egyenlőség nem változik; p. o.

$a : aq = b : bq$;	$2 : 4 = 3 : 6$
$c : cm = d : dm$;	$3 : 2 = 6 : 4$
$e : en = f : fn$;	$6 : 8 = 18 : 24$
$ace : acenmq = bdf : bdfmnq.$	$= \frac{2}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{6} \times \frac{6}{4}.$

Tudjuk azonban, hogy elosztás által (§. 138. VIII) ezen sokszorozásból eredt tagokat egyszerüsíthetjük; t. i. az egyenlő sokszorozókat, akár az egynevű tagokból, akár

egyik vagy másik viszonynak mindkét tagjaiból kihagyhatjuk. Innen erednek e' következő szabályok:

1) ha két arányban egyik-egyik viszony ugyanaz: annak másik két viszonyai is egyenlők, 's igy arányt képezhetők:

ha: a : b = c : d
és: c : d = e : f

tehát: a : b = e : f

mert: ac : bd = ce : df, — úgyde az elő-tagok c által-, az utótagok d által oszthatók, 's így lesz: a : b = e : f.

így: 3 : 6 = 5 : 10
5 : 10 = 7 : 14

3 : 6 = 7 : 14

2) ha egyik aránynak elő-, másiknak utótagjai ugyanazok: úgy az ezekenkivüli tagok is arányosok:

a : b = c : d
b : e = d : f

a : e = c : f

3 : 6 = 5 : 10
6 : 9 = 10 : 15

3 : 9 = 5 : 15.

3) ha mindeniknek elő-, vagy mindeniknek utótagjai ugyanazok: akkor is arányosok az ezeken kivüliek.

b : a = d : c
b : e = d : f

a : e = c : f

6 : 3 = 10 : 5
6 : 12 = 10 : 20

3 : 12 = 5 : 20

vagy: a : b = c : d
e : b = f : d

a : e = c : f

3 : 6 = 5 : 10
12 : 6 = 20 : 10

3 : 12 = 5 : 20

mert ezen arányokat a' második szám alatti alakra lehet változtatni: b : a = d : c
e : b = f : d.

4) ha mindenik aránynak vagy szélső-, vagy belső tagjai ugyanazok: úgy a' többi tagok viszáson arányosok:

a : b = c : d	3 : 6 = 5 : 10
a : e = f : d	3 : 2 = 15 : 10
e : b = c : f	6 : 2 = 15 : 5
igy: a : b = c : d	3 : 6 = 5 : 10
e : b = c : f	15 : 6 = 5 : 2
a : e = f : d	3 : 15 = 2 : 10.

5) ha mindenik aránynak csak egyik viszonyában vannak egyenlő tagok: akkor a' másik viszony' sokszorozmányát nem egyszerűsíthetni.

a : b = c : d	3 : 6 = 5 : 10
e : f = d : g	4 : 8 = 10 : 20
ae : bf = c : g	12 : 48 = 5 : 20

6) ha több arányok tétetnek össze, mellyekben a' mi az elsőnek 4-dik tagja, az a' 2-diknak harmadik, — és a' mi a' 2-dikban 4-dik tag, a' 3-dikban harmadik 'sat.: ezen egyenlő tagok mind ki maradhatnak.

a : b = c : d	3 : 6 = 5 : 10
e : f = d : g	2 : 4 = 10 : 20
h : i = g : h	5 : 7 = 20 : 28
l : m = h : n	6 : 9 = 28 : 42
aehl : bfim = c : n	180 : 1512 = 5 : 42

Általában midőn több arányokat, — avvagy csak viszonyokat össze akarunk tenni: az előadott módokon, közös sokszorozók' kihagyása által a' sokszorozmányt egyszerűsíthetjük. p. o.

2 : 4 = 1 : 2	vagy: „ : „ = 1 : „
2 : 3 = 4 : 6	2 : „ = „ : „
4 : 8 = 2 : 4	„ : 8 = „ : „
3 : 9 = 6 : 18	„ : 9 = „ : 18
5 : 2 = 10 : 4	5 : „ = 10 : 4
240 : 1728 = 480 : 3456	10 : 72 = 10 : 72.

140. §.

1) Legyen ezen arányunk:

$$a : b = a : b$$

osszuk el az első viszonyt ugyanazon mennyiséggel, lesz: $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b.$

Innen látniváló, hogy az egynevezőjű törtszámok úgy vannak egymáshoz, mint azoknak számlálóik.

2) Legyen ezen arányunk:

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{a}{m} : \frac{a}{n},$$'s ha $a = 1$

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{1}{m} : \frac{1}{n},$$ a' harmadik és negyedik tagot egy nevezőre vévén:

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{n}{mn} : \frac{m}{nm}$$

úgyde: $\frac{n}{nm} : \frac{m}{nm} = n : m$

következőleg: $\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = n : m.$

Innen látnivaló, hogy az egyszámlálójú, de különnevezőjű törtszámok, az ő nevezőiknek fonák viszonyában vannak egymáshoz.

3) Legyen ezen arányunk:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

a' harmadik és negyedik tagot egy nevezőre vevén:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$$

úgyde: $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc$

következ. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$

Innen látnivaló, hogy az ollyan törtszámok, mellyeknek

mind nevezőjök, mind számlálójok különböző, úgy vannak egymáshoz, mint az egyiknek számlálójából, másiknak nevezőjéből kölcsönösen eredt sokszorozmányok.

Ezen szabályok szám-példákban:

1) $^3/_{10} : {}^9/_{10} = 3 : 9 = 1 : 3$
2) $^3/_4 : {}^3/_8 = 8 : 4 = 2 : 1$
3) $^2/_7 : {}^5/_8 = 16 : 35.$

141. §.

Tudjuk hogy a' 3 tagból álló folytonos arányon, p. $\div a : b : c$, értjük ezen arányt: $a : b = b : c$. — Ha pedig a' folytonos aránynak még negyedik tagja is van, *a*, *b*, *c*, *d:* akkor lesz belőle folytatott arány:

$$a : b = b : c = c : d.$$

És az illyen folytatott arány állhat akárhány tagokból. Azonban bebizonyítható, hogy

ha: $a : b = b : c$
tehát: $a^2 : b^2 = a : c$
mert: $ac = b^2$, ezen egyenletet *a*-val sokszorozva: $a^2c = ab^2$
innen: $a^2 : b^2 = a : c.$

Továbbá a' négytagú folytatott aránynál

$a^3 : b^3 = a : d$
mert: $a : b = b : c$
innen: $a^2c = b^2a$
azonban: $a : b = c : d$
's innen: $ad = bc$

Ezen két egyenlet: $\left\{\begin{matrix} a^2c = b^2a \\ ad = bc \end{matrix}\right\}$ egymással sokszoroztatván lesz:

$a^3cd = b^3ca$
vagy: $a^3d = b^3a$
's innen: $a^3 : b^3 = a : d$

Épen így meg lehet mutatni, hogy az öttagú folytatott aránynál, az első tag' negyed-hatványa, úgy van a' második tag' negyed-hatványához: mint az első tag az ötödikhez. — Innen általában minden folytatott n-tagú arányban, úgy van a^{n-1} a' b^{n-1}-hez, mint az első tag az n-dikhez. p. o. számokban:

$$3 : 6 = 6 : 12 = 12 : 24$$

látnivaló hogy:

$$3^3 : 6^3 = 3 : 24$$

vagy: $27 : 216 = 3 : 24$.

's egyetemileg, — az első tag a, a' második aq, az n-dik vagy utólsó $= u$ levén:

$$a^{n-1} : a^{n-1}q^{n-1} = a : u$$

innen: $a^{n-1}u = a^n q^{n-1}$

innen: $u = a^n q^{n-1} = aq^{n-1}$,

$$\frac{}{a^{n-1}}$$

melly képletnek hátrább hasznát vejéndjük.

142. §.

A' tértani arányok' haszna a' mértanban olly általános: hogy az azokróli tan a' *mértan' lelkének* nem ok nélkül neveztetik. De a' közéletbeni számításokra is felette gyakran alkalmaztatnak; mert az ezekben előforduló tárgyak egymással többnyire tértani viszonyban vannak, p. o. az egynemű portékák, és azoknak árai, — a' munkák, és azokra fordítandó idők 'sat.; — kétannyi portékának kétannyi ára van; — háromannyi munka háromannyi időt kíván, 'sat.

Azon számolási műtétel, mellynek segítségével, néhány kiadott tagokból egy ismeretlen, mint arányos tag, kikerestetik, neveztetik *aranyszabály*-nak (regula aurea), melly vagy *egyszerű*, vagy *összetett*.

1) Az *egyszerű aranyszabály*, melly *hármas szabály-nak* (regula detri) is neveztetik, nem egyéb mint egy-

szerü tértani arány, mellynek 3 tagja kiadatván, a' fentebb előadott szabályok szerint keressük a' negyediket. — A' kiadott 3 tagok közül kettő egynemű dolgot jelent, — a' harmadik pedig a' keresendővel egynemű. Már a' keresendőt nevezvén x-nek: ezt az arányban utolsó taggá tesszük, — harmadik tag pedig lesz az ezzel egynemű dolgot jelentő kiadott tag; és eleibe tévén az egyenlőség' jegyét, a' hátulsó viszony készen van. — A' másik két kiadott tagok fogják az első viszonyt képezni, — de kérdés, minő renddel? vagyis kérdés, az első viszonyt növővé tegyük-e, vagy fogyóvá? — Ez attól függ, hogy a' hátulsó viszony növő-e, vagy fogyó: — a' minő az, ollyannak kell lenni az elsőnek is, hogy az arány fonák ne legyen. Erre nézve vis'gáljuk meg a' feladat' feltételeit, — azokból ki fog tünni, nagyobbe az x a' maga párjánál, vagy kisebb? — 's ahozképest helyezzük az első viszony' tagjait. — Ekként elkészíttetvén az arány: sokszorozzuk a' két közbülső tagokat, 's ezen sokszorozmányt osszuk el az elsővel, a' hányados lesz $= x$.

p. o. *3 röf poszló' ára 17 forint: 10 röfé mennyi?* $= x$. Leteszem az x-et a' maga párjával t. i. a' 17-el, a' hátulsó viszonyba, $= 17 : x$. Már kérdés: az x nagyobbe vagy kisebb mint a' 17? A' feladat' feltételeiből kitetszik hogy nagyobb, — mert ha 3 röf' ára 17: 10 röfé kétségkivül több; és igy a' hátulsó viszony növő, — tehát az elsőnek is növőnek kell lennie. Illyen arány lesz tehát:

$$3 : 10 = 17 : x$$

's innen: $$x = \frac{10 \times 17}{3} = 56\,{}^{2}/_{3}$$

Ha a' feladatban különfajta, egyrevehető mennyiségek vannak, p. forint, krajczár, — font, lat 'sat.: legelsőben is azok, vagy a' legkisebb fajra vonassanak le,

— vagy a' legnagyobbhoz tizedes törtszám alakban adassanak, — melly utóbbi mód még jobb az elsőnél, mivel a' munkát rövidebbé 's egyszerűbbé teszi. p. o. *2 font 9 lat 3 nehézék portéka' ára 11 forint 45 kr.: hát ugyanazon portékából 8 font 15 lat 2 nehézékért mennyi esik?*

2 font 9 lat 3 neh : 8 font 15 lat 2 neh = 11 for. 45 kr. : x

vagy: $2 + {}^{9}/_{32} + {}^{3}/_{128} : 8 + {}^{15}/_{32} + {}^{2}/_{128} = 11 + {}^{45}/_{60} : x$

vagy: $2{,}304 : 8{,}483 = 11{,}75 : x$

$$x = \frac{8{,}483 \times 11{,}75}{2{,}304} = 43{,}261$$

$x = 43$ for. 26 dén $= 43$ for. $15\,{}^{1}/_{2}$ xr.

más példa: *$1\,{}^{1}/_{4}$ rőfös szélességű posztóból kell valamelly ruhához $9\,{}^{3}/_{4}$ röf: hát $1\,{}^{2}/_{4}$ rőfösből mennyi kell?* $= x$

$$1\,{}^{2}/_{4} : 1\,{}^{1}/_{4} = 9\,{}^{3}/_{4} : x$$

vagy: $1{,}5 : 1{,}25 = 9{,}75 : x$

$$x = \frac{9{,}75 \times 1{,}25}{1{,}5} = 8{,}125$$

$x = 8\,{}^{1}/_{8}$ röf.

más példa. *1235 ft. 30 kr.nak száztól ötös egy évi kamatja mennyi?* — A' feladat másként igy lenne: *ha 100 ft. 5 kamatot ád: hát 1235 ft. 30 kr. mennyit?*

$$100 : 1235{,}5 = 5 : x$$

$$x = \frac{1235{,}5 \times 5}{100} = 61{,}775$$

A' pénznemek' 's mértékek' átváltoztatása is hármas szabály szerint történik, — mire nézve azoknak egymás iránti viszonyukat tudni kell, — mint fentebb már előadatott. p. ha ezüst pénzt váltóvá, vagy váltót ezüstté akarunk változtatni: úgy van az ezüst a' váltóhoz, mint $1 : 2\,{}^{1}/_{2}$, vagy $2 : 5$, vagy $4 : 10$, — 's viszont a' váltó az ezüsthöz, mint $10 : 4$. Ha dénárt krajczárrá, vagy krajczárt dénárrá változtatunk: úgy van a' dénár a' kr.hoz, mint $5 : 3$, vagy $10 : 6$, 's a' kr. a'

dénárhoz, mint 3 : 5. vagy 6 : 10. *Példák: 143 ft. 15 kr. ezüst, mennyit tesz váltóban?*

$$4 : 10 = 143{,}25 : x$$
$$x = \frac{143{,}25 \times 10}{4} = 358{,}12$$

245 ft. 20 kr. váltó, mennyit tesz ezüstben?

$$10 : 4 = 245{,}33 : x$$
$$x = \frac{245{,}33 \times 4}{10} = 98{,}13$$

75 dénár hány krajczár?

$$10 : 6 = 75 : x$$
$$x = \frac{75 \times 6}{10} = 45$$

20 krajczár hány dénár?

$$6 : 10 = 20 : x$$
$$x = \frac{20 \times 10}{6} = 33\ldots$$ 'sat.

143. §.

Az *összetett aranyszabályban* (melly regula quinque-, septem-, novem 'sat. -nek is neveztetik) több tagok, p. 5, 7, 9 'sat. vannak kiadva, 's kerestetik 6-dik, 8-dik, 10-dik 'sat. arányos tag. Ezen kiadott tagok közül egy az x-el-, a' többiek párosan egynemű dolgot jelentenek. A' tagokat kétfélékre osztjuk, *bizonyosokra*, és *kérdésesekre*; minden pártagból az egyik bizonyos, a' másik kérdéses; 's leirjuk sorba egymás alá. p. o. *3 ember, 2 nap alatt, napjában 7 órát dolgozván, összerak 84 ölfát: hát 5 ember, 3 nap alatt, napjában 4 órát dolgozván, mennyit (x) rak össze?*

ember.	nap.	óra.	ölfa.	
3	2	7	84	*bizonyos tagok.*
5	3	4	x	*kérdéses tagok.*

A' feladat' megfejtése végett ezt cselekedjük: legelsőben hátulsó viszonyt csináljunk az x-ből és párjából: 84 : x; továbbá a' hány pár tagok vannak ezen kivül, annyi külön első viszonyt készítünk illy móddal: felvévén előbb az első párt, 's ekkor a' többiekre nem figyelvén, 's azokat egyenlőknek tekintvén, megvi'sgáljuk, ha valljon ehez képest a' hátulsó viszony növő-e, vagy fogyó? — 's a' szerint tesszük le ezen két tagot is növő vagy fogyó viszonyba. p. o. 3 és 5 ember: 3 ember bizonyos idő alatt összerak 84 ölfát: 5 ember ugyanazon idő alatt többet rak össze, — és így most a' hátulsó viszony növő, tehát az első is az legyen. 3 : 5 = 84 : x. Továbbá felveszünk másik párt, — 's ekkor a' többi párokra nem figyelvén, megnézzük, hogy ehez képest minő a' hátulsó viszony: ollyat csinálunk ezen két tagból is. Így bánunk a' többi pár tagokkal is. — Ekként elkészítvén minden első viszonyokat: ezekből összetett viszonyt csinálunk, t. i. az első tagokat egymással, a' 2-dik tagokat is egymással sokszorozzuk; ezen összetett viszonyt, a' hátulsó viszonnyal: (84:x) arányba tesszük, — 's szokott módon a' középsők' sokszorozmányát az elsővel elosztjuk, — 's a' hányados lesz = x.

minél több ember, annál több munka: 3 : 5 = 84 : x
minél több nap, annál több munka: 2 : 3 = „ „
minél kevesebb óra, annál kev. munka: 7 : 4 = „ „

42 : 60 = 84 : x

Az első viszonyok' összetételében, a' fentebb előadott rövidítéseket használjuk, — t. i. ha mind az elő- mind az utótagokban ugyanazon sokszorozók előjönek: azokat haggyuk ki; e' szerint:

$$\left.\begin{array}{l} 3 : 5 \\ 2 : 3 \\ 7 : 4 \end{array}\right\} = 84 : x \text{ helyett} \qquad \left.\begin{array}{l} \text{„} : 5 \\ 1 : \text{„} \\ 7 : 2 \end{array}\right\} = 84 : x$$

$$42 : 60 = 84 : x \quad = \quad 7 : 10 = 84 : x$$

$$x = \frac{84 \times 10}{7} = 120.$$

Ugyanis sajátlag a' hány pártag van, annyi külön arányok' feltevése 's kifejtése által kellene lépcsőnként a' keresett mennyiséghez jutni, — olly móddal, hogy előbb az első pártaghoz képest keresnénk ki az x-et:

$$3 : 5 = 84 : x$$

$$x = \frac{84 \times 5}{3} = 140$$

t. i. ha 3 ember, bizonyos idő alatt, összerak 84 ölfát: 5 ember, ugyanannyi idő alatt, 140-et rak össze. — Most általmegyünk a' napok' viszonyára:

$$2 : 3 = 140 : y$$

$$y = \frac{140 \times 3}{2} = 210,$$

t. i. 5 ember, ha két nap alatt 140 ölet rak össze: úgy 3 nap alatt összerak 210-et. — Ekkor általmegyünk az órák' viszonyára:

$$7 : 4 = 210 : z$$

$$z = \frac{210 \times 4}{7} = 120$$

t. i. 5 ember, három nap alatt, ha 7 órát napjában dolgozván, összerak 210-et: úgy 4 orát dolgozván, 120-at rak össze. E' szerint ezen három arányok volnának sajátlag a' feladatban:

$$3 : 5 = 84 : 140 \quad \text{vagy} \quad 3 : 5 = 84 : x$$
$$2 : 3 = 140 : 210 \qquad\qquad 2 : 3 = x : y$$
$$7 . 4 = 210 : z \qquad\qquad 7 : 4 = y : z$$

melly három arányok' összetétele sajátlag úgy es-

nék, hogy mind az első, mind a' hátulsó viszonyok összetétetnének;

$$42 : 60 = 84xy : xyz,$$

de mivel a' hátulsó viszonyoknál mindenkor a' mi az első helyen álló viszonynak utolsó tagja, ugyanaz a' 2-dik helyen állónak első tagja, — 's a' mi ennek utólsója, ugyanaz a' 3-diknak elsője; — 's innen a' hátulsó viszonyokból összetett viszony' mind két tagjában: $84xy : xyz$, az x és y szokszorozók előjőnek, ezeket kihagyván lesz: $84 : z$. Vagy általában, a' közben eső keresendőket, mint különben is a' készítendő összetett viszony' két tagjainak egyenlő sokszorozóit, előre elhagyván: hátulsó viszony gyanánt csak egy egyszerű viszonyt teszünk: $84 : x$, akár $84 : z$, — 's csak az első viszonyokból csinálunk összetett viszonyt.

Példák.

I. *Ha 6 öl hosszú, 8 láb magas, $1\frac{1}{2}$ láb vastag falhoz 5184 tégla kívántatik: mennyi lesz elég $8\frac{1}{3}$ öl hosszú, 6 láb magas, 2 láb vastag falhoz?*

hossz.	magas.	vastag	tégla
6	8	$1\frac{1}{2}$	5184
$8\frac{1}{3}$	6	2	x

$6 : 8{,}333... = 5184 : x$ | vagy: „ $: 8{,}333...$
$8 : 6 =$ | $4 :$ „
$1{,}5 : 2 =$ | $1{,}5 : 1$ } $=$

$$6 : 8{,}333... = 5184 : x$$

$$x = \frac{5184 \times 8{,}333}{6} = 7200.$$

II. *Ha 20 takács, 8 hét alatt, hetenként 5 napot, 's naponként 10 órát dolgozván, 100 darab vásznat szö, mellyből minden darab 30 röf hosszú, 's $1\frac{1}{4}$ röf széles: kérdés: 80 takács, 15 hét alatt, hetenként 6 napot, 's naponként 12 órát dolgozván, hány ollyan darabot*

szö meg, mellyek 40 röf hosszúk, 's 1 röf szélesek legyenek?

tak.	hét.	nap.	óra.	darab.	hosszú.	széles.
20	8	5	10	100	30	$1\frac{1}{4}$
80	15	6	12	x	40	1.

$$\left.\begin{array}{r} 20 : 80 \\ 8 : 15 \\ 5 : 6 \\ 10 : 12 \\ 40 : 30 \\ 1 : 1\frac{1}{4} \end{array}\right\} = 100 : x \qquad \left.\begin{array}{r} 2 : \text{„} \\ 1 : 3 \\ 1 : 3 \\ \text{„} : 3 \\ \text{„} : 3 \\ 4 : \text{„} \end{array}\right\} = 100 : x$$

$$8 : 81 = 100 : x$$

$$x = \frac{81 \times 100}{8} = 1012\frac{1}{2}$$

Látjuk tehát, hogy az első viszonyok' első tagjainak sokszorozmánya, úgy van az utólsó tagjaik' sokszorozmányához: mint a' páratlan tag az x-hez. És mivel minden arányban, a' két szélsők' sokszorozmánya, annyi mint a' két közbülsőké: tehát lehet az x-et mindjárt először az első viszonyok' előtagjaihoz, — annak párját pedig azoknak utótagjaihoz sokszorozóként adni, — 's ekként az előtagok' sokszorozmánya az utótagokéval egyenlő lesz, — melly egyenletből az x osztás által kikerestetik. Itt a' viszonyok' előtagjait az utótagoktól függő vonal által lehet elválasztani, így:

x	100
20	80
8	15
5	6
10	12
40	30
1	$1\frac{1}{4}$

vagy:

x	100
2	3
	3
	3
4	3

$$2 . 4 . x = 3 . 3 . 3 . 3 . 100$$

$$8x = 8100$$

$$x = \frac{8100}{8} = 1012\frac{1}{2}$$

Jegyzet. Ezen kifejtése az aranyszabálynak, lényegére nézve az, mit *Reesius'* szabályának neveznek, 's a' mértanárok által többféle módokon szokott előadatni.

144. §.

Összetett aranyszabály alkalmazható akkor is, midőn két mennyiségek' közvetlenül ismeretlen viszonya, több mennyiségek' ismert viszonyainak közbevetése által határoztatik meg; melly mütételnek a' különböző nemű mértékek', pénzek' 'sat. összevetésében van helye, 's a' reesiusi szabály szerint rendeztetvén, *lánczszabály*-nak neveztetik. p. o. *kérdés: mi viszonyban van a' bécsi láb a' berlinihez, ha tudom hogy a' bécsi a' párisihoz úgy van mint 1401 : 1440, — a' párisi a' turinihoz 720 : 1139, a' turini a' londonihoz 2277 : 1351, és a' londoni a' berlinihez 6756 : 6866-hoz?*

A' bécsi lábat jelentse b, a' párisit p, a' turinit t, a' londonit l, a' berlinit b'. e' szerint:

$$\begin{aligned} b : p &= 1401 : 1440 \\ p : t &= 720 : 1139 \quad A. \\ t : l &= 2277 : 1351 \\ l : b' &= 6756 : 6866 \end{aligned}$$

innen:

$$\begin{aligned} 1440b &= 1401p \\ 1139p &= 720t \\ 1351t &= 2277l \\ 6866l &= 6756b' \end{aligned}$$

innen: $1440.1139.1351.6866.bptl =$
$= 1401.720.2277.6756.ptlb'$

az egyenlő sokszorozókat kihagyván:

$$1139.1351.3433\,b = 1401.2277.1689\,b'$$

innen: $b : b' = 1401.2277.1689 : 1139.1351.3433$

vagy: $b : b' = 51 : 50.$

vagy az *A* alatti viszonyokból egyenesen összetett viszonyt csinálván:

bptl : ptlb′ = 1401.720.2277.6756 :
: 1440.1139.1350.6866

vagy: b : b′ = 'sat.

honnan látnivaló, hogy az első az utolsóhoz olly összetett viszonyban van, melly a' közbejövő viszonyok' összetételéből származik.

Más példa: *Mi viszonyban van a' koronás tallér az 5 frankos tallérhoz? — tudván hogy 8 frank = 81 livres, és 1 livre = 27½ kr.* a' közbeeső viszonyokat összeszedjük így:

kor.t : for. = 2,7 : 1
for. : kraj. = 60 : 1
kr. : livr. = 1 : 27,5
livr. : frank = 80 : 81
fr. : 5 fr. = 1 : 5

kor.t : 5 fr. = 2,7×60×80 : 27,5×81×5
= 2,7×12×80 : 27,5×81
= 2592 : 2227,5
= 64 : 55

145. §.

A' kamatok' kiszámitását illető feladatokban, a' viszonyok' némelly tagjai többnyire csak alatta értetnek, — de a' kidolgozásban illető helyeikre feltétessenek; p. o.

I. *2536 for. 45 kr.-nak, 12 év 73 napra, 6 perc. mennyi kamatja jár?* Mintha mondanám: ha 100 forintnak, 1 évre, 6 kamatja van: hát 2536 fr. 45 kr.nak, 12 év 73 napra, hány ft. a' kamatja?

tőke	év	kam.
100	1	6
2536,75;	12,202;	x

$$\left.\begin{matrix}100 : 2536{,}75 \\ 1 \ : \ 12{,}202\end{matrix}\right\} = 6 : x$$

$$100 : 2536{,}75 \times 12{,}202 = 6 : x$$

$$x = \frac{2536{,}75 \times 12{,}202 \times 6}{100} = 1857{,}20$$

$x = 1857$ for. 12 kr.

II. *9875 ft. 30 kr. kamatot, 5 percentel, 8 év 175 nap alatt, mennyi tőke hoz be?* Mintha mondanám: 5 fr. kamatnak, 1 évre, 100 a' tőkéje: hát 9875 fr. 30 kr. kamatnak, 8 év 's 175 napra mi a' tőkéje?

kam.	év	tőke
5	1	100
9875,5;	8,486;	x

$$\left.\begin{matrix}5 : 9875{,}5 \\ 8{,}486 : 1\end{matrix}\right\} = 100 : x$$

$$42{,}430 : 9875{,}5 = 100 : x$$

$$x = \frac{9875{,}5 \times 100}{42{,}430} = \frac{987550}{42{,}43} = 23274{,}8$$

III. *25000 ft. tőke hány év mulva hozna be 5 percentel 12865 for. kamatot?* Mintha mondanám: 100 tőke, 5 kamatot behoz 1 év alatt: hát 25000 tőke, 12865 kamatot hány év alatt?

tőke	kamat	év
100	5	1
25000	12865	x

$$\left.\begin{matrix}25000 : 100 \\ 5 \ : 12865\end{matrix}\right\} = 1 : x$$

$$125000 : 1286500 = 1 : x$$

$$1250 : 12865 = 1 : x$$

$$250 : 2573 = 1 : x$$

$$x = \frac{2573}{250} = 10{,}292$$

$x = 10$ év s' 106 nap.

IV. *22365 forinton nyert valaki $5\frac{1}{2}$ év alatt 6273 fr. 20 krt.: kérdés mi volt a' procent?* Mintha mondanám: ha 100 tőkének, 6 nyereséghez, 1 évre 6 procentje van: hát 22365 tőkének, 6273 for. 20 kr. nyereséghez, $5\frac{1}{2}$ évre mi a' procentje?

tőke	év	nyeres.	proc.
100	1	6	6
22365;	5,5;	6273,12;	x

$$\left.\begin{array}{r} 22365 : 100 \\ 5{,}5 : 1 \\ 6 : 6273{,}12 \end{array}\right\} = 6 : x$$

$$738043 : 627312 = 6 : x$$

$$x = \frac{627312 \times 6}{738043} = 5{,}09.$$

Jegyzet. A' kereskedők, midőn valamelly csupa forintokból (krajczárok nélkül) álló tőkepénznek nehány napra járó 6 percentes kamatját akarják felszámítni: sokszorozzák a' tőkét a' napok' számával, 's ezen sokszorozmány' jobbjáról két jegyet elszakasztanak, a' többi mutatja krajczárokban az illető kamatot. p. o. *3658 forintnak 97 napra mi a' kamatja?* $3658 \times 97 = 354826$, és így az illető kamat $= 3548$ krajczár $= 59$ for. 8 kr.

Ezen számításmódban az év 360 napból állónak vétetik; e' szerint minden 100 forintnak évi kamatja levén 6 for. $= 360$ krajczár: látnivaló hogy 100 forintnak egy napi kamatja 1 krajczár. És így a' hány 100 forint van a' tőkében, annyi krajczár kamat jár egyegy napra, — 's a' hány nap van, annyiszor 1 kr.; p. o. 3658 forintban van 36 egész, 5 tized-, 8 századrész *száz forint*, $= 36{,}58$, és így 97 napra 97-szer ennyi krajczár kamat jár. Látnivaló tehát hogy ez tizedes törtek szerinti számítás; 's ha még a' tőke mellett kr.ok is volnának, azokat dénárokká változtatván, tizedes tört alakban a' tőke után tehetnénk, — de már ekkor a' sokszorozmányból 4 jegyet kellene jobbról elszakasztani; p. o. *374 forintnak 57 kr.-nak, 278 napra mi kamatja jár?* 57 kr. $= 95$ dénár, — és így: $374{,}95 \times 278 = 10423610$, ebből 4 jegyet jobbról elszakasztván, lesz az illető kamat $= 1042$ kr. $= 17$ for. 22 kr.

146. §.

Az úgynevezett *társaság-szabály* (regula societatis), csak az aranyszabály' alkalmazása, melly szerint társaságba állott több személyek közt, az illető nyereség vagy veszteség, betett pénzökhöz arányosan felosztatik.

Ez vagy *egyszerű*, ha a' társak egyenlő időre tették be pénzöket, — vagy *összetett*, ha különböző időre. — Az *egyszerűben* ezeket cselekesszük: a' társak által betett pénzekből egy összeget csinálunk, 's ezt mondjuk: a' mint van ezen összeg, kinek-kinek beadott pénzéhez: úgy van a' nyereség vagy veszteség, az abból kire-kire eső részhez. p. o. három ember tett össze pénzt kereskedésre:

A tett **150** forintot
B — **400**-at
C — **650**-et

nyertek pedig **3000** forintot: kinek mennyi esik belőle?

$$150 + 400 + 650 = 1200$$

illyen arányok lesznek:

1) $1200 : 3000 = 150 : x$, A-jé $= 375$
2) $1200 : 3000 = 400 : y$, B-jé $= 1000$
3) $1200 : 3000 = 650 : z$, C-jé $= 1625$

Az *összetettben* pedig kinek-kinek beadott pénzét az évek', vagy hónapok', vagy napok' számával sokszorozzuk, — mi csak annyit tesz, mintha úgy tekintenénk, hogy egy évre, vagy hónapra, vagy napra annyiszor többet adott volna be, a' hány évre 'sat. adott. Különben csak az előbbi módon kell dolgozni. p. o.

Három kereskedő összetesz pénzt illy móddal:

A tesz 150 forintot 3 hónapra = 450 for. 1 hón.
B — 400 — 2 — = 800 — —
C — 650 — 5 — = 3250 — —

összeg = 4500

és nyernek 3000 fr.ot. mellyiknek mennyi esik?

1) 4500 : 3000 = 450 : x, A-jé = 300
2) 4500 : 3000 = 800 : y, B-jé = 533⅓
3) 4500 : 3000 = 3250 : z, C-jé = 2166⅔

Jegyzet. Vannak még némelly számvetési műtételek, p. *elegyitési-szabály*, — *mesés szabály*, — *egyenetlen osztás*, — mellyekre az aranyszabály alkalmaztathatik; — de azokat az egyenletek' szabályai szerint fejteni meg sokkal könnyebb.

HARMADIK CZIKKELY.

A' Sorzatokról.

147. §.

A' folytonos arány' további folytatása, — vagyis a' folytonos arányban emelkedő vagy leszálló mennyiségek' rendje neveztetik *sorzatnak*, vagy *arány-sornak*, (series, vagy progressio). — Mint a' folytonos arány, úgy az abból származó sorzat is vagy *számtani*, vagy *tértani*; 's mindkettő vagy *emelkedő*, vagy *leszálló*. — A' leszállót mindjárt emelkedőnek tekinthetjük, mihelyt a' tagok' rendjét megfordítjuk, — 's innen azoknak külön szabályai nincsenek.

A. *Számtani sorzatok.*

A' számtani sorzat nem egyéb, mint a' számtani folytonos arány' tovább folytatása, — vagy ollyan rendje a' számoknak, mellyben minden következő tagok ugyan azon különbséggel nőnek vagy fogynak. És így az emelkedő sorzatban, ha az első taghoz a' különbség adatik: elő-áll a' 2-dik tag; ha ehez ismét a' különbség

adatik, lesz 3-dik tag; — vagy ha az első taghoz egy különbség adatik, lesz 2-dik tag; — ha az első taghoz két különbség adatik, lesz 3-dik tag 'sat. A' leszálló-ban pedig, a' különbség' illyetén kivonása által származnak a' következő tagok. p. o. legyen első tag $= 20$, vagy egyetemileg $= a$, a' különbség $= 2$, vagy $= d$: illy sorzat származhatik:

emelk.

1.	2.	3.	4
20,	(20+2)	(20+2+2)	(20+2+2+2)
a,	(a+d)	(a+d+d)	(a+d+d+d)
a,	(a+d)	(a+2d)	(a+3d)

5.
(20+2+2+2+2)
(a+d+d+d+d)
(a+4d)

leszál.

1.	2.	3.	4
20,	(20−2)	(20−2−2)	(20−2−2−2)
a,	(a−d)	(a−d−d)	(a−d−d−d)
a,	(a−d)	(a−2d)	(a−3d)

5.
(20−2−2−2−2)
(a−d−d−d−d)
(a−4d)

Innen látható hogy akárhányadik tag származik az elsőből, hozzáadván egy hijján annyi különbséget, a' hányadik a' kérdéses tag. p. o. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, a' tizenkettedik tag $= 23$ származik az elsőből, hozzá adván a' különbséget $= 2$-t 11-szer véve, $23 = 1 + 2 \times 11$. Egyetemileg ha a' kérdéses tagot utolsónak $= u$, — a' tagok' számát n-nek, az elsőt $= a$, a' különbséget $= d$-nek nevezzük: áll az utólsó tag az elsőből, hozzá adván d-t, $n - 1$-szer

véve. 'S innen az akárhányadik tag' meghatározására illy képlet áll elő.

I, $u = a + d(n-1) = a + dn - d$.

Innen látható hogy a' számtani sorzat' akárhányadik tagja' képzésére, csak az kivántatik, hogy az első tag, a' különbség, és a' tagok' száma adassék ki. p. o. *mi lesz 56-dik tagja azon sorzatnak, mellynek első tagja 3, — különbsége 5?* Lesz $= 3 + 5 . 55 = 278$.

148. §.

A' számtani sorzatoknál a' két szélső tagok' összege annyi, mint párjával a' szélsőktől egyenlő távolságra közbeesőké, és a' páratlan taguaknál, a' magános középső' kettőzete. p. o.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17;

$3+17=5+15=7+13=9+11$;

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d$;

$a+a+5d = a+d+a+4d = a+2d+a+3d$;

$2a+5d = 2a+5d = 2a+5d$.

Ugyanis: mindezen pár tagok ugyanazon összeadandó részekből állnak, t. i. az első tag' kettőzetéből 's 5 különbségből; de a' különbségek a' mint fogynak az utolsótól viszsza jövő tagoknál, úgy szaporodnak az első tag után következőknél.

Innen látnivaló, hogy a' két szélső (első és utolsó) tag' összege az egész sorzatban annyiszor van meg, a' hány pár tag van. Innen a' sorzat' minden tagjainak összege kijő, ha a' két szélső tag' összege a' pártagok' számával, vagyis a' sorzat' minden tagjai' számának felével sokszoroztatik. Nevezvén minden tagok' összegét s-nek: lesz

II. $s = (a+u)\frac{n}{2} = \frac{an+un}{2}$

E' szerint a' számtani sorzatokra két alapegyenletünk van, u. m.

I. $u = a + d\,(n-1) = a + dn - d$

II. $s = (a + u)\,\frac{n}{2} = \frac{an + un}{2}$.

149. §.

Ezen két alapegyenlet' segítségével sok a' mértanban 's közéletben előforduló feladatokat meg lehet fejteni. Mivel pedig itt csak két egyenlet van, mellyekben 5 különböző mennyiségek jönek elő, t. i. az első tag $= a$, az utólsó $= u$, a' tagok' száma $= n$, a' különbség $= d$, a' tagok' összege $= s$: innen ha három ezek közül kiadatik, a' két egyenlet által, a' fennmaradt kettő közül akármellyiket ki lehet keresni. Akármellyik keresendő mennyiségre nézve pedig a' többi 4 közül három, négy különböző módon adathatik ki, p. o. az utólsó tagra $= u$-ra nézve kiadathatnak: a, n, d, vagy: a, n, s, vagy: a, d, s, vagy: n, d, s. — Innen az 5 különböző menyiségek $4 \times 5 = 20$ különböző egyenletekkel fejeztethetnek ki, — mellyeket ezennel fejtsünk ki, — 's végre táblácskában szedjünk össze.

1) *az u-ra nézve, ha*

a) *kiadatnak: a, d, és n*, maga az I alapegyenlet áll:

$$u = a + d\,(n-1).$$

b) *kiadatnak: a, d, és s.* Erre nézve a' két alapegyenletből az n-et irtsuk ki, 's a' megmaradt 4 menyyiségek közül az u-t határozzuk meg:

I. $u = a + d\,(n-1)$; $\quad n = \frac{u-a}{d} + 1$

II. $s = (a+u)\,\frac{n}{2}$; $\quad n = \frac{2s}{a+u}$

innen: $\frac{u-a}{d}+1=\frac{2s}{a+u}$, az osztókat kiirtván: $au-a^2+ad+u^2-au+ud=2sd$;

vagy: $u^2+ud=2sd+a^2-ad$;

a' csonka négyleget kipótolván:

$$u^2+ud+\frac{d^2}{4}=2sd+a^2-ad+\frac{d^2}{4};$$

innen: $u+\frac{d}{2}=\sqrt{\left(2sd+a^2-ad+\frac{d^2}{4}\right)}$,

végre: $u=-\frac{d}{2}+\sqrt{\left(2sd+a^2-ad+\frac{d^2}{4}\right)}$.

c) *kiadatnak*: *a*, *n*, *s*. Itt az u-t a' II. alapegyenletből egyenesen ki lehet keresni.

II. $s=\frac{an+un}{2}$

$2s=an+un$

$2s-an=un$

$u=\frac{2s-an}{n}=\frac{2s}{n}-a$

d) *kiadatnak*: *d*, *n*, *s*. Itt a' két alapegyenletekből az a-t ki kell irtani.

az I-ből: $a=u-d(n-1)$

a' II-ből: $a=\frac{2s-un}{n}$

innen: $u-d(n-1)=\frac{2s-un}{n}=\frac{2s}{n}-u$

vagy: $2u=\frac{2s}{n}+d(n-1)$

végre: $u=\frac{s}{n}+\frac{d(n-1)}{2}$

2) *Az s' kifejezetére nézve, ha*

a) *kiadatnak*: *a*, *d*, *n*. — Erre nézve a' két alapegyenletekből ki kell az u-t írtani:

I. $u = a + dn - d$; $u = a + dn - d$

II. $s = \frac{an + un}{2}$; $u = \frac{2s}{n} - a$

innen: $a + dn - d = \frac{2s}{n} - a$

$an + dn^2 - dn + an = 2s$

$2s = dn^2 - dn + 2an$

$s = n\frac{(dn - d + 2a)}{2}$

b) *kiadatnak: a, d, u.* Itt az n-t kell a' két alapegyenletből kiírtani:

az I-ből: $dn = u - a + d$; $n = \frac{u - a}{d} + 1$

a' II-ből: „ „ „ „ $n = \frac{2s}{a + u}$

innen: $\frac{u - a}{d} + 1 = \frac{2s}{a + u}$

innen: $2s = \frac{(u - a)(u + a)}{d} + a + u$

$s = \frac{(u - a)(u + a)}{2d} + \frac{u}{2} + \frac{a}{2}$

$s = \frac{u^2 - a^2}{2d} + \frac{u + a}{2}$.

c) *kiadatnak: a, n, u.* Itt a' II. alapegyenlet közvetlen alkalmaztatik:

$s = \frac{an + un}{2}$

d) *kiadatnak: d, n, u.* Itt az u-t kell a' két alapegyenletből kiírtani.

az I-ből: $a = u - dn + d$

a' II-ből: $a = \frac{2s}{n} - u$

innen: $u - dn + d = \frac{2s}{n} - u$

$$un - dn^2 + dn = 2s - un$$
$$2un - dn^2 + dn = 2s$$
$$s = \frac{2un - dn^2 + dn}{2}$$
$$s = un - \frac{(dn^2 + dn)}{2}$$

vagy: $s = \frac{n}{2}\left[2u - (n-1)\,d\right]$

3. *A' d' kifejezetére nézve: ha*

a) *kiadatnak: a, n, u.* Az I. alapegyenletből közvetlenül meghatároztatik:

$$\text{I.}\quad u = a + d\,(n-1)$$
$$u - a = d\,(n-1)$$
$$d = \frac{u-a}{n-1}$$

b) *kiadatnak: a, n, s.* Az u-t a' két alapegyenletből ki kell írtani:

I-ből: $u = a + d\,(n-1)$

II-ból: $u = \frac{2s}{n} - a$

innen: $a + d\,(n-1) = \frac{2s}{n} - a$

$$d\,(n-1) = \frac{2s}{n} - 2a = \frac{2s - 2an}{n}$$
$$d = \frac{2s - 2an}{n.(n-1)}$$

c) *kiadatnak: a, u, s.* Itt az n-t kell kiírtani:

az I-ből: $u = a + d\,(n-1$, $u - a = d\,(n-1$, $\frac{u-a}{d} = n-1$ $\Big\}$ $n = \frac{u-a}{d} + 1$

a' II-ből: $s = \frac{an + un}{2}$, $2s = (a+u)\,n$ $\Big\}$ $n = \frac{2s}{a+u}$

innen: $\frac{u-a}{d}+1=\frac{2s}{a+u}$

$$\frac{(u-a)(u+a)}{d}+u+a=2s$$

$$(u-a)(u+a)+ud+ad=2sd$$

$$(u-a)(u+a)=2sd-ud-ad$$

$$u^2-a^2=d(2s-u-a)$$

$$d=\frac{u^2-a^2}{2s-u-a}$$

d) *kiadatnak: n, u, s.* Itt az a-t kell kiirtani:

az I-ből: $a=u-dn+d$

a' II-ből: $a=\frac{2s}{n}-u$

innen: $u-dn+d=\frac{2s}{n}-u$

$$u-d(n-1)=\frac{2s}{n}-u$$

$$-u+d(n-1)=-\frac{2s}{n}+u$$

$$d(n-1)=\frac{2un-2s}{n}$$

$$d=\frac{2un-2s}{n(n-1)}$$

4. *Az* n' *kifejezetére: ha*

a) *kiadatnak: a, d, u.* — ez egyenesen jő le az I-sö alapegyenletből:

$$u=a+dn-d$$

$$u-a+d=dn$$

$$n=\frac{u-a+d}{d}$$

$$n=\frac{u-a}{d}+1$$

b) *kiadatnak: a, d, s.* Itt az *u*-t kell kiirtani a' két alapegyenletből:

az I-ből: $u = a + dn - d$

a' II-ből: $u = \frac{2s}{n} - a$

innen: $a + dn - d = \frac{2s}{n} - a$

innen: $an + dn^2 - dn = 2s - an$

innen: $dn^2 + 2an - dn = 2s$

vagy: $dn^2 + (2a - d)n = 2s$

innen: $n^2 + \frac{2a - d}{d} . n = \frac{2s}{d}$

a' csonka négyleg' gyökere: $n + \frac{2a - d}{2dn} . n = n + \frac{2a - d}{2d}$

innen: $n^2 + \frac{2a - d}{d} . n + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2 = \frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2$

gyökeret fejtve: $n + \frac{2a - d}{2d} = \sqrt{\left\{ \frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2 \right\}}$

innen: $n = \sqrt{\left\{ \frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2 \right\}} - \frac{2a - d}{2d}$

c) *kiadatnak: a, u, s.* Ez a' II alapegyenletből egyenesen jő le:

$$s = \frac{an + un}{2}$$

$$2s = (a + u)n$$

$$n = \frac{2s}{a + u}.$$

d) *kiadatnak: d, u, s.* Itt a' két alapegyenletből az *a*-t kiirtjuk.

az I-ből: $a = u - dn + d$

a' II-ből: $a = \frac{2s}{n} - u$

innen: $u - dn + d = \frac{2s}{n} - u$

innen: $un - dn^2 + dn = 2s - un$

innen: $2un - dn^2 + dn = 2s.$

vagy: $dn^2 - dn - 2un = -2s$

vagy: $dn^2 - (2u+d)n = -2s$

innen: $n^2 - \frac{2u+d}{d} + n = -\frac{2s}{d}$

a' csonka négyleg' gyökere $= n - \frac{2u+d}{2d}$

kipótolva: $n^2 - \frac{2u+d}{d} \times n + \left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 = \left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}$

gyök. fejt. $n - \frac{2u+d}{2d} = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right\}}$

végre: $n = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right\}} + \frac{2u+d}{2d}$

5. *Az* a' *kifejezetére: ha*

a) *kiadatnak: d, n, u:* ez az I. alapegyenletből önként jő.

$$u = a + dn - d$$

$$a = u - dn + d.$$

b) *kiadatnak: d, n, s.* Itt az u-t a' két alapegyenletből ki kell irtani:

az I-ből: $u = a + dn - d$

a' II-ból: $u = \frac{2s}{n} - a$

innen: $a + dn - d = \frac{2s}{n} - a$

innen: $an + dn^2 - dn = 2s - an$

innen: $2an = 2s - dn^2 + dn$

innen: $a = \frac{2s - dn^2 + dn}{2n}$

vagy: $a = \frac{2s}{2n} - \frac{dn^2}{2n} + \frac{dn}{2n}$

vagy: $a = \frac{s}{n} - \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$

vagy: $a = \frac{s}{n} - \frac{dn+d}{2}$

végre: $a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$

c) *kiadatnak: d, u, s.* Itt a' két alapegyenletből az *n* kiirtatik:

az I-ből: $u = a + d(n-1)$

$u - a = d(n-1)$

$n = \frac{u-a}{d} + 1$

a' II-ből: $s = \frac{an + un}{2}$

$2s = (a+u)n$

$n = \frac{2s}{a+u}$

innen: $\frac{u-a}{d} + 1 = \frac{2s}{a+u}$

innen: $\frac{(u-a)(u+a)}{d} + a + u = 2s$

és: $(u-a)(u+a) + ad + ud = 2sd$

vagy: $u^2 - a^2 + ad + ud = 2sd$

vagy: $-u^2 + a^2 - ad - ud = -2sd$

innen: $a^2 - ad = u^2 + ud - 2sd$

a' csonka négyleg' gyökere $= a - \frac{d}{2}$

kipótolva: $a^2 - ad + \frac{d^2}{4} = u^2 + ud + \frac{d^2}{4} - 2sd$

gyök. fejt. $a - \frac{d}{2} = \pm\sqrt{(u^2 + ud + \frac{d^2}{4} - 2sd)}$

vagy: $a - \frac{d}{2} = \pm\sqrt{\left\{(u + \frac{d}{2})^2 - 2sd\right.}$

végre: $a = \pm\sqrt{\left\{(u + \frac{d}{2})^2 - 2sd\right\}} + \frac{d}{2}$

d) *kiadatnak: n, u, s.* Ez a' II alapegyenletből egyenesen jő:

$$s = \frac{an + un}{2}$$

$$2s = n(a + u)$$

$$\frac{2s}{n} = a + u$$

$$a = \frac{2s}{n} - u$$

150. §.

A' számtani sorzatokban előforduló mennyiségek' kifejtéseit mutató képletek íme táblácskában összeállítvák:

	Adott:	Keresett:	Kifejtési-képlet:
1,	a, d, n	u	$u = a + d\,(n-1)$
2,	a, d, s	u	$u = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{(2sd + a^2 - ad + \frac{d^2}{4})}$
3,	a, n s	u	$u = \frac{2s}{n} - a$
4,	d, n s	u	$u = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$
5,	a, d, n	s	$s = \frac{n(dn - d + 2a)}{2}$
6,	a, d, u	s	$s = \frac{u^2 - a^2}{2d} + \frac{u + a}{2}$
7,	a, n, u	s	$s = \frac{an + un}{2}$
8,	d, n, u	s	$s = \frac{n}{2}\{2u - (n-1)\,d\}$

Adott:		Keresett	Kifejtési-képlet:
9,	a, n, u	d	$d = \frac{u - a}{n - 1}$
10,	a, n, s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$
11,	a, u, s	d	$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - u - a.}$
12,	n, u, s	d	$d = \frac{2un - 2s}{n(n-1}$
13,	a, d, u	n	$n = \frac{u - a}{d} + 1$
14,	a, d, s	n	$n = \sqrt{\left\{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2\right\}} - \frac{2a - d}{2d}$
15,	a, u, s	n	$n = \frac{2s}{a + u}$
16,	d, u, s	n	$n = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{2u + d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right\}} + \frac{2u + d}{2d}$
17,	d, n, u	a	$a = u - dn + d$
18,	d, n, s	a	$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$
19,	d, u, s	a	$a = \pm\sqrt{\left\{\left(u + \frac{d}{2}\right)^2 - 2sd\right\}} + \frac{d}{2}$
20.	n, u, s	a	$a = \frac{2s}{n} - u$

151. §.

Az előadott képletek szerint megfejtendő nehány feladatok.

1) *Két kiadott szám közé — úgy tekintvén azokat, mint számtani sorzat szélső tagjait — akárhány számokat helyezni*

mint a' sorzat' közbeeső tagjait. — Erre nézve csak a' sorzat' különbségét = d keressük ki. Azt pedig mutatja a' 9-dik egyenlet: $d = \frac{u-a}{n-1}$. Innen ha a' két kiadott számok közti különbséget elosztjuk a' tagok' számával egy hiján: kijő a' különbség; ennek hozzáadogatása által minden közbeeső tagokat kicsinálhatunk. p. o. 2 és 23 közé tegyünk hat arányos tagot; lesz tehát a' sorzatnak 8 tagja, és

$u = 23$, $a = 2$; a' d kijő így: $d = \frac{23-2}{8-1}$

$= \frac{21}{7} = 3$; 's a' sorzat ez: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23. — Így ha 2 és 3 közé kell tenni öt arányos tagot: $d = \frac{3-2}{7-1} = \frac{1}{6}$, 's a' sorzat lesz: 2, $2\frac{1}{6}$, $2\frac{2}{6}$, $2\frac{3}{6}$, $2\frac{4}{6}$, $2\frac{5}{6}$, 3. Így ha 0 és 1 közé kell tenni nyolcz arányos tagot: lesz a' sorzatnak 10 tagja; különbség lesz: $d = \frac{1-0}{10-1} = \frac{1}{9}$; 's a' sorzat' tagjai ezek: $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}$, $= 10$.

2) *Igér valaki az inasának 20 forint évibért, olly hozzáadással, hogy minden következő években öt-öt forinttal fogja szaporítni. Kérdés: mennyi bére lesz az 50-dik évben; — 's összesen mennyit fog kapni 50 év alatt?*

Kiadatnak: $a = 20$, $d = 5$, $n = 50$. Keresetnek: u, és s.

az *u* az 1) képlet szerint:

$$u = a + d(n-1)$$

$$u = 20 + 5.(49) = 265$$

az s az 5-dik képlet szerint:

$$s = \frac{n(dn - d + 2a)}{2}$$

$$s = \frac{50(250 - 5 + 40)}{2} = 7125$$

3) *Ad valaki 5 percent kamatra első évben 100 forintot, másodikban hozzá ad ismét 100-at, 's így évenként szaporítja száz-száz forinttal 30 évig. Kérdés: mennyire fog menni a' kamat; — 's mennyi lesz 30 év mulva a' tőke és kamat összesen?*

1-ső évben a' kamat = 5 = a; — évenkint szaporodik 5-el, és igy d = 5, n = 30. — Kerestetik s.

$$s = \frac{n(dn - d + 2a)}{2}$$

$$s = \frac{30(30 \times 5 - 5 + 10)}{2} = \frac{155 \times 30}{2} = 2325$$

a' kamatok' összege = 2325

tőke + kamat = 3000 + 2325 = 5325

4) *Egy hivatalnok' évi fizetése most 550 tallér; azt mondja hogy első évben csak 100 tallér volt, 's évenként 30-al növekedett. — Hányadik éve már?*

u = 550; a = 100; d = 30; n = x.

a' 13-dik képlet szerint:

$$n = \frac{u - a}{d} + 1$$

$$n = \frac{550 - 100}{30} + 1 = \frac{450}{30} = \frac{45}{3} + 1$$

$$n = 16.$$

5) *A' szabadon eső test az első másodperczben esik körülbelől 15 lábat, a' másodikban 30 lábbal többet, 's minden következő másodperczben 30 lábbal többet mint a' megelőzőben. — Már egy test 960 lábnyi magas toronyból hány másodpercz alatt esnék le?*

a = 15, d = 30, s = 960, n = x

a' 14-dik képlet szerint:

$$n = \sqrt{\left\{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2}\right)^2\right\}} - \frac{2a-d}{2d}$$

$$n = \sqrt{\left\{\frac{2\times 960}{30} + \left(\frac{30-30}{2}\right)^2\right\}} - \frac{30-30}{60}$$

$n = 8$, 8 másodpercz alatt.

6) *Bizonyos kút-ásásra így egyez valaki, hogy az első ölért fizet 5 forintot, — 's minden következőért hat-hat forinttal többet a' megelőzőnél; — azonban ásott a' mester csak $2^1/_2$ ölet; — mennyit fizessen neki az ásató?*

$a = 5$, $d = 6$, $n = 2{,}5$; $s = x$

az 5-dik képlet szerint:

$$s = \frac{n(dn - d + 2a)}{2}$$

$$s = \frac{2{,}5\ (6\times 2{,}5 - 6 + 10)}{2}$$

$s = 23{,}75 = 23$ for. 45 kr.

B. *Tértani sorzatok.*

152. §.

A' tértani sorzat nem egyéb, mint a' tértani folytonos arány' további folytatása; vagy ollyan rendje a' számoknak, mellyben minden következő tagok ugyanazon hányadossal, vagy sokszorozóval nőnek vagy fogynak. És így az emelkedő sorzatban ha az első tag a' hányadossal sokszoroztatik: előáll a' 2-dik tag; ha ez ismét a' hányadossal sokszoroztatik, lesz 3-dik tag, 'sat; vagy ha az első tag a' hányados' első hatványával sokszoroztatik lesz 2-dik tag; ha az 1-ső tag a' hányados' másod-hatványával sokszoroztatik, lesz 3-dik tag, 'sat. A' leszállóban pedig az első tagnak a' hányados' illyetén hatványai általi elosztásából származnak a' következő tagok. p. o. legyen az első tag $= 20 = a$,

a' hányados = 2 = q, illyen sorzat származhatik:

emelk.	1	2	3	4	5
	20	(20.2)	(20.2.2)	(20.2.2.2)	(20.2.2.2.2)
	a	(a.q)	(a.q.q)	(a.q.q.q)	(a.q.q.q.q.)
	a	(aq)	(aq^2)	(aq^3)	(aq^4)
leszálló	20.	$(\frac{20}{2})$	$(\frac{20}{2.2})$	$(\frac{20}{2.2.2})$	$(\frac{20}{2.2.2.2})$
	a.	$(\frac{a}{q})$	$(\frac{a}{q.q})$	$(\frac{a}{q.q.q})$	$(\frac{a}{q.q.q.q})$
	a.	$(\frac{a}{q})$	$(\frac{a}{q^2})$	$(\frac{a}{q^3})$	$(\frac{a}{q^4})$.

Innen látható, hogy akárhányadik tag származik az elsőből, sokszorozván azt az emelkedőben, 's eloszván a' leszállóban, a' hányados' annyidik hatványával egy hiján, a' hányadik a' kérdéses tag. p. o.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 . . . . .

a' nyolczadik tag = 256 származik az elsőből, sokszorozván azt a' hányados' 7-dik hatványával: $2 \times 2^7 = 2 \times 128 = 256$. — Egyetemileg ha a' kérdéses tagot utólsónak = u, — a' hányadost q-nak nevezzük: áll az utólsó tag az elsőből, sokszorozván azt a' hányados' n — 1-dik hatványával: 's innen az akárhányadik tag' kifejezésére illy képlet áll:

I. $u = aq^{n-1}$

A' tértani sorzatoknál, a' két szélső tagok' sokszorozmánya annyi, mint párjával a' szélsőktől egyenlő távolságra közbeesőké, — 's a' páratlan taguaknál a' magános középső' négyleg-hatványa. p. o. 2, 4, 8, 16, 32, 64

$$2 \times 64 = 4 \times 32 = 8 \times 16$$

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5$$

$$a \times aq^5 = aq \times aq^4 = aq^2 \times aq^3$$

Ugyanis: mindezen pár-tagok ugyanazon sokszorozók-

ból állanak, t. i. az első tagból, melly minden tagban előjő, — és a' hányadosnak egyenlő fokú hatványából, olly móddal, hogy a' mint fogynak a' hányados' hatványfokai az utólsótól visszajövő tagoknál, úgy növekednek az első tag után következőknél. — Azonban ezen törvénynek, a' sorzat' minden tagjai' összegének kikeresésére hasznát nem vesszük; arra nézve más nézetből induljunk ki.

153. §.

A' tértani sorzat nem egyéb mint tértani folytonos arány' folytatása; innen ezen sorzat' bármelly 3 tagja egy-egy folytonos arány; 's ha a' sorzatból csinálható folytonos arányok' viszonyait külön tekintjük: minden viszony' utótagja épen az, a' mi a' következő viszony' előtagja; p. o.

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7,$$

$$a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3 = aq^3 : aq^4 \text{ 'sat.}$$

$$a : aq$$
$$aq : aq^2$$
$$aq^2 : aq^3$$
$$aq^3 : aq^4$$
$$aq^4 : aq^5 \text{ 'sat.}$$

Azonban fentebb azt tanúltuk, hogy az egyenlő viszonyok' előtagjainak összege, úgy van utótagjainak összegéhez, mint akármellyik egyes viszony' előtagja a' maga utótagjához. Itt az utólsón kivűliek mind együtt képezik az előtagokat; és így az előtagok' összege $= s - u$, t. i. az egész sorzat' minden tagjainak összegéből kivonván az utólsót; — továbbá az első tagon kivűliek mind együtt képezik az utótagokat, — és így az utótagok' összege $= s - a$, t. i. az egész sorzat' minden tagjainak összegéből kivonván az elsőt. — E' szerint:

$$s - u : s - a = a : aq,$$

innen egyenletet csinálván:

$$saq - uaq = sa - a^2,$$

ennek minden tagjait a-val elosztván:

$$sq - uq = s - a$$

innen: $sq - s = uq - a$

vagy: $s(q-1) = uq - a,$

$$\text{II.} \quad s = \frac{uq - a}{q-1}$$

vagy az I-ből az u — értekét helyette tévén:

$$s = \frac{aq^{n-1}q - a}{q-1}, \text{ vagy:}$$

$$s = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

E' szerint itt is, mint a' számtani sorzatoknál, két alapegyenletünk van:

$$\text{I.} \quad u = aq^{n-1}$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{uq - a}{q-1} \text{ vagy: } = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

154. §.

Ezen két alapegyenletben itt is 5 különböző mennyiségek jönek elő, t. i. az első tag $= a$, — az utólsó $= u$, — hányados $= q$, — tagok' száma $= n$, — tagok' összege $= s$. És ezek közül 3 kiadatván: a' többit, most valamellyik alapegyenletből, majd a' kettőből meghatározhatjuk. — Jelesen:

1. *Az u-ra nézve: ha*

a) *kiadatnak: a, q, n.* — Meghatározza maga az I. alapegyenlet:

$$u = aq^{n-1}$$

b) *kiadatnak: a, q, s.* A' II. alapegyenletből közvetlenül kifejthetni.

$$s = \frac{uq - a}{q - 1}$$

$$s(q - 1) + a = uq$$

$$u = \frac{s(q-1)+a}{q}$$

c) *kiadatnak a, n, s.* Ezen feladat felsöbb egyenletre vezet, — 's itt meg nem fejthető.

d) *kiadatnak: q, n, s.* Itt a' két alapegyenletből az *a* kiirtandó.

az I-ből: $a = \frac{u}{q^{n-1}}$

a' II-ből: $s = \frac{uq - a}{q - 1}$

$$s(q - 1) = uq - a$$

$$a = uq - s(q - 1)$$

innen: $\frac{u}{q^{n-1}} = uq - s(q - 1)$

$$u = uq.q^{n-1} - s(q - 1)(q^{n-1})$$

$$u = uq^n - sq^{n-1}(q - 1)$$

$$u - uq^n = -sq^{n-1}(q - 1)$$

$$uq^n - u = sq^{n-1}(q - 1)$$

$$u(q^n - 1) = sq^{n-1}(q - 1)$$

$$u = \frac{sq^{n-1}(q - 1)}{q^n - 1}$$

2. *Az s-re nézve: ha*

a) *kiadatnak: a, q, n.* — A' II. alapegyenlet közvetlenül kifejti:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

b) *kiadatnak: a, q, u.* Hasonlóul a' II. alapegyenlet' másik alakja kifejti:

$$s = \frac{uq - a}{q - 1}$$

c) *kiadatnak*, a, n, u. Itt a' két alapegyenletből a' q-t kell kiirtani:

az I-ből: $q^{n-1} = \frac{u}{a}$

$$q = \sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$$

a' II-ből: $s(q-1) = uq - a$

$$sq - s = uq - a$$

$$sq - uq = s - a$$

$$q(s-u) = s - a$$

$$q = \frac{s-a}{s-u}$$

innen: $\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} = \frac{s-a}{s-u}$

$$s - a = s\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - u\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$$

innen: $u\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - a = s\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - s$

vagy: $u\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - a = \left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - 1\right)s.$

innen: $s = \frac{u\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - a}{\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - 1} = \frac{\sqrt[n-1]{\left(\frac{u^n}{a}\right)} - a}{\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} - 1}$

vagy: $s = \left.\frac{\frac{u^{\frac{n}{n-1}}}{} - a}{\frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{} \over \frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{} - 1}\right\}$, $a^{\frac{1}{n-1}}$-el sokszoroztassék,

's lesz: $s = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$

Ezen feladatnak, valamint a' tértani sorzatokat illető több feladatoknak is könnyebb kifejtését a' logarithmusok' segítségével adhatnánk, — mellyekről alább fogunk tanulni.

d) *kiadatnak: q, n, u.* Itt a' két alapegyenletből az a-t kell kiirtani.

az I-ből: $a = \frac{u}{q^{n-1}}$

a' II-ból: $s(q-1) = uq - a$

és így: $a = uq - s(q-1)$

innen: $\frac{u}{q^{n-1}} = uq - s(q-1)$

és: $s(q-1) = uq - \frac{u}{q^{n-1}}$

innen: $s = \frac{uq - \frac{u}{q^{n-1}}}{q-1}$,

sokszorozzuk ezen utólsó résznek mind számlálóját, mind nevezőjét q^{n-1}-el, 's lesz:

$$s = \frac{uq.q^{n-1} - \frac{uq^{n-1}}{q^{n-1}}}{(q-1)(q^{n-1})}$$

$$s = \frac{uq^n - u}{(q-1)(q^{n-1})}$$

$$s = \frac{u(q^n - 1)}{(q-1)(q^{n-1})}$$

3. *Az a-ra nézve, ha*

a) *kiadatnak: q, n, u.* Az első alapegyenletből közvetlenül kifejtetik:

$$a = \frac{u}{q^{n-1}}$$

b) *kiadatnak: q, u, s.* A' II-dik alapegyenletből közvetlenül:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

$$s(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$$

c) *kiadatnak: q, u, s.* Ezekből is kifejthetni az a-t a' II-dik alapegyenlet szerint.

$$s = \frac{uq - a}{q - 1}$$

$$s(q-1) = uq - a$$

$$-a = s(q-1) - uq$$

és így: $a = uq - s(q-1)$.

d) *kiadatnak: n, u, s.* Ezt csak felsőbb egyenletek által lehet megfejteni.

4. *A' q-ra nézve, ha*

a) *kiadatnak: a, n, u.* Az I-alapegyenletből egyenesen kifejtetik:

$$q = \sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$$

Az illynemű feladatot logarithmusokkal lehet megfejteni; — azonban ha a' gyökérjegyben levő $n-1$ nem igen nagy mennyiség: — vagy egyszerű-, vagy többszörös gyökérvonás által is czélt érhetni; p. o. lenne:

$$q = \sqrt[7-1]{729} = \sqrt[6]{729} = 729^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 729^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{729^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{729}}.$$

b) *kiadatnak: a, n, s.* Csak felsőbb egyenletek által kifejthető.

c) *kiadatnak: a, u, s.* A' II. alapegyenletből közvetlenül kifejthetni; t. i.

$$s = \frac{uq - a}{q - 1}, \quad s(q-1) = uq - a$$

$$sq - s = uq - a, \quad sq - uq = s - a$$

$$q(s-u)=s-a$$

$$q=\frac{s-a}{s-u}$$

d) *kiadatnak: n, u, s.* Csak felsőbb egyenletek által kifejthető.

A' még hátra levő 4 feladatok, — mellyekben az: a, q, u-ból, a, q, s-ből, a, u, s-ből, q, u, s-ből az *n* kerestetik, — logarithmusok nélkül ki nem fejthetők, — 's annálfogva még itt nem adathatnak. (Lásd alább **160 §**)

A' tértani sorzatokat illető, — itt lehozott képletek összeszedve:

Adott.		Keresett.	Képlet.
1,	a, q, n	u	$u=aq^{n-1}$
2,	a, q, s	u	$u=\frac{s(q-1)+a}{q}$
3,	q, n, s	u	$u=\frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$
4,	a, q, n	s	$s=\frac{aq^n-a}{q-1}$
5,	a, q, u	s	$s=\frac{uq-a}{q-1}$
6,	a, n, u	s	$s=\frac{u^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$
7,	q, n, u	s	$s=\frac{u(q^n-1)}{(q-1)(q^{n-1})}$

Adott.		Keresett.	Képlet.
8,	q, n, u	a.	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$
9,	q, n, s		$a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$
10,	q, u, s		$a = uq - s(q-1)$
11,	a, n, u.	q.	$q = \sqrt[n-1]{(\frac{u}{a})}$
12.	a, u, s		$q = \frac{s-a}{s-u}$.

Példák:

1) Egy ember 6 lovat ad el olly móddal, hogy az elsőért kap 2 forintot, a' másodikért háromannyit, — 's így a' többiekért. Kérdés: menyit kap értük összesen? — mennyit az utolsóért?

kiadatnak: $n = 6$, $a = 2$, $q = 3$.

a' 4. képl. szer. $s = \frac{aq^n - a}{q-1}$

$$s = \frac{2 \cdot 3^6 - 2}{3-1} = 728.$$

az I. képl. szer. $u = aq^{n-1}$

$$u = 2 \cdot 3^{6-1}$$

$$u = 2 \cdot 3^5 = 486.$$

2) Egy indiai fejedelem, — arab rege szerint, — a' sakk-játék' feltalálójának parancsolá, hogy kérjen tetszése szerint ő tőle jutalmat. Az csak ezt kérte,

hogy a' játéktábla' 64 osztályi közül az 1-sőre adassék egy szem búza, — a' 2-dikra 2, — a' 3-dikra 4, 's így minden következőre kétszerte több mint a' megelőzőre. — Ez első tekintetre csekélységnek látszott: de a' számításból kitetszett, hogy olly iszonyú mennyiség, melly az egész földről, ha annak $1/3$ része a' legjobban miveltetnék is, csak 74 év alatt kerülhetne be. — Kérdés tehát: hány szemre megy a' kivánt jutalom?

kiadatnak: $a = 1$, $q = 2$, $n = 64$

a' 4-dik képl. $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$

$$s = \frac{1 . 2^{64} - 1}{2 - 1}$$

Hogy logarithmusok nélkül a' 2-nek 64-dik hatványát kikereshessük: fejtsük fel a' 64-et az ő hat első-osztóira $= 2.2.2.2.2.2$ És így $2^{64} =$

$= 2^{2.2.2.2.2.2} = 4^{2.2.2.2.2} = 16^{2.2.2.2} = 256^{2.2.2}$

$= 65536^{2.2} = 4294967296^2 =$

$18446744073709551616 = 2^{64}$

ha ebből 1-et kivonunk, — 's $2 - 1$-el elosztjuk, lesz:

$18'''446.744''073.709'551.615 =$ kívánt mennyiség.

3) Két kiadott szám közé, úgy tekintvén azokat, mint tértani sorzat' szélső tagjait, akárhány számokat helyezni, mint a' sorzat' közbeeső tagjait. — Erre nézve csak a' sorzat' hányadosát $= q$, kell kikeresni. Azt pedig mutatja a' 11-dik képlet: $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Innen a' nagyobbik kiadott számot elosztjuk a' kisebbikkel, — 's a' hányadosból fejtünk annyidik gyökeret egy hiján, a' hány tagja lesz a' sorzatnak; — melly hányadossal sorba sokszorozván a' megelő-

ző tagokat, — kijőnek minden közbeeső arányos tagok, p. o. *1 és 10 közé 8 tértanilag arányos tagokat helyezni.* Itt a' sorzatnak 10 tagja lesz, — és így lesz a' hányados $q = \sqrt[9]{\frac{10}{1}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{10}} = 1{,}29...$

Innen a' sorzat így megy: 1; 1,29; 1,6641; 2,146689; 2,7692288, 'sat. utólsó tagnak ki fog jőni a' 10.

HATODIK SZAKASZ.

Logarithmusok vagy Arányszámok.

155. §.

Akármelly számot ki lehet fejezni hatványmennyiséggel, olly móddal, hogy felvevén egy másik számot gyökér gyanánt, annak bizonyos hatványa a' kiadott számmal egyenlő értekű lesz; p. o. ha 16-ot akarom így kifejezni, felveszem gyökérül 4-et, 's lesz: $4^2 = 16$, — vagy felveszem gyökérül 2-t, 's lesz: $2^4 = 16$. — Azonban felvevén gyökérül valamelly számot: annak különböző emeléseivel minden különböző számokat, az 1-től elkezdve, sorba, akármeddig, kifejezhetünk; — de a' számok' nagyobb részére nézve, a' gyökérül felvett szám' hatványjegyében törtszámok is lesznek; — a' valóságos törtszámmal egyen-értekű hatvány-mennyiség' mutatója pedig nemleges lesz, — a' hatványok' fentebb előadott szabályai szerint (lásd 95. §.); p. o. ha felveszem gyökérül a' 4-et:

$4^0 = 1$
$4^{0,\cdot\cdot} = 2$
$4^{0,\cdot\cdot} = 3$
$4^1 = 4$
$4^{1,\cdot\cdot} = 5$
$4^{1,\cdot\cdot} = 6$
'sat.
$4^2 = 16$
$4^{2,\cdot\cdot} = 17$
$4^{2,\cdot\cdot} = 63$
$4^3 = 64$ 'sat.

$4^{-1} = 1/4$
$4^{-2} = 1/16$
$4^{-3} = 1/64$
$4^{-0} = 1/1$
$4^{-0,\cdot\cdot} = 1/2$
$4^{-1,\cdot\cdot} = 1/15$
$4^{-2,\cdot\cdot} = 1/17$ 'sat.

a' mutatóban levő pontok a' lehető törtekre útalnak.

Már a' gyökérül felvett számnak azon hatványjegye, vagy mutatója, mellyre azon gyökér felemeltetvén, egy bizonyos számmal egyenlő értekü lesz, nevezteték ezen bizonyos szám' *logarithmusának*, vagy *arányszámjának*. Igy az elöbbi példában 4-nek logarithmusa $= 1$, mert $4^1 = 4$; — 16-nak logarithmusa $= 2$, mert $4^2 = 16$; — 64-nek logara $= 3$, mert $4^3 = 64$; 1-nek logara $= 0$, mert akármelly szám ha 0-ra emeltetik $= 1$, és igy $4^0 = 1$; — 2-nek logara $= 0$,... azaz 0 és valami törtszám; — 63-nak logara $= 2$,... 'sat. Igy $\frac{1}{4}$-nek logara $= -1$, mert $4^{-1} = \frac{1}{4}$; mivel tudjuk (95. §.) hogy a' nemleges mutatóju mennyiség mindig ollyan törtszámot jelent, mellynek számlálója $= 1$, nevezője pedig a' gyökér' annyidik hatványa, a' hány egység van a' mutatóban; $1/16$-nek logara $= -2$, mert $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = 1/16$.

Ha az ember felvenne, tetszése szerint, gyökérül valamelly számot, — 's a' természetes számokat sorba vévén: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . minél messzebb kiszámitná, hogy mindenikkel külön-külön, a' gyökérül felvett számnak micsoda hatványa egyenlő, — vagyis micsoda hatványjegyei lesznek a' gyökérnek, a' különböző számokhoz képest, — vagy más szókkal, a' felvett gyökérhez képest, sorba a' számok' logarithmusait kikeresgetné: ebből készülne a' *logarithmusi rendszer*, melly tehát a' felvejendő gyökér szerint különböző fogna lenni. — Azonban azon logarithmusi rendszerben, mellyet közönségesen használunk, gyökérül a' 10 vétetik, — 's ez neveztetik *Briggs' rendszer*-ének, — mivel ő számitotta ki legelsőben a' 10 gyökérhez képest 1-től 20,000-ig, és 90,000-től 100,000-ig a' számok' logarithmusait.

Az illynemü logarithmusi rendszernek, mellynek segitségével, a' számok helyett, azoknak hatványos kifejezeteit használhatjuk, kivált a' nagy számokkali számitásokban felette nagy haszna van, — mert a' hatvány-mennyiségekkel sokkal könnyebb bánni, mint a' csupa számokkal. Ugyan is tudjuk, hogy a' mit a' csupa számok körül sokszorozás által teszünk: azt a' hatvány-mennyiségek körül összeadás által véghezvihetjük, t. i. csak a' sokszorozók' mutatóit összeadjuk, p. o. $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$. — A' mit a' csupa számok körül osztás által vihetni véghez: azt a' hatvány-mennyiségek körül egyszerü kivonás által véghezvihetjük, — az osztó' mutatóját az osztandójéból kivonván. p. o. $a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$. — A' csupa számok körül az emelés több izbeli sokszorozás által történik: ellenben a' hatvány-mennyiségek körül egyszerü sokszorozás által, t. i. a' mutató sokszoroztatik annyi egységgel, a' hányadik fokú emelés kivántatik, p. o. $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$. — A' csupa számok körül a' gyökérfejtés mesterséges fejtegetés-, itt pedig egyszerü osztás által történik, — elosztván a' mutatót annyi egységgel, a' hányadik gyökér kivántatik, p. o. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$. — Mielőtt a' logarithmusok' használatáról többet tanulnánk: lássunk valamit azoknak, — 's közelebb a' Briggs-i rendszernek tulajdoniról, 's készitése' módjáról.

156. §.

Vegyünk fel tehát a' 10-nek nehány hatványait, 's lássuk micsoda számokkal azok egyenérteküek? — vagy a' 10-nek különböző mutatói közül mellyik micsoda számnak logarithmusa?

		Számok	Logarith.
$10^0 =$	1	1	0
$10^1 =$	10	10	1
$10^2 =$	100	100	2
$10^3 =$	1000	1000	3
$10^4 =$	10000	10000	4
$10^5 =$	100000	100000	5
$10^6 =$	1000000	1000000	6
$10^7 =$	10000000	10000000	7

hasonlólag:

		Számok	Logarith.
$10^{-0} =$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	$= -0$
$10^{-1} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$= -1$
$10^{-2} =$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$= -2$
$10^{-3} =$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$= -3$
$10^{-4} =$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{10000}$	$= -4$
$10^{-5} =$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{100000}$	$= -5$
$10^{-6} =$	$\frac{1}{1000000}$		'sat.
$10^{-7} =$	$\frac{1}{10000000}$		

Ezek' figyelmes megvi'sgálásából kitetszik:

1) hogy az *egy*' logarithmusa $= 0$, mint akármelly rendszerben.

2) az épszámok' logarithmusai igenlegesek, — a' valóságos törtekéi pedig nemlegesek; — még pedig a' melly épszámnak logarithmusa valamelly szám, igenlegesen véve, — ugyanazon számmal, mint nevezővel elosztott 1-nek logarithmusa lesz az, nemlegesen véve. Innen a' rendszerben a' logarithmusok előtt sem + sem — jegy nincs; — mert most ép-, majd törtszámnak felelnek meg.

3) a' 10' logarithmusa $= 1$, — a' 100-é $= 2$, — az 1000-é $= 3$, — a' 10000-é $= 4$ 'sat. Az egy és tíz

közt esőkéi 0-nál nagyobbak, 1-nél kisebbek, — és így a' 0 és 1 közt esnek; — a' 10 és 100 közt esőkéi a' 2 és 3 közt, 'sat. Innen a' számok' legnagyobb részének logarithmusában, az épszámon kivül törtszámok is vannak. Még pedig a' logarithmusban levő épszám mindig megmutatja, micsoda két szám közt esik a' logarithmusnak megfelelő szám. p. o. ha a' logar.' épszámja = 2, 's azon kivül tört is van: akkor látnivaló, hogy az annak megfelelő szám esik a' 100- és 1000 közt; 's általában a' logarithmusnak megfelelő szám' mindig egygyel több jeggyel iratik, mint a' hány egység van a' logar'. épszámjában. Innen akármelly kiadott szám logarithmusának épszámja önként tudatik, mert az mindig egygyel kevesebb, mint a' hány jeggyel a' kiadatott szám iratik. p. o. 100000-nek logarithmusában az épszám = 5; — 178-ében = 2, — 19878961-ében = 7. Innen a' logarithmusban levő épszám neveztetik *jellemző*nek (characteristica), — a' mellette álló törtszám pedig *ráadásnak* (mantissa), — a' gyökér, mellynek ezek hatványjegyei, — mint ezen rendszerben a' 10, *alap*nak (basis). — A' rendszerben a' *jellemző*, részint mivel az különben is önként tudatik, részint más alább kitűnendő okon is, el szokott maradni, — 's csak a' *ráadás* tétetik ki, — több kevesebb, 7—10, kisebb táblákban 5 tizedestört jegyekkel.

4) Ezen rendszerben szembetűnik, hogy a' logarithmusok olly számtani sorzatot képeznek, mellyben a' különbség = 1; az azoknak megfelelő számok pedig olly tértani sorzatot, mellyben a' hányados = 10.

log.	0.	1.	2.	3.	4.	5.
szám	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,

log.	6.	7.
szám	1000000,	10000000.

Valamint a' felül írt számtani sorzat' minden tagjai, sorban, az alúl irt tértani sorzat' minden tagjainak logarithmusai: úgy ha egy-egy pár tag közé még nehány, egyenlő számú, felül ugyan számtanilag —, alúl pedig tértanilag arányos tagokat közbe-helyeznénk, p. o. a' logarithmusoknál a' 0 és 1 közé 8 számtanilag arányos tagot, — a' megfelelő számoknál pedig az 1 és 10 közé, 8 tértanilag arányos tagot, — úgy hogy amott az 0 es 1, itt az 1 és 10, egy-egy 10 tagú, amott számtani-, itt tértani sorzatnak szélső tagjai lennének: ott is a' számtani sorzat' tagjai, a' tértani sorzat' tagjainak sorban logarithmusai fognának lenni. Igy (lásd 151 és 154 §-sokat):

log. 0.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{2}{9}$.	$\frac{3}{9}$.	$\frac{4}{9}$	'sat.	$\frac{9}{9}$
szám. 1,	1,29..	1,664..	2,1466..	2,76922..	'sat.	10.

Ha ezen sorzatoknak egy-egy pár tagjai közé ismét nehány (felül számtani — alúl tértani) arányos tagokat helyeznénk; akkor is a' felső sorzat' tagjai, az alsójéinak logarithmusai lennének. — Vagy pedig ha első izben mindjárt a' 0- és 1 közé temérdek, p. 10 millio számtani, az 1- és 10 közé ugyanannyi tértani sorzat' tagjait helyeznénk: a' tértani sorzat' ezen temérdek tagjai közt találnánk ollyakat, mellyeket kicsiny hibával helyettök tehetnénk az 1 és 10 közt eső épszámoknak: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-nek, — 's a' számtani sorzat' temérdek tagjaiból az ezeknek megfelelők, ezeknek logarithmusai lennének; — 's e' szerint megtalálhatnánk az 1 és 10 közt eső épszámok' logarithmusait; — 's épen igy cselekedhetnénk a' 10 és 100, — a' 100 és 1000 'sat. közt esőkre nézve is. — De ez hosszú munka lenne; azonban, mint majd meglátándjuk, nem is szükség minden közbe esők' logarithmusait kiszámítni, — sőt nagy részöket egymásból kicsinálhatni.

Hogy tehát a' közbeneső számok' logarithmusait kicsináljuk: felvesszük az 1 és 10 közt valamellyiket, p. o. az 5-öt, 's igy okoskodunk: a' minő arányos tag az 5 tértanilag az 1 és 10 között: épen olly arányos tag számtanilag az 5' logarithmusa, a' 0 és az 1 között. — Keresünk hát az 1 és 10 közt tértani középszerest (136. §.). $x = \sqrt{(10 \times 1)} = \sqrt{10} = 3{,}162277$; enlogarithmusa a' 0- és 1 közötti számtani középszeres (134. §.). $y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5000000$. Továbbá az 5 esik a' 10 — és a' 3,162277 között, 's az 5' logarithmusa esik az 1 és a' 0,5000000 között, mellyre nézve a' számok közt ismét tértani (x) — a' logarithmusok közt számtani (y) középszerest keresünk:

$$x = \sqrt{(10 \times 3{,}162277)} = 5{,}6234132. \textit{ szám.}$$

$$y = \frac{1+0{,}5}{2} = 0{,}7500000. \textit{ log.}$$

Igy folytatjuk a' középszeresek' keresését, — míg 26 ízbeni mütétel után kijő:

szám $x = 5{,}0000000$,
logar. $y = 0{,}6989700$.

Illy nagy munkával csak az úgynevezett *első* számok' logarithmusait kellene kikeresni; p. o. 2, 3, 5, 7, 11, 13 'sat., mi azonban nem kis munka, ha meggondoljuk, hogy az 1 és 100000 közt 56192 első számok találtatnak. — Az összetett számok' logarithmusait már az első számokéiból könnyü kicsinálni; p. o. a' 6' logarithmusát nyerem, ha az ő sokszorozóinak, 2- és 3-nak logarithmusait összeadom. Ugyanis

$$6 = 2 \times 3$$

és: $2 = 10^{0{,}3010300}$

$3 = 10^{0{,}4771213}$

és igy: $6 = 10^{0{,}3010300} \times 10^{0{,}4771213}$;

a' hatvány-mennyiségek' sokszorozása pedig csak úgy

szokott esni, hogy hatvány-mutatóikat összeadjuk, — és így:

$$6 = 10^{0,3010300 + 0,4771213}$$

$$6 = 10^{0,7781513}$$

vagy: $\log. 6 = 0,7781513 = \log. 2 + \log. 3.$

Így akármelly összetett szám' logarithmusa kijő, ha sokszorozóinak logarithmusait összeadjuk.

Viszont ha valamelly összetett számnak, és egyik osztójának logarithmusát tudom: azokból a' másik osztója' logarithmusát kicsinálhatom, p. 10-zéből és 2-jéből az 5-ét. Mert

$$5 = \frac{10}{2}$$

$$10 = 10^{1,0000000}$$

$$2 = 10^{0,3010300}$$

innen: $5 = \frac{10^{1,0000000}}{10^{0,3010300}}$;

a' hatvány-mennyiségek' elosztása pedig csak úgy esik, hogy az osztó' mutatóját az osztandójéból kivonjuk, — és így:

$$5 = 10^{1,0000000 - 0,3010300}$$

$$5 = 10^{0,6989700}$$

vagy: $\log. 5 = 0,6989700.$

Így ha akármelly szám' logarithmusából, egyik osztója' logarithmusát kivonom: ott marad a' másik osztójé. p. $\log. 4 = \log. 8 - \log. 2.$

Továbbá akármelly szám' logarithmusából, annak akárhányadik hatványának logarithmusát kicsinálhatom, p. o. 3-méból 9-ét, 27-ét 'sat. Mert:

$$9 = 3^2$$

$$3 = 10^{0,4771213}$$

innen: $9 = (10^{0,4771213})^2$,

úgyde a' hatvány-mennyiség' emelése csak úgy esik,

hogy mutatóját sokszorozom annyival, a' hányadik fokra akarom emelni, p. most 2-vel:

és így: $9 = 10^{0,4771213 \times 2}$

$9 = 10^{0,9542426}$

vagy: $\log. 9 = 0,9542426$

Innen akármelly szám' logarithmusát, a' hány egységet jelentő számmal sokszorozom, — annyidik emelésének logarithmusa fog kijöni. p. o. $27 = 3^3$, és így $\log. 27 = \log. 3 \times 3$; — $64 = 4^3$, $\log. 64 = \log. 4 \times 3$.

Végre akármelly szám' logarithmusából annak akárhányadik gyökerének logarithmusát kicsinálhatom.

$4 = \sqrt[3]{64}$

$64 = 10^{1,8061800}$

és így: $4 = \sqrt[3]{(10^{1,8061800})}$

úgyde a' hatvány-mennyiségbőli gyökérfejtés csak úgy esik, hogy mutatóját elosztjuk annyival, a' hányadik gyökeret akarjuk venni, p. itt 3-al:

és így: $4 = 10^{\frac{1,8061800}{3}}$

$4 = 10^{0,6020600}$

vagy: $\log. 4 = 0,6020600.$

Innen akármelly szám' logarithmusát, a' hány egységet jelentő számmal elosztjuk, annyidik gyökerének logarithmusa fog kijöni, p. o. $\frac{\log. 27}{3} = \log. 3$, — és $\log. 2 = \frac{\log. 64}{6}$.

Logarithmusi táblák számosan vannak; mellyekben a' logarithmusok többnyire 7 tizedes jegyekkel adatnak. Leginkább kézenforgók ezek: *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch von Vega.* — *Tabulae logarithmicae, auctore Vlacq.* — *Tabulae logarithmicae Wolfii.* — Nagy becsü munka: *Thesaurus logarithmorum com-*

pletus auctore Vega. — in folio. 1794. — 'Sebkönyv gyanánt használható: *Tables de Logarithmes pour les nombres et pour les sinus, par Jérôme de Lalande, revue par le Baron Reynaud. Paris. 1832*, — mellyben a' logarithmusok csak 5 tizedes jegyekkel adatnak. — *Nagy Károly, magyar bevezetéssel kiadta Babbage'* logarithmusi tábláit 1-től 108000-ig. *London. 1834.*

157. §.

Hogy a' logarithmusi tábláknak hasznokat vehessük: előbb ezen kérdésekre kell megfelelnünk: 1) Miképen kell akármelly kiadott számnak megfelelő logarithmust a' táblákban felkeresni? — 2) Miképen kell akármelly logarithmusnak megfelelő számot feltalálni?

I. *Miképen kell akármelly kiadott számnak megfelelő logarithmust a' táblákban felkeresni?*

1) Ha épszám van kiadva, — és ollyan, melly a' táblákban levő legnagyobb számnál kisebb, p. a' Babbage-ében 108000-nél, — a' Lalande-ében 10000-nél: az annak megfelelő logarithmus készen van a' táblákban. A' *jellemző* (characteristica) ha nincs is kitéve, tudva van, t. i. mindig eggyel kevesebb, mint a' hány jegy van a' kiadott számban.

2) A' melly szám' végén 0-sok vannak: annak logarithmusában a' *ráadás* (mantissa) csak az, melly az abban lévő jelentő jegyeké, — csak a' jellemző más, — t. i. mindig annyi, egy hiján, a' hány jegy van mindössze a' kiadott számban. — Ugyanis az illyen számot úgy nézhetni, mint két sokszorozók' sokszorozmányát, mellyek közül egyik áll a' jelentő jegyekből, — másik zérusokból, vagyis 10, 100, 1000 'sat. és ezen két sokszorozók' logarithmusai összeadatván, teszik ezen szám' loga-

rithmusát. Úgyde a' két sokszorozók közűl egyiknek, t. i. a' zerusosnak nincs ráadása, csak jellemzője; — és így a' ráadás csak az marad, melly a' jelentő jegyeké. p. o. 56789000-nek mi a' logarithmusa? Ezen szám = 56789 × 1000; és így ezen két sokszorozók' logarithmusait össze kell adni, 's kijő a' feladott szám' logarithmusa.

log. 56789 = 4,7542642
log. 1000 = 3,0000000
log. 56789000 = 7,7542642.

Igy: 20'000000' logarithmusa csak az a' mi a' 2-jé, — csak hogy a' jellemző a' kettőnél = 0, — itt pedig = 7. — Innen midőn valamelly nagy számnak keressük logarithmusát, — de nagy pontosság nem kivántatván, a' végin eső jegyekkel nem gondolunk: kikeressük a' táblákból a' feladott szám' annyi felsőbb jegyeinek logarithmusát, a' mennyiét lehet, — a' többi jegyeket pedig 0-sok gyanánt tekintjük; — de jellemzőül eggyel kisebb számot teszünk, mint a' hány jegy van a' feladott számban. p. o.

10745865379612-nek mi a' loga.?

a' Babbage' tábláiban van: 10745-é, a' többit 0-nak tekintvén: 10745800000000, 's ennek logarithmusa = 13,03123875.

3) E' szerint, ha valamelly számot 10-el-, 100-al 'sat. sokszorozunk: logarithmusának ráadása csak az marad, a' mi volt, — csak a' jellemzője változik. — Valamint ellenben, ha valamelly számot 10-el, 100-al 'sat. elosztunk: log. ráadása csak az marad, csak jellemzője fogyasztatik, hogy mindig eggyel kevesebb legyen, mint a' kiadott szám' egészet jelentő jegyei. p. o. 2164-nek épen az a' log. ráadása, a' mi 216,4-nek, 21,64-nek, 2,164-nek, csak az elsőnek jellemzője = 3, — 2-diké = 2, — 3-diké = 1, — 4-diké = 0. Ugyanis ha 2164

el van osztva 10-el: úgy annak logarithmusából ki kell vonni a' 10' logarithmusát = 1-et, és így jellemzője kevesedik 1-el; — ha 100-al van elosztva: úgy logarithmusából ki kell vonni 100-ét = 2-t — 's így jellemzője kevesedik 2-vel.

4) Ha valamelly törtszámnak megfelelő logarithmust kell kikeresni: mivel a' törtszám nem egyéb, mint osztás, t. i. a' számláló el van osztva a' nevezővel: tehát a' számláló' logarithmusából kivonatván a' nevező' logarithmusa, a' különbség mutatja a' törtszám' értekének logarithmusát. Innen láthatni, hogy a' valóságos törtszám' logarithmusa mindig *nemleges*, mert a' kivonandó nagyobb mint a' kisebbítendő. p. o. $\frac{375}{85634}$-nek logarithmusát így keresem ki:

$$\log. 375 - \log. 85934 = \log. \frac{375}{85634}.$$

$$\log. 375 = 2{,}5740313$$
$$-\log. 85634 = -4{,}9326462$$
$$\log. \frac{375}{85634} = -2{,}3586149.$$

Azonban a' nemleges logarithmust más alakra is változtathatom az által, hogy a' számláló' logarithmusának jellemzőjéhez annyi egyet adok, hogy belőle a' nevező' logarithmusát kivonhassam; — de aztán végül a' ráadási különbség után, kivonás-jeggyel ugyanannyit írok; melly azt jelenti, hogy ezen logarithmusnak megfelelő számot, azon kivont egésznek, mint jellemzőnek megfelelő számmal el kell osztani. P. o. az előbbi példában a' 375' log. jellemzőjét növesztem 3-al, — kivonom belőle a' 85634' logarithmusát, 's a' különbség után teszek — 3-at, 's e' szerint $\log. \frac{375}{85634} = 0{,}6413851 - 3$; melly azt jelenti, hogy ezen logarithmusnak megfelelő

számot el kell osztani 1000-el. Megfelel pedig azon log. -nak 4,379, — 's ez elosztva 1000-el = 0,004379 = $\frac{375}{85634}$. Ha lárvás törtszámnak megfelelő logarithmust keresünk: akkor is épen így cselekszünk; — de akkor a' log. nem nemleges.

A' tizedes-törtszám' log.-át is épen így keressük ki, — t. i. ha nincs egész a' tizedes-tört jegyek előtt: akkor a' tizedes jegyeknek, mint számlálónak log.-ából kivonjuk a' megfelelő nevezőnek jellemzőjét, — vagyis annyi egyet, a' hány tizedes jegy van, 's ekkor a' log. lesz nemleges; — vagy itt is, mint a' közönséges törteknél, a' számláló' jellemzőjét növesztjük, hogy a' nevezőét belőle kivonhassuk, 's végül ugyanannyit, a' mennyivel növesztettük, — jeggyel hozzáadunk. p. o. 0,324 = $\frac{324}{1000}$, logarithmusa = 2,5105450 — 3,0000000 = — 0,4894550; — vagy a' számláló' jellemzőjéhez adván 1-et, — 's a' különbségből kivonván 1-et, lesz a' log. = 0,5105450 — 1.

Ha pedig a' tizedes jegyek előtt egész is van: akkor is épen ezt cselekednénk; — de mivel itt a' log. nem lesz nemleges; jobb lesz a' számlálónak, úgy tekintvén azt mint épszámot, loga. után, kivonás' jegyével, a' nevező jellemzőjét utána tenni, — vagy egyenesen annak hijával tenni fel a' logarithmust, — mint az előbbi 3-dik szám alatt látánk. p. 25,324-nek logarithmusa = 4,4035323 — 3 = 1,4035323.

5) Ha a' táblákban találtató számoknál nagyobb számhoz kivántatik pontoson logarithmus: ennek feltalálásához útat nyit a' következő vi'sgálódás.

Ha figyelemre veszünk 3 egymás után következő számot, A, B, C, mellyek közt tehát 1 a' különbség: úgy találjuk, hogy a' mint vannak egymáshoz a' számok

közti különbségek: közel úgy vannak a' logar.aik közti különbségek is: (C — A) : (B — A) = (log. C — log. A) : (log.B — log. A.)

Már ha ezen törvény áll az ollyan számokra nézve is, mellyek 1 egésszel különböznek egymástól: még inkább áll azokra nézve, mellyek közti különbség 1-nél kevesebb. — Ezen nézeten alapúl a' táblabelieknél nagyobb számok' log.-ának kikeresése. p. o. ollyan táblában, melly csak 10000-ig adja a' számokat, keressük fel 1851273' log.-át. — Elszakasztok a' szám' felső jegyeiből annyit, a' mennyi tábláimban találtatik, — a' többieket tizedes-törteknek tekintem, 's gondolom mintha sokszorozva volna annyi 0-sos számmal (10, 100, 1000 'sat.) a' hány tizedes jegy van. Igy $1851273 = 1851{,}273 \times 1000$.

E' szerint:

$A = 1851$; $B = 1851{,}273$; $C = 1852$

És: log. $A = 3{,}2674064$; — log. $C = 3{,}2676410$

Innen illyen arány származik:

$(1852 - 1851) : (1851{,}273 - 1851) = (3{,}2676410 - 3{,}2674064) : x$

vagy: $1 : 0{,}273 = 0{,}0002346 : x$

következőleg: $x = 0{,}273 \times 0{,}0002346 = 0{,}0000640$.

Mivel tehát az 1851,273' logarithmusa 0,0000640-vel nagyobb mint az 1851-é: ezen különbséget hozzá kell adni az 1851' log.-ához, hogy az 1851,273-ét megtaláljuk.

Tehát: log. 1851 = 3,2674064
ehez adva = 0,0000640
lesz = 3,2674704 = log. 1851,273.

Már: $1851{,}273 \cdot 1000 = 1851273$

log. 1851,273 + log. 1000 = log. 1851273

3,2674704 + 3 = 6,2674704

innen: log. 1851273 = 6,2674704.

Más példa:

14459809-nek mi a' logarithmusa?

Legyen: $14459809 = 1445{,}9809 \cdot 10000$

Innen: $A = 1445$; $B = 1445{,}9809$; $C = 1446$.

$\log. A = 3{,}1598678$, és $\log.. C = 3{,}1601683$

innen illyen arány lesz:

$(1446 - 1445) : (1445{,}9809 - 1445) = (3{,}1601683 - 3{,}1598678) : x$

vagy: $1 : 0{,}9809 = 0{,}0003005 : x$

innen: $x = 0{,}9809 \times 0{,}0003005 = 0{,}0002948$.

Már: $\log. 1445 = 3{,}1598678$

ehez adva $0{,}0002948$

lesz: $= 3{,}1601626 = \log. 1445{,}9809$

's ehez 10000' log.-át $= 4$-et adva, lesz

$\log. 14459809 = 7{,}1601626$.

Más példa:

84,827567-nek mi a' loga.?

$84{,}827567 = 8482{,}7567 : 100$

$A = 8482$; $B = 8482{,}7567$; $C = 8483$

$\log. A = 3{,}9284983$, $\log. C = 3{,}9285495$

innen: $(8483 - 8482) : (8482{,}7567 - 8482) = (3{,}9285495 - 3{,}9284983) : x$

vagy: $1 : 0{,}7567 = 0{,}0000512 : x$

innen: $x = 0{,}7567 \times 0{,}0000512 = 0{,}0000387$

már $\log. 8482 = 3{,}9284983$

ehez adva $= 0{,}0000387$

lesz: $= 3{,}9285370 = \log. 8482{,}7567$

már $84{,}827567 = 8482{,}7567 : 100$

$\log. 84{,}827567 = \log. 8482{,}7567 - \log. 100$

$\log. 84{,}827567 = 3{,}9285370 - 2$

$= 1{,}9285370$.

158. §.

II. *Miképen kell akármelly logarithmusnak megfelelő számot a' táblákból kikeresni?*

1) Ha a' feladott logarithmus' ráadása a' táblákban teljesen feltaláltatik: akkor az annak megfelelő szám előtte áll. A' jellemző fogja megmutatni, ha valljon abból a' megfelő számból el kell-e szakasztani tizedesek gyanánt? — vagy talán pótolni is végről 0-sokkal? — tudván hogy mindig eggyel több az épszám' jegye, mint a' hány egy van a' jellemzőben. — Azonban a' kiadott logarithmust mindig a' legnagyobb számokéi közt kell keresni. — P. o. lenne a' kiadott logarithmus' ráadása $= *5791774$, — ennek megfelel: **37947**; már ha azon ráadás előtt 4 áll mint jellemző, úgy a' megfelelő számnak mind az öt jegyei épek $=$ **37947**; — ha a' jellemző $=$ **3**, úgy megfelelő szám $=$ **3794,7**; — ha a' jellemző $=$ **2**, úgy megf. szám $=$ **379,47**; — ha jell. $=$ **1**, úgy megf. szám $=$ **37,947**; — ha jell. $=$ **0**, úgy megf. szám $=$ **3,7947**. — Ha jell. volna $=$ **7**: úgy megf. szám $=$ **37947000** 'sat.

2) A' nemleges logarithmusnak megfelelő számot igy keressük ki: kikeressük az imént előadott módon a' feladott log.-nak, — úgy tekintvén azt mint igenlegest, — megfelelő számot; — azon számmal elosztjuk az 1-et: 's ezen közönséges törtszám felel meg a' kiadott nemleges log.-nak. Mert nemleges log. $=$ nemleges mutatója a' 10-nek. Már pedig ha valamelly mennyiségnek nemleges mutatója van: az annyit tesz, mint 1 elosztva ugyanazon mennyiséggel, igenleges mutatóval, p.o. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Igy tehát $-1{,}0413927 = 10^{-1{,}0413927} = \frac{1}{10^{1{,}0413927}}$; ezen log.-nak megfelel 11, — és igy mint nemlegesnek megfelel $= \frac{1}{11}$.

3) Az ollyan logarithmus, mellyben hátul áll kivonás-jeggyel valamelly épszám, azt jelenti, hogy a' log. -nak megfelelő számot el kell osztani, a' kivonásképen ott álló számnak, mint jellemzőnek megfelelő számmal, p. ha **1** áll ott, **10**-el, — ha **2**, **100**-al, 'sat. Ezen elosztás pedig, a' tizedestörtek' törvényei szerint, a' vonásnak balra odább-odább tétele-, 's ha szükség, balfelé **0**-sok' hozzáadása által történik. p. o. **3,9259306 — 3**, ezen log.-nak a' **+ 3** jellemzővel megfelel = **8432**, de hátul — **3** lévén, elosztjuk **1000**-el, 's lesz = **8,432**; — így: **0,9259306—3**, — ennek **0** jellemzővel megfelelne: **8,432**, de elosztjuk **1000**-el, 's lesz = **0,008432**.

4) Ha a' feladott logarithmus' ráadása a' táblákban teljesen nem találtatik: akkor megnézzük a' legközelebbi kisebb, 's legközelebbi nagyobb logarithmusokat, 's azoknak megfelelő számokat, mellyek egymástól **1**-egésszel különböznek; — ezen két számok közt esik a' mi log.-unknak megfelelő szám, — és így a' kisebbikhez még valami törtszámnak kell adatni; — de kérdés mi lesz ezen hozzáadandó törtszám? — Az előbbi §-ban, **5**-dik szám alatt előadott nézet szerint, illyen arányt csinálok: *a' mint van a' legközelebbi nagyobb, és legközelebbi kisebb logarithmusok közötti különbség, — a' kiadott log. és legközelebbi kisebb közötti különbséghez: úgy van a' legközelebbi nagyobb, és leg közelebbi kisebb logarithmusoknak megfelelő számok közti különbség, melly mindig* $= 1$, *— a' kiadott log.-nak, és a' legközelebbi kisebbnek megfelelő számok közti különbséghez* $= x$, — melly különbséget aranyszabályon kikeresvén, a' legközelebbi kisebbhez, tizedes jegyek gyanánt hozzáadjuk; — azonban a' jellemző mutatja meg, tizedestörtek lesznek-e, vagy nem? p. o.

4,8765432-nek mi szám felel meg?

Mivel ezen log. a' táblákban nem találtatik, tehát:

	Logarith.	megf. szám	Különbség
A, l. köz. kisebb	= 4,8765411	75256	C − A = 58
B, kiadott	= 4,8765432	- - - -	B − A = 21
C, l. köz. nagy	= 4,8765469	75257	

innen: $58 : 21 = 1 : x$,

innen: $x = \frac{21}{58} = 0{,}36$

és igy a' keresett szám = **75256,36**. — Ha a' jellemző **3** volna: úgy a' megfel. szám lenne = **7525,636**, — ha pedig a' jellemző **5** volna: úgy a' megfelelő szám = **752563,6**, — ha a' jell. = **6** : úgy a' megf. szám = **7525636**. 'sat.

159. §.

A' logarithmusok' használata azon nézeten alapul, miszerint a' logarithmusok nem egyebek, mint a' természetes számoknak hatványos alakbani kifejezetei; 's a' mi a' természetes számok körül sokszorozás által történik, — az itt csak a' mutatók' (logarithmusok') összeadása által; — a' mi ott elosztás által, az itt kivonás által; — a' mi ott az emelésre kivántató több izbeli sokszorozás által, — az itt a' mutatónak egyszeri sokszorozása által; — a' mi ott a' gyökérvonáshoz kivántató mesterséges osztás által, — az itt egyszerű osztás által. E' szerint:

1) Ha sokszorozni kell két számot egymással: felkeresem azokat a' logar. táblákban, 's logar.aikat összeadom; — ezen összeget a' logarithmusok közt felkeresem, — 's az annak megfelelő szám lesz a' két feladott szám' sokszorozmánya. E' szerint ha *a*-nak és *b*-nek sokszorozmánya = c: tehát az *a*' és *b*' logarithmusainak összege = c' logarithmusa.

$$ab = c;\ \log. a + \log. b = \log. c,$$

p. o. 324-et sokszorozni kell 26-al;

log. 324 = 2,5105450.
log. 26 = 1,4149733

összeadva = 3,9255183

ezen log.-nak megfelel = 8424,
és valóban: $324 \times 26 = 8424$.

2) Ha osztani kell két számot: az osztó' log.-át kivonom az osztandójéból, — 's a' különbséget a' log.-ok közt felkeresvén, az annak megfelelő szám lesz a' hányados. E' szerint ha $\frac{a}{b} = c$: lesz: log. a — log. b = log. c; p. o. 64636 osztandó 1243-al.

log. 64636 = 4,8104745
log. 1243 = 3,0944711

különbség = 1,7160034

ezen log.-nak megfelel = 52,
és valóban: 64636 : 1243 = 52.

3) Ha valamelly számot hatványra kell emelni: kikeresem a' táblából a' logarithmusát, sokszorozom annyival, a' hányadik fokra akarom emelni, — ezen sokszorozmányt a' logarithmusok közt felkeresem; — 's a' melly szám ennek megfelel, az lesz a' kiadott gyökérnek kívánt hatványa. E' szerint ha: $a^3 = c$; lesz: log. $a \times 3$ = log. c; vagy 3 log. a = log. c.

p. o. 25-t kell 3-dik rangra emelni

log. 25 = 1,3979400; ez $\times 3 = 4,1938200$, ezen log.-nak megfelel = 15625

és valóban $(25)^3 = 15625$.

4) Ha valamelly számból gyökeret kell fejteni: kikeresem logarithmusát; elosztom annyival, a' hányadik gyökerét keresem; — a' hányadost felkeresem a' logarithmusok közt, — 's az ennek megfelelő szám lesz a'

kivánt gyökér. — E' szerint ha $\sqrt[3]{a} = b$: lesz $\frac{\log. a}{3}$ $= \log. b$.

p. o. kerestetik $\sqrt[6]{64}$. — Log. $64 = 1{,}8061800$; elosztva 6al $= 0{,}3010300$, — ezen log.-nak megfelel $= 2$; és valóban $\sqrt[6]{64} = 2$.

Ezek szerint az egyenletek' feloldásában, valahol csak sokszorozás, elosztás, emelés, és gyökérfejtés fordúl elő, logarithmusokkal mindig dolgozhatunk. p. o.

1) $x = \frac{ab}{c}$; $\log. x = \log. a + \log. b - \log. c.$

2) $a = \frac{x}{y}$; $\log. a = \log. x - \log. y.$

3) $x^4 = a$; $4 \log. x = \log. a.$

4) $x = \left(\frac{39}{8564}\right)^5$; $\log. x = (\log. 39 - \log. 8564).5$

5) $x = \sqrt[5]{a}$; $\log. x = \frac{\log. a}{5}$

6) $x = \sqrt[6]{4a^2b}$

$$\log. x = \frac{\log. 4 + 2 \log. a + \log. b}{6}$$

Azonban vannak ollyan feladatok, mellyeket logarithmusok nélkül nem is lehet feloldani; — jelesen azok, mellyekben valamelly hatvány-mntatóban álló ismeretlent akarunk kifejteni. p. o.

1) $a^x = b$ lesz: $\log. a \times x = \log. b$, és

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}$$

2) $\sqrt[x-1]{a^n} = b$; vagy $a^{\frac{n}{x-1}} = b$

$$\log. a. \left(\frac{n}{x-1}\right) = \log. b.$$

$$\log a \times n = x \log. b - \log. b$$
$$x. \log. b = n. \log. a. + \log. b$$
$$x = \frac{n. \log. a + \log. b}{\log. b.}$$

3) $7^x = 2401$

$$x. \log. 7 = \log. 2401$$
$$x. 0{,}8450980 = 3{,}3803922$$
$$x = \frac{3{,}3803922}{0{,}8450980} = 4$$

160. §.

A' tértani sorzatokat illető azon feladatokat, mellyekben az *n* kerestetik, 's mellyeket fentebb (154. §.) ki nem tudánk fejteni, — itt már logarithmusok' segitségével kifejthetjük. — Jelesen ha

a) *kiadatnak: a, q, u.* — *'s kerestetik* n. Ezt kifejtjük az I alapegyenletből: $u = aq^{n-1}$

innen: $\log. aq^{n-1} = \log. u$

$$\log. a + \log. q. (n-1) = \log. u$$
$$\log. q. (n-1) = \log. u - \log. a$$
$$n - 1 = \frac{\log. u - \log. a}{\log. q.}$$

innen: $$n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. q} + 1.$$

b) *kiadatnak: a, q, s.* — *kerestetik* n. Ezt kifejtjük a' II-dik alapegyenletből:

$$\text{II. } s = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

innen: $s(q-1) = a(q^n-1)$

innen: $$\frac{s(q-1)}{a} = q^n - 1$$

és: $$q^n = \frac{s(q-1)}{a} + 1$$

és: $$q^n = \frac{s(q-1)+a}{a}$$

és: $n.\log.q. = \log.[s(q-1)+a] - \log a.$

innen: $n = \frac{\log.[s(q-1)+a] - \log.a}{\log.q.}$

c) *kiadatnak: a, u, s. kerestetik* n. Erre nézve a' q a' két alapegyenletből kiirtatik.

az I-ből: $q^{n-1} = \frac{u}{a}$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

a' II-ből: $s(q-1) = uq - a$

$$sq - s = uq - a$$

$$sq - uq = s - a$$

$$q(s-u) = s - a$$

$$q = \frac{s-a}{s-u}$$

innen: $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{s-a}{s-u}$

vagy: $\frac{\log.u - \log.a}{n-1} = \log.(s-a) - \log.(s-u)$

innen: $\log.u - \log.a = (n-1)[\log.(s-a) - \log.(s-u)]$

innen: $n-1 = \frac{\log.u - \log.a}{\log.(s-a) - \log.(s-u)}$

és: $n = \frac{\log.u - \log.a}{\log.(s-a) - \log.(s-u)} + 1.$

d) *kiadatnak: q, u, s. kerestetik* n. Erre nézve a' két alapegyenletből az a kiirtatik:

az I-ből: $a = \frac{u}{q^{n-1}}$

a' II-ből: $s(q-1) = uq - a$

$$a = uq - s(q-1)$$

innen: $\frac{u}{q^{n-1}} = uq - s(q-1)$

vagy: $\log.u - (n-1).\log.q = \log.[uq - s(q-1)]$

$$-(n-1)\log.q = \log.[uq - s(q-1)] - \log.u.$$

$$(n-1)\log. q = \log. u - \log.[uq - s(q-1)]$$

$$n-1 = \frac{\log. u - \log.[uq - s(q-1)]}{\log. q.}$$

$$n = \frac{\log. u - \log.[uq - s(q-1)]}{\log. q} + 1.$$

161. §.

A' kamatoló tőkepénzek' növekedésének kiszámítása is logarithmusok' segitségével történhetik. p. o.

Ha valamelly tőkepénz kiadatik, úgy hogy annak kamatja, és kamatjának kamatja is járjon: kérdés, bizonyos évek múlva mennyire fog növekedni?

Megfejtés: 1 forinttól 1 évi kamat legyen $= d$, (p. o. 5 procent $= 0{,}05$, vagy 6 procent $= 0{,}06$); — a' tőkepénz legyen $= c$; ennek egy évi kamatja lesz $= cd$ (mert $1 : d = c : cd$). És igy első év' végével, a' tőke és kamat együtt $= c + cd = c(1+d)$. — A' 2-dik évi kamat igy jő ki: $1 : d = c(1+d) : cd(1+d)$, — és igy a' 2-dik év végén, tőke és kamat együtt lesz $= c(1+d) + cd(1+d)$, vagy $(c+cd)(1+d)$, vagy $= c(1+d).(1+d) = c(1+d)^2$. — A' 3-dik évi egész növekedés, épen illy számitással, fog lenni $= c.(1+d)^3$; — az n-dik évi pedig $= c(1+d)^n$. — És igy általában azon mennyiség, $(= k)$ mellyre bizonyos tőke $(= c)$, bizonyos évek alatt $(= n)$, kamatjaival, és kamatjainak kamatjaival összeadva növekszik, kifejeztetik ezen egyetemes képlettel:

$$k = c(1+d)^n,$$

vagy, — el nem felejtvén hogy a' d mindig illyen forma törtszámot: 0,05, vagy 0,06 'sat. — t. i. a' procentet — és igy: $1+d$ illyen formát: 1,05, vagy 1,06 'sat. jelent: — ezen $1+d$ helyett egy betüt, p. o. p-t tévén, lesz a' képlet:

$$k = cp^n, \text{ vagy}$$

$$\log. k = \log. c + n. \log. p.$$

Már ezen képletből, a' benne előforduló négy tagokat, t. i. k, c, n, p-t ki lehet fejteni, 's illyen 4 képletet csinálni.

I. $\log. k = \log. c + n. \log. p.$

II. $\log. c = \log. k - n. \log. p.$

III. $n = \frac{\log. k - \log. c}{\log. p.}$

IV. $\log. p. = \frac{\log. k - \log. c}{n.}$

Ezen képletek szerint kifejthetni illyen forma feladatokat:

1) *10000 forint, kamatjainak kamatjaival együtt, 6-percenttel, 20 év alatt mennyire növekszik?*

Ki van adva: $c = 10000$, $n = 20$, $d = 0{,}06$, és igy $1 + d$ vagy $p = 1{,}06$: kerestetik k.

$$\log. k = \log. 10000 + 20 \times \log. 1{,}06.$$

$$\log. 1{,}06 = 0{,}0253059 \,.\, 20 = 0{,}5061180$$

ehez adatván 10000' logar.a $= 4$, lesz $= 4{,}5061180$, 's ennek megfelel $= 32071$ forint 16 denár.

2) *Valaki tartozik hitelezőjének lefizetni 4 év mulva 6000 forintot. Ha ez most akarná őtet fizettetni, valljon mennyit fizetne, kivonván az addig szaporodható kamatokat, és kamatok' kamatjait 4-proc.tel számítva?* — Itt azt keressük: mennyi azon tőke $= k$, melly 4 procenttel, 4 év mulva, a' kamatokat, és azoknak kamatjait összevéve 6000 forintra növekszik?

Ki van adva: $k = 6000$, $n = 4$, $p = 1{,}04$.

$$\log. c = \log. 6000 - 4 \,.\, \log. 1{,}04$$

$\log. 6000 = 3{,}7781513$; $\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$

$$\underline{\qquad\qquad 4}$$

$$0{,}0681332$$

$3{,}7781513 - 0{,}0681332 = 3{,}7100181 = \log. c$, 's ennek megfelel $= 5129$ forint.

3) *Egy u'sorás kölcsön ád valakinek 600 fr., 's a' kötelezőbe irat 800-at, mellyeket 3 év mulva kamat nélkül kell vissza-fizetni: kérdés hány procent kamatot húz tőle?*

Itt ki van adva $c = 600$, $k = 800$, $n = 3$: keressük a' p-t. és igy

$$\log. p. = \frac{\log. 800 - \log. 600}{3}$$

$\log. 800 = 2{,}9030900$
$\log. 600 = 2{,}7781513$
kivonv. $= 0{,}1249387$

már: $\frac{0{,}1249387}{3} = 0{,}0416462 = \log. p.$

ennek megfelel $= 1{,}10$, és így $p = 1{,}10$, innen: $d = 0{,}10$, tehát húz 10 procentet.

4) *10000 fr. hány év mulva növekszik 50000-re 6 procenttel?*

itt: $k = 50000$, $c = 10000$, $p = 1{,}06$.

$$n = \frac{\log. 50000 - \log. 10000}{\log. 1{,}06}$$

$\log. 50000 = 4{,}6989700$
$\log. 10000 = 4{,}0000000$
kivonva $= 0{,}6989700$
$\log. 1{,}06 = 0{,}0253059$

már: $\frac{0{,}6989700}{0{,}0253059} = 27{,}62 = n.$

Több illynemű feladatok' kifejtését lehet a' logarithmusok' segitségével eszközleni, — de többekre már itt nem terjeszkedhetünk.

Javítandók.

Lap.	sor.	hiba.	javítás.
5	8 (fel.)	fogalmuktól	fogalmaktól.
31	2 (alul)	a' kisebb. nő a' kül. . .	a' kisebb. fogy a' kül., de fogyván a' kivonandó, nő a' kül. 'sat.
33	17 (fel.)	(6000)	*kihagyandó.*
34	2 (alul)	$3.4.12 = 36$, és 4.3 .	$3.4.12 = 36.4$; és 3 'sat.
39	16 (alul)	sokszormánynál . . .	sokszorozmánynál.
67	6 (fel.)	$91 = 7(3.9) + 7$ . .	$91 = 7.(3 + 9) + 7$
78	7 (fel.)	által tehát	áll tehát.
—	8 (alul)	*sor' végin:* $+5.33\ldots$	$+5.3.3.$
89	1 (alul)	$^{20}/_{2} = 4$	$^{20}/_{2} = 10.$
101	1 (alul)	$^{30}/_{27}$	$^{30}/_{72}.$
116	14 (fel.)	sokszorozmány: 0,115 .	sokszorozmány: 0,0115.
132	15 (fel.)	felsőbbet elosztjuk . .	alsóbbat elosztjuk.
139	4 (fel.)	$+ {}^{9}/_{72} + 5$ 'sat. . . .	$+ {}^{9}/_{72} = 5$ 'sat.
141	4 (fel.)	12,545	$= 12{,}545.$
154	14 (fel.)	mellyből $- 4a' + 4^2$. .	mellyből $- 4a' + 4'$
169;	6, és 16 (f.)	$+ ab^{n+1}$	$+ ab^{n-1}$
—	7 (alul)	több mint a' h. t. $= n + 1$	kisebb mint a' h. t. $= n - 1.$
170	2 (fel.)	$+ {}^{1}/_{1000} + {}^{1}/_{1000}$ . . .	$+ {}^{1}/_{1000} + {}^{1}/_{10000}.$
—	1 (alul)	$\pm \frac{ab^{n+1}}{1+b}$	$\pm \frac{ab^{n-1}}{1+b}$
190	9 (alul)	igy $\sqrt[4]{a^{14}a^{13}b^5c}$ . . .	igy $\sqrt[4]{.2^{14}a^{13}b^5c}.$
191	2 (fel.)	$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{1.7}{7.7}}.$	$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2.7}{7.7}}$
196	1 (fel.)	$12a^2x^3$	$12a^2x^1.$
201	16 (alul)	100-é $= 1000$ . . .	100-é $= 10000.$
203;	6 és 13 (f.)	998901	998001.
210	10 (alul)	$3.900^3.90$	$3.900^2.90.$
211;	10, 11 (f.)	legközebb	legközelebb.
219	8 (alul)	$= \sqrt{{}^{77}/_{4}}$.	$\sqrt{{}^{77}/_{4}}.$

Lap.	sor.	hiba.	javítás.
222	7 (alul)	$3+4=36:3$ . . .	$3\times 4=36:3.$
227	7 (alul)	lesz: $x-\sqrt[m]{a}$. . . .	lesz $x=\sqrt[m]{a}$.
232	12 (fel.)	$\frac{a+z-b}{2}, -z$ . .	$\frac{a+z-b}{2}-z.$
234	4 (alul)	$=m111\frac{1}{4}m+65$ . .	$=111\,.\,m+65.$
—	3 (alul)	$=111+65$	$111\,m+65.$
257	7 (alul)	1-sö mar. $x-\frac{x-2}{2}$.	1-sö mar. $x-\frac{x+2}{2}$
—	5 (alul)	2. mar. $\frac{x-2}{2}-\frac{x-2}{4}$.	2. mar. $\frac{x-2}{2}-\frac{x+2}{4}$
261; 3, 4, 5 (al.)		$=$ jegy. utáni y-k eleibe	— jegy jö.
264	7 (alul)	$+120+4x$	$+120-4x.$
270	1 (fel.)	625 fort.-tal	625 ($=$b) fort.-tal.
280	15 (alul)	kepest	képest.
282;	10, 11 (f.)	össze kell adni a' két elsö egyenletet . . .	kikell vonni az elsö egyenletet a' 2-dikból.
290	7 (fel.)	b : am	b : bm.
325	4 (fel.)	$s=un-\frac{(dn^2+dn)}{2}$.	$s=un-\frac{(dn^2-dn)}{2}.$
328	3 (fel.)	$n^2-\frac{2u+d}{d}+n$.	$n^2-\frac{2u+d}{d}\times n.$

1961 MAJ 2

2009 SZEP 14

1955 FEB 23

1982 FEB 10

2015 SEP 16