TISZTA

MATHESIS

KEZDETE.

MÁSODIK DARAB.

TERJEDSÉG - TUDOMÁNY,

ÉS

HÁROMSZÖG-MÉRÉS.

TANITVÁNYI' SZÁMÁRA

KÉSZÍTETTE

TATAI ANDRÁS,

A' KECSKEMÉTI REF. LYCEUMBAN MATHESIS ÉS PHYSICA PROFESSORA.

Négy Táblaképekkel.

PESTEN, 1836.

Nyomtatta Fűskúti Landerer Lajos.

BÉVEZETÉS.

§. 1. Terjedtség-Tudomány a' tiszta Mathesisnek az a' Része, melly a' Részre-nem-vált Mennyik (quanta continua) mennyiségükről, vagy Terjedtségükről, 's mérésükről tanít.

§, 2. Mint a' számokat, úgy a' terjedtségeket is, tisztán, vagy elvonva, semmi tárgyhoz nem kötve kell képzelnünk. Mert Mathematica Terjedtség nem egyéb, mint bizonyos határok közzé szorított Tér (spatium), minden materia nélkül, p. o. egy golyobisban a' Mathematicus nem nézi, vas e az? fa e? 's a' t., hanem csak azon tért, vagy helyet, mellyet az elfoglal.

§ 3. A' Terjedtségnek legelső alapja a' Pont (punctum), melly Mathematice tekintve nem egyéb, mint Terjedtséget meghatározó Kezdet, vagy Vég, vagy Választék, de maga minden kiterjedés nélkül, — és igy részekre nem osztható, p. o. ha egy Táblának (kép 1). négy osztályai különböző színűek: a' hol ezen négy színek öszvejönnek, kezdődnek, végződnek, egymástól elválnak; ott van Pont, a' C-nél.

§. 4. Két pontnak egymástóli távolsága, vagy két Pont közti Tér, ha annak csupán hosszúságát tekintjük, neveztetik Vonal-nak (linea). A' Vonal tehát, Mathematice tekintve, nem egyéb mint csupa Hosszúság, — minden szélesség, és vastagság nélkül.

§. 5. Több Vonalok által bezárt, 's meghatározott Tér neveztetik Terűletnek (superficies); melly tehát Mathematice tekintve Hosszúság és Szélesség együtt, — de vastagság nélkül. A' Terűlet különböző formájú lehet; — 's formáját tekintvén neveztetik Kép-nek, Ábrázolatnak (figurae).

§. 6. Több Területek által mindenfelől bezárt, 's meghatározott Tér neveztetik Tömeg-nek (solidum, corpus Mathematicum); melly tehát Mathematice tekintve Hosszúság, Szélesség, és Vastagság együtt.

Jegyzék. 1). Analytice ugyan ezek: — A' végetlen Térnek egy határok közzé szorított része neveztetik Tömeg-nek; — az ezt meghatározó legkülső határok Terület-nek; — a' Terület végső határai Vonalok-nak; — a' Vonalok végső határai Pont-oknak.

Jegyzék. 2). A' Terjedtség származását így is képzelhetni:

a) Ha a' Pont elindúl, 's nyomokat hágy maga után: ott származik Vonal.

b) Ha a' Vonal egy másik keresztbe fekvő vonalnak minden pontjára, maga maga mellé lefektetődik: onnan származik Terület.

c) Ha a' Terület, egy keresztbe fekvő Vonalnak minden pontján maga maga mellé fektetődik: onnan származik Tömeg.

Ezen felfogások Mathematice ugyan helytelenek, de Physice nem; a' kezdőn pedig segítnek.

§. 7. Minden Testnek, vagy elvonva szóllván, minden Terjedtségnek ezen három fajta Kiterjedése, (vagy Mérhetősége, dimensiója) van: Hosszusága, Szélessége-Vastagsága; és ezek közzül hol egyiket, hol másikat akarjuk valamelly Test körül megtudni. — A' Terjedtség-Tudomány tehát, a' Kiterjedésnek, vagy Mérhetőségnek ezen 3 fajai szerént, három fő részekre oszlik; u. m.

1). Vonal-mérés (Euthymetria).
2). Terület-mérés (Epipedometria).
3). Tömeg-mérés (Stereometria).

Jegyzék. Tiszta Terj.-Tudomány (Geometria pura) az, melly a' Terjedtség törvényeit tisztán, nem alkalmaztatva fejtegeti. Alkalmazott Terj. Tud. (Geometria practica) pedig az melly azon törvényeket a' földmérésre alkalmaztatja. — Mi helyel helyel, a' tiszta igazságok mellett, azoknak alkalmazhatását is megemlítjük.

ELSŐ RÉSZ.

VONAL-MÉRÉS (Euthymetria).

ELSŐ CZIKKELY.

Általlános esméretek a' Vonalokról, — Szegletekről, — Képekről.

§. 8. Vonal-nak neveztetik két Pont közti Térnek hosszasága. A' Vonal vagy Egyenes, vagy Görbe. — Egyenes Vonal (linea recta) az, melly a' kezdő ponttól fogva szüntelen, minden elhajlás nélkül, a' végző pont felé tart. (Kép 2.). — Görbe Vonal (linea curva) az, melly a' kezdő és végző pontok közti útjában inkább vagy kevésbé elhajlik, (kép 3.). — Egyik ponttól a' másikig húzott akárhány vonalak közt legrövidebb az egyenes vonal. És két pont közzé csak egy egyenes vonalat lehet húzni.

§. 9. Hogy az esmeretlen Hosszúság mennyiségét megtudhassuk: bizonyos esmert Hosszusághoz kell azt szabni, vagy azzal kell öszve-hasonlítni, — mellyet Mérték-nek nevezünk. — A' Föld-mérők kétféle Hosszuság-mértékkel élnek, t. i. vagy Tizedessel, vagy Tizenkettedessel.

1). A' Tizedes szerént: egy Öl-ben (orgia) van 10 Láb (pes), — egy Láb-ban 10 Hüvelyk (pollex), — egy Hüvelykben 10 Vonal (linea), — egy Vonalban 10 Pont.

2). A' Tizenkettedes szerént egy Öl-ben van 6 Láb, — egy Láb-ban 12 Hüvelyk, — egy Hüvelykben 12 Vonal, — egy Vonalban 12 Pont.

Jegyzék. A' Lábak, (annál fogva az ennél kissebb 's nagyobb mértékek is) nem minden Tartományban egyenlő hosszúk. A' Bécsi Lábnál, mellyel mi mérünk, hosszabb a' Párisi Láb, mellyel nem csak a' Francziák, hanem többnyire a' Tudósok élnek; — a' kettő közti Szer ez: úgy van a' Bécsi a' Párisihoz, mint = 100,900 : 102,764, vagy mint 1 : 1,02764. —

Az Ölnek jele ez: (0), — a' Lábnak ez: (') — a' Hüvelyknek ez: (''), — a' Vonalnak ez: ('''), — a' Pontnak ez: (''''), p. o. 5°, 8', 9'', 7''', 6'''' = 5 öl, 8 láb, 9 hüvelyk; 7 vonal, 6 pont.

§. 10. Két egyenes Vonalnak egymás-eránti fekvése ötféle lehet, ugy mint:

1). Egyenközü, vagy Egyközü Vonalok (lineae parallelae) azok, mellyek mindenütt egyenlő távolsággal mennek egymás mellett, és igy akár meddig nyuljanak, soha öszve nem érnek (kép 4).

2). Öszvetartók (convergentes) azok, mellyeknek végeik, ha tovább nyujtatnának, egymással öszve érnének (kép 5); — és Széjjeltartók (divergentes), mellyek annyival széljelebb mennek egymástól, minél tovább nyujtatnak. (kép 6).

3). Öszvemenők (concurrentes), mellyek egy pontban öszve mennek (kép 7).

4). Szelők (secantes), mellyek egymáson keresztül mennek. (kép 8).

5). Függöny (perpendiculum), vagy Függönyös Vonal (linea perpendicularis) az, melly egy másik Vonalon ugy áll, vagy azt úgy metszi, hogy egyik részre sem hajlik inkább. (kép 9).

Jegyzék. 1). Egyközü Vonalakat úgy lehet húzni, ha az egyik vonalnak mind két végire letévén a' czirkalom egyik szárát, a' másik szárával karélyokat csinálunk, a' czirkalomnak ugyan azon nyílásával; 's ezen karélyoknak legfelső pontjaikat egyenes Vonallal öszve-kőtjük, — melly az előbbivel Egyközű lessz, (kép 10.).

Jegyzék. 2). Függönyt úgy lehet húzni, ha egy Vonalon, azon ponttól, mellyen a' Függöny fog állani, két felől egyenlő távólságra, letévén a' czirkalom' egyik lábát, a' másik lábával, mindkét felőlről, egymást-metsző karélyokat csinálunk, — a' czirkalomnak akármillyen ugyan, de mind a' két pontról ugyan - azon nyílásával. Már azon pontból, a' hol ezen karélyok égymást metszik, Vonalat húzunk a' meghatározott pontra, — 's ez lessz a' Függöny, mert egyik felé sem hajlik, (kép 11.). — Megmutatását lásd §. 32.

§. 11. Ha egy egyenes Vonalat (kép 12). CA, a' C végén megnyomván, az A végénél fogva ugy forditunk körül, hogy a' honnan elindúlt, oda menjen vissza, az A-hoz; 's ezen kerűlő útjában, maga után nyomokat hagyni képzeljük: származik onnan egy görbe Vonallal bezárt Tér, mellyet Kariká-nak (circulus) nevezünk. — Azon görbe Vonal, mely ezen kerek Tért körül veszi AFKIBGEA, Kerület-nek (peripheria); — azon pont, mely körül a' CA Vonal megfordult, Középpontnak, vagy Székpontnak (centrum) neveztetik, — mely is a' kerület minden pontjaitól egyenlő távolságra van, mivel a' CA Vonal maga magával mindenütt egyenlő, — pedig annak végső pontja = A formálta a' Kerűletet. — A' Kerűletnek kisseb, vagy nagyob része neveztetik Karély-nak (arcus), p. o. EA, IK, KF, 's a' t. — Az ollyan egyenes Vonal, mely a' Kerűlet valamely pontjától, annak általellenes pontjára, a' Székponton keresztűl vonatik, neveztetik Közép-szelőnek, (diameter) p. o. AB. Ennek fele, és igy a' Székponttól a' Kerületig húzott vonal, p. o. BC Küllő-nek (radius, v. semidiameter). — Minden olyan egyenes vonal, mely a' kerület valamely pontjától, egy másik pontjára, nem a' Székponton keresztül húzatik, neveztetik Húr-nak (chorda, v. subtensa), p. o. IK, EF, 's a' t.; — a' Húr- és a' Karély-közti Tér Szeletnek (segmentum), p. o, EFA; — azon tér pedig, melyet két Küllő a' köztök eső Karélyjal zár-be, Gerézdnek (Sector).

A' Karikát tehát röviden így lehet meghatározni: A' Karika egy ön-magába visszatérő, 's a' Közép-ponttól mindenütt egyenlő távolságra eső görbe Vonal által be-zárt Tér.

Egyszékű, vagy Egyközepü Karikák (circuli concentrici) azok, melyeknek Szék-pontjok együvé esik; és mivel ezeknek kerületeik egyközűleg mennek, neveztetnek Egyközű Karikáknak is: (Circ. paralleli), (kép 13). Azok pedig, melyeknek Szék-pontjok nem együvé esik, neveztetnek Más-székűeknek (Excentrici) (kép 14).

§. 12. Következetek:

1) Ugyan azon Karikában minden Középszelők egymással, és minden Küllők egymással egyenlők.

2) A' Középszelő a' Karikát két egyenlő részre osztja; és igy minden egyenes Vonal felett, ha a' Székpont azon esik, félkarika fekhetik.

§. 13. A' Mathematicusok, Egyezmény szerént, minden karikának, akár kisseb, akár nagyob légyen az, Kerületét 360 egyenlő részekre osztják fel, mellyeket Fokoknak (gradus) neveznek; — minden Fok ismét 60 Első-Perczre (minutum primumra), — minden Alsó Percz 60 másod perczre (minutum secundum), — az ismét 60 harmadperczre van felosztva. — Jele a' Foknak (0), az Első percznek ('), — Másod-percznek (''), — Harmadpercznek ('''), p. o. 5°, 16', 37'', 18'''.

Jegyzék. Az ujjabb Franczia Mathematicusok 400 Fokra osztják a' Kerületet, és minden Fokot 100 perczre 's a' t.; mely tizedes osztás helyesebb volna a' réginél, ha közönségesen bevétetnék.

§. 14. Két ollyan Vonaloknak, mellyek egy pontban öszvemennek, egymásra hajlásuk által formált nyílás neveztetik Szegletnek, vagy Szögnek (angulus). — A' Szegletet formáló két Vonalok neveztetnek Szeglet-Szárainak (crura); — az öszveérés pontja pedig Szeglet-Hegyinek, vagy Szög-Hegynek (vertex anguli). — A' Szeglet származását úgy képzelhetni, mintha (kép 15) két vonal, AC és BC előbb egymáson feküdtek volna, — azután a' BC Vonal, a' C végénél megnyomatván, a' B végével felemelkedne, és karélyt formálna, az AB-t. Minél feljeb emelkedik: annál nagyob mind a' karély, mind a' szeglet. — A' Szeglet nagysága tehát nem függ a' szárak hosszaságától, hanem a' szárak közt lévő, kisseb, vagy nagyob nyilástól, — vagy is azon karély nagyságától, mely a' Szeglet' szárai közt esik, — ha t. i. a' Szeglet' Hegyit vesszük Székpontjáúl azon karikának, melynek ezen karély egy része. Innen a' Szeglet nagyságát éppen ezen karélyal mérjük, úgyhogy a' hány foknyi ezen karély; annyi foknyinak mondjuk a' Szegletet is; — és a' Szegletet ezen emlitett karélyal gyakran fel is cseréljük.

A' Szeglet Szárai vagy egyenes vonalak, (melyek lapos területen vonatnak), — vagy Karélyok, (melyek domború, vagy völgyes területen lehetnek). Innen a' Szegletek vagy Egyenesek (rectilinei v. plani), vagy Karélyosok (Sphaerici).

A' Szegletet vagy három betűvel mondjuk ki, melyek közt középre ejtjük a' Szöghegyre esőt, p. o. (kép 16) ABC vagy egy bele írt kis betűvel, p. o. x; 's rövidség okáért ezen jellel irjuk ($<$) p. o. $<$x=Szeglet x.

§. 15. Ha az AB egyenes Vonalra, CD Függönyt állítunk (kép 17): a' mellett két felől, két egyenlő Szegletek formáltatnak, x, és y. És mivel az egyenes Vonal felett félkarika = 180° állhat: tehát ezen Szegletek közül mindeniknek mértéke = 90° vagy egy Körnegyed (quadrans). Az ilyen Szeglet neveztetik Merő-szegletnek (angulus rectus). — A' Merő-szegletnél nagyobb, vagy kisseb Szegletek, közös névvel neveztetnek Hajlott-szegleteknek (anguli obliqui); mégpedig a' nagyobb Tompának (obtusus), p. o. ACE, a' kisseb pedig Hegyesnek (acutus), p. o. ECB.

§. 16. Valamely egyenes Vonal felett (kép. 18)., egy, vagy több Vonalok által formálható szegletek, egymáshoz képest neveztetnek Mellék-szegleteknek (anguli contigui, vel deinceps positi), p. o. x, y, z, v, és ezek együtt tesznek 180 fokot. — Ha csak két Mellék-szeglet van az egyenes Vonal felett: egyik a' másikat kipótolja 180°-ra, p. o. (kép 19). az x az y-t, vagy az y az x-t. — Ha a' két Mellék-szegletek egyenlők: azok kétségkivűl Merők; — ha nem egyenlők: akkor egyik Tompa, másik Hegyes. (kép 19).

§. 17. Két egymást metsző Vonalok által formáltatott négy szegletek közzül kettő kettő hegygyel áll egymás ellenében, p. o. (kép 20). az x az y-ra, a' z a' v-re. Ezek egymáshoz képest neveztetnek Hegyellenes-szegleteknek, anguli verticales).

§. 18. Midőn két Egyközű Vonalat (kép 21). ab, cd, egy harmadik ef ré'sut keresztűl metsz (recta transversa secat duas parallelas): formáltatnak ott 8 szegletek. Ezek közzül négyen, mellyek az Egyközüeken kivül esnek, neveztetnek Külsőknek (externi), x, y, r, s; — négyen pedig, melyek azokon belől esnek, Belsőknek (interni), z, j, v, o. — Ezen Belsők közzül kettő kettő, mellyek a' ré'sut-Vonalnak külön oldalán, még pedig egyik alol, másik felyül, esnek, neveztetnek Visszás-szegleteknek (alterni), p. o. a' z az o-val, a' j a' v-vel.

§. 19. A' mely szegletnek hegyi a' Karika Szék-pontjára esik: neveztetik Szék-szegletnek (ang. ad centrum),

p. o. (kép 22). acb; a' melynek hegyi pedig a' Kerületre esik, Kőrszegletnek (ang. ad peripheriam), p. o. adb.

§. 20. A' Tér valamely részének mindenfelőli bezárására legalabb is három Vonal szükséges. A' Vonalok által minden felől bezárt Tér, lényegét tekintve Terűletnek (superficies), — formáját tekintve pedig Képnek vagy Ábrázolatnak, vagy Térképnek (figura) neveztetik. — A' Képben azon több vagy kevesebb Vonalok, melyek a' tért bezárják, együtt véve neveztetnek Kerítésnek (perimeter); — egy egy azon Vonalak közül külön véve Oldalnak (latus); — a' bezárt Tér pedig Udvarnak (area).

Minden Területben három van, a' mi Méréstárgya lehet, 1) az Oldalok, vagy a' Kerités, — 2) az Oldalok által formált szegletek, — 3) az Udvar. — A' két első méréséről tanít a' Geometria első része, t. i. a' Vonal-mérés, — mert mind az oldalok, mind a' szegletek, (vagy is azokkal felcserélhető karélyok), éppen Vonalok; — az Udvar-mérésről pedig tanít a' Geometria 2dik része, t. i. a' Terület-mérés.

§. 21. A' hány Oldal-vonal, ugyan annyi Szeglet van a' Képben. Már vagy az oldal-vonaloktól, vagy a' szegletektől (azoknak számokhoz képest) vétetnek a' képek külömböző neveik. Nevezetesen:

1) Háromszög (triangulum, trigonum, figura trilatera) $=$ 3 oldal-vonal által bezárt Tér, (kép 23). Jele $\triangle$

2) Négyszög (quadrangulum, tetragonum, fig. quadrilatera) $=$ 4 vonallal zárt Tér. (kép 24). Jele: $\square$

3) Sokszögnek (polygonum) neveztetik minden ollyan kép, melynek négy oldal-vonalánál több van, p. o. Ötszög (pentagonum) (kép 25); — Hatszög (hexagonum) (kép 26). 's a' t.

A' melly Képnek minden oldalai, és minden szegletei egymással egyenlők, az neveztetik Rendesnek, (fig. regularis), és az illyen körűl úgy lehet Karikát írni, hogy minden szeglete a' kerületet éri, 's a' Karika szék-pontja éppen a' Kép közepére esik. — Ellenkező esetben neveztetik a' Kép Rendetlennek, (irregularis).

A' Háromszög-őkről.

§. 22. A' Háromszög három oldal-vonal által bezárt Tér. — Az oldal-vonalak közzűl egyet, akármelyiket, nevezhetni Talpnak (basis); — az ezzel általellenes szegletet Tetőnek (vertex); — a' Talpon kivűl lévő két oldalakat Száraknak (crura). — A' △ Magosságának neveztetik a' Tetőből a' Talpra (még pedig, ha szükséges, Segéd-vonallal folytatott talpra) le-eresztett Függöny, p. o. (kép 27). ha a' Talpnak vesszük ab-t: ugy Magasság = cd; ha Talp = ac, úgy Magasság = be, — ha Talp = bc; úgy Magasság = af. — Igy (kép 28), ha Talp = dc; úgy Magasság = af.

§. 23. A' Háromszögök két tekintetben külömböznek egymástól, u. m. 1) Oldalaikra. 2) Szegleteikre nézve.

1) Oldalaikra nézve háromfélék, u. m.

a) Egyenoldaluak (triang. aequilatera) azok, mellyeknek minden oldalaik egyenlők. (kép 29).

b) Egyen-száruak (aequicrura, s. isoscelea) azok, mellyeknek két oldalok egyenlő, (kép 30).

c) Egyenetlen-oldaluak (scalena), mellyeknek egy oldalok sem egyenlő, (kép 31).

2) Szegleteikre nézve ismét háromfélék, u. m.

a) Merő-szegletűek (triangula rectangula), mellyekben egy merő szeglet van. (kép 32.). — Ezekben a' merő < el általellenes oldal bc neveztetik Feszes-oldalnak (hypotenusa); — a' másik kettő pedig Mellék-oldalnak (cathetus), ab, és ac.

d) Hegyes-szegletüek (acutangula), mellyeknek minden szegleteik hegyesek. (kép 33).

c) Tompa-szegletüek (obtusangula), mellyeknek egy szegletük tompa. (kép 34).

Jegyzék. Egyenoldalú △ et írni úgy lehet, ha a' kiadott oldal a' czirkalom szárai közzé vétetvén, annak ollyan nyílásával, az oldal mind két szélső pontjától egymást metsző karélyok húzatnak, 's a' metszés pontjából a' két oldal le-eresztetik. — Egyen szárúakat is így lehet csinálni, — csak hogy ott nem szükség felvenni a' kiadott oldalt, — hanem lehet a' czirkalomnak akár melly nyilásával karélyokat írni.

§. 24. Nyilvánvalók:

1) A' △-ben két szeglet nem lehet Merő, — annyival kevésbé Tompa.

2) Az Egyen-oldalú △ egyszer'smind Egyen-szárú is; — szegleteire nézve pedig mindég hegyesszegletü.

3) Az Egyen-szárú △ szegleteire nézve lehet akár Merő-, akár Hegyes-, akár Tompa-szegletű.

4) Az egyenetlen-oldalú △-ről is éppen ezt mondhatni.

5) Minden △-t két Merő-szegletü △-re lehet felosztani, ha valamely szegletéből, az általellenes oldalra Függönyt eresztünk. (kép 35).

A' Négyszög-ökről.

§. 25. Négyszögnek neveztetik a' négy Vonal által bezárt Tér. Ha ezen 4 Vonalak közzül két két általellenesek egyközűk: akkor a' Kép neveztetik Egyközénynek (parallelogrammum). Ha pedig vagy csak egy pár oldaluk, — vagy egyik pár sem egyközű: neveztetik a' Kép Oldalmásnak (trapezium). (kép 36).

Az Egyközények 4 fajták; u. m.:

1) Négyleg, vagy Négyegyen (quadratum); mellynek mind a' négy oldalai, és szegletei egymással egyenlők, és igy a' szegletek mind merők. (kép 37).

2) Párlag, vagy Páregyen (rectangulum); mellynek csak két két általellenes oldalai egyenlők, — de minden szegletei merők, és igy egyenlők. (kép 38).

3) Ferde Négyleg (rhombus), mellynek minden oldalai egyenlők; — de szegleteiből csak az általellenesek egyenlők, — és mind hajlottak. (kép 39).

4) Ferde Párlag (rhomboides), mellynek csak által-ellenes oldalai egyenlők, 's szegletei mind hajlottak. (kép 40).

§. 26. Mind a' négy-, mind a' sok-szögökben, az a' vonal, mellyet valamely szegletből az általellenes szegletbe huzhatni, — neveztetik Általlónak (diagonalis) p. o. ac (kép 41). — Az Áltालló minden Négyszögöt két Háromszögre oszt; — a' sokszögöket pedig több háromszögökre. A' rendes Sokszögökben a' Szék-ponton keresztül menő Általlók annyi háromszög-öt formálnak, a' hány oldala van a' Sokszögnek.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' Vonalmérési Egyenlőségekről.

§. 27. Állitmány. A' Hegyellenes szegletek egyenlők. $o = m$, és $n = s$ (kép 43).

Megmutatás. Ha két mennyi közzűl mind egyiket egy harmadik mennyi egyenlő nagyságra pótol ki: azon két mennyik egyenlők. Már pedig az o szegletet az n kipótolja 180°-ra, mert mellék-szegletek; úgy de az m-et is ugyan csak az n éppen 180°-ra pótolja ki, mert más vonalon mellék szegletök. És igy:

$$o = m \text{ — vagy: } \left.\begin{matrix} o + a = 180^\circ \\ m + n = 180^\circ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{a' melyek egy harmadikkal} \\ \text{egyenlők egymás közt is =lők} \end{matrix}$$

és igy $o + n = m + n$. — Az egyenlet mindenik részéből kihagyván az n-et: lessz: $n = m$. E. K. M.

Következet. 1) Éppen igy lehet megmutatni hogy $n = s$.

2) A' metsző vonalok által formált szegletek közzül ha egyet esmerünk, a' többit is esmerjük; p. o. o legyen $= 30^\circ$: lessz az n mellék-szeglet $= 150^\circ$; — az $s = n = 150^\circ$.

§. 28. Az Egyközüket mettző ré'sut vonal által formált 8 szegletek törvényei:

1-ször. Az egyik egyközü vonalon eső külső $<$ egyenlő a' másikon ugyan azon oldalon eső belső $<$-el: p. o. $o = u$, $r = x$, $y = s$, $z = t$. (kép 44). — Ugyan is a' szeglet nem egyéb mind két vonaloknak egymásra hajlása; — a' hol ezen hajlások egyenlők, ott a' szegletek is egyenlők. Már az EF éppen úgy hajlik az AB re, mint a' CD-re; mert az AB és CD közt az EF-re hajlás tekintetéből nincs egyéb külömbség, csak az, hogy egyik feljebb, a' másik lejjebb fekszik; és ha az AB éppen azon hajlásával az EF-re, és el nem tévesztvén az EF-hez való egy közüséget, leszállana a' CD-re: ott az o$<$ eltakarná az u-t, az r az x-et, az s az y-t, a' t a' z-t; ezek tehát egyenlők.

2-szor. A' visszás szegletek egyenlők, a$=$x, t$=$u. Mert a' mik egy harmadikkal egyenlők: egymással is egyenlők. Már az o$<$-el $=$ a' t, mert Hegy-ellenesek; — de ugyan az o-val $=$ az u is, mert Külső-belsők: tehát t$=$u. Igy s$=$r, és x$=$r: innen s$=$x.

3-szor. Az egy oldalon eső két belső szegletek együtt tesznek 180 fokot. Mert s$+$o$=$180°; mivel mellék-szegletek; — úgy de valamely mennyi helyett lehet tenni a' vele egyenlőt; — p. o. az o helyet az u-t, és lesz s$+$u$=$180°. Igy lehet megmutatni azt is, hogy a'

t$+$x$=$180°.

Következet. Már ha két vonalnak, melyeket egy harmadik ré'sut metsz egy közüségük nem bizonyos; csak ezen 3 pontok közzül valamelyiket kell rólok megmutatni, tudniillik vagy azt, hogy a' külső belső $<$-ek egyenlők; — vagy hogy a' viszszás $<$-ek $=$ ök, — vagy hogy a' két egyoldali belső $=$ 180°: mindjárt bizonyos lessz, hogy Egy-közüek.

§. 29. Egyenlő Háromszög-öknek (triangula aequalia seu congrua) neveztetnek ezek, melyeket ha egymásra tennénk, egyik a' másikat tökélletesen elfödné; és igy a' mellyek közzül egyiknek 3 oldala, a' másiknak 3 megfelelő oldalával; — és egyiknek 3 szöglete, a' másiknak 3 megfelelő szögleteivel éppen egyenlők. — Két Háromszögnek egyenlőségét háromféleképpen lehet megmutatni, ugy mint:

1) Ha meg lehet mutatni, hogy 3 oldala, az egyiknek 3 oldalával a' másiknak egyenlő: akkor a' $\triangle$-ök mindenben egyenlők, mert egymást elfödik; — és igy akkor egyiknek szögletei a' másiknak megfelelő szögleteivel egyenlők.

2) Ha meg lehet mutatni, hogy egyiknek két oldala a' másiknak két oldalával, és az ezek közt eső szögletek egyenlők: akkor az egész $\triangle$-ök egyenlők; — és igy minden szögletek 's oldalok a' másikéival egyenlők. Mert (kép 45) ha az AB a' DF-el: és az AC a' DE-vel egyenlő hosszúk; és ezeknek egymástúli elnyilásuk is, az az, az x és y szög-

letek egyenlők: akkor a' B-t a' C-vel, és az F-et az E-vel öszvekötő vonalok nem lehetnek nem egyenlők. BC = FE.

3) Ha meg lehet mutatni, hogy egy oldal egy oldallal, és a' két mellette fekvő szögletek, a' másikban lévő két mellette fekvő szögletekkel egyenlők: ugy az egész △-ök egyenlők. Mert ha p. o. az AB = DF, — x = y és r = z, az az, az AC éppen olyan nyilással indul, mint a' DE; és a' BC éppen olyannal mint az FE: ezek bizonyosan egyenlő messziségre fognak öszvejönni a' C-ben és E-ben; az az: AC = DE, és BC = FE.

Ezen három mód közzül hol egyikkel hol másikkal szokták megmutatni a' △-ök egyenlőségüket.

Jegyzék. A' △-ök egyenlőségének a' Geometrák sok hasznát veszik. Mert ha valamely szögletnek egy másik szöglettel, vagy valamelly vonalnak egy másik vonallal egyenlőségét kell megmutatni: bele veszik azokat különkülön egy egy △-be; de ugy, hogy a' kérdéses szögletek vagy vonalok a' két △-ben egymásnak megfelelők (respondentes, seu homologi) legyenek. Es ha ekkor azon két △-nek egyenlőségét megtudjnk mutatni: ugy a' kérdéses <-ek vagy vonalok kétség kivül egyenlők.

§. 30. Feladat. Valamelly kiadott szögletet BCA-t két egyenlő részre osztani. (kép 46).

Megfejtés. A' szöglet mind két szárán fel kell fogni czirkalommal egyenlő részt, CB = CA; továbbá a' czirkalomnak ugyan azon nyilásával mind az A-ból mind a' B-ből metsző karélyokat kell kanyaritani a' D-nél; — 's a' metszés pontjából a' szöglet hegyibe huzott DC vonal, azt két egyenlő részre osztja, ugy hogy x = y.

Megmutatás. Kihuzván az AD és BD segéd vonalokat, formáltatnak itt két △-ök DCA és DBC; mellyekről azt állitom hogy egyenlők; — 's megmutatom az első próbával, t. i. 3 oldal 3 oldallal egyenlő. Mert BC = CA, mivel úgy csináltam: DA = DB, mert ugy csináltam; — a' DC mind a' két △-nek oldala, — maga magával egyenlő. És igy a' △-ök egyenlők. Már az egyenlő △-ökben minden megfelelő <-ek egyenlők; és igy x = y; — és igy a' BCA szöglet két egyenlő részre, t. i. az x-re és y-ra van felosztva. E. K. M.

§. 31. Feladat. Valamely kiadott vonalt BD két egyenlő részre osztani. (kép 47).

Megfejtés. A' czirkalomnak akármely, de mindég ugyan azon nyilásával, a' vonal két végső pontjáról metsző karélyokat kell csinálni feljül is, alól is; ezeknek metszés pontjait öszve kell kötni az AE vonallal; a' hol ez a' BD-t vágja, ott van az két egyenlő részre osztva, ugy hogy BC=CD.

Megmutatás. Húzván az AB, AD, BE, DE segéd-vonalokat, formáltatnak itt több kisebb nagyobb △-ök. — Ezek közül az ABC-be és ACD be esnek a' kérdéses vonalok. Ezeknek egyenlőségöket kellene hát megmutatni. — Látom hogy AC közös, és igy maga magával egyenlő; az AB=AD, mert úgy csináltam; még a' közbe eső <-knek, az x-nek és y-nak kellene egyenlőknek lenni, 's akkor mindjárt egyenlők lennének a' △-ök. De már ezt nem tudom. De hogy ezeknek egyenlőségöket is megmutassam: bele veszem őket másik két △-be, az ABE, és ADE be; ha ezen △ ök egyenlők, ugy az x=y. Ezek pedig egyenlők, az első próbán; t. i. AB=AD, BE=DE, mert ugy csináltuk, az AE ped g közös oldal. Tehát △-ABE = △ADE, — és igy x=y. — Innen tehát: △ABC = △ACD a' második próbán, t. i. két oldal két oldallal és a' közbe eső szögletek egyenlők. Az egyenlő △-ökben minden megfelelő oldalok egyenlők; és így BC=CD. És igy a' BD vonal két egyenlő részre van felosztva. E. K. M.

§. 32. Feladat. Valamely Vonalra Függönyt húzni.

Megfejtés. Azon ponttól, mellyen fog állani a' függöny, két felöl fel kell venni egyenlő hosszúságot (kép 48). CA=CB; már a' czirkalom akármely nyilásával az A-ból és B-ből metsző karélyokat kell csinálni, — a' metszés pontjából a' C-re vonalt huzni; ez a' DC függöny lessz; mert az x és y <-ek egyenlők.

Megmutatás' Huzván a' BD és AD segéd vonalokat: △ADC=△DCB az első próbán. AD=DB, mert a' czirkalom ugyan azon nyilásával formáltattak: AC=CB, mert ugy vettük fel; — a' DC közös. És igy a' △-ök egyenlők. És igy x=y; tehát a' DC egyfelé se hajlik, — az az Függöny.

§. 33. **Állitmány.** Az egyenlő-szárú △-ökben, a' Talpra eső szögletek egyenlők o=r (kép 49).

Megmutatás. Ha a' C székpontból AB karélyt húzván, annak két küllőjét CA és CB-t öszvekötjük az AB vonallal, formáltatik az ACB △; melly kéttség kivül egyenlő szárú, mert a' CA és CB szárai küllök. — Már hogy az o=r: megmutatom igy: A' C szögletet, mellynek mértéke az AB karély, felosztom két egyenlő részre, úgy hogy legyen x=y, es AE=EB. Itt elő állott két △, ADC, és CDB; ezek egyenlők, a' második próbán, mert a' CD egyenlő magával, — AC=CB. küllök, x=y. Már az egyenlő △-ökben, minden megfelelő <-ek egyenlők; és igy o=r.

Következetek. 1). Mivel az egyen-oldalú △-ök, egyszersmind Egyen-szárúak is: látni való, hogy azoknak mind a' harom szögleteik egyenlők.

2). Mivel △ACD=△CDB: tehát a' t< is egyenlő az s<-el. Ugy de ezek mellék <-ek; a' mellék szögletek ha egyenlők: úgy mindeniknek Merőnek kell lenni. — Merö szögleteket pedig csak függöny csínálhat: és igy a' CD az AB-re függönyösön alló vonal.

3). Mivel △ACD=△CDB: tehát az AD vonal egyenlő a' DB-vel; az az, a' székpontból jövő függöny az AB Húrt két egyenlő részre osztja el.

4). Innen megforditva: Az a' vonal, melly a' húrt két egyenlő részre osztja el; — és a' húrra függöuyösön áll, bizonyosan a' karikának székpontján megy keresztül.

§. 34. **Feladat.** Valamelly karélynak székpontját kikeresni. (kép 51).

Megfejtés. Két húrt húzván bele: azoknak közepököu függönyöket kell ereszteni; 's a' hol azok egymást metszik, ott lessz a' karika székpontja.

§. 35. **Feladat.** Akármelly △ körül karikát irni úgy, hogy minden szögletek kerületre essenek. (kép 50).

Megfejtés. A' △-ök két oldalát fel kell osztani két két egyenlő részre; ekkor a' közepökön keresztül függönyöket kell ereszteni; a' hol ezek egymást metszik: ott lessz a' lejendő karika székpontja; mellyből azt kicsinálhatni.

Megmutatás. Mert képzelvén, mintha már körül volna irva a' karika; a' △ oldalait ugy nézhetjük mint Húrokat; úgy de a' húrt két egyenlő részre osztó függöny a' székponton megy keresztül; és igy a' hol két illyen függönyök egymást metszik: ott a' székpont. E. K. M.

§. 36. Az egyközü vonalok közt eső Egyközüek egyenlők. MO = NP és MN = OP. (kép 52).

Megmutatás. Kihúzván az MP Altallót: formaltatik két △, MOP és MNP. Ezek egyenlők a' harmadik próbán, t. i. MP magával egyenlő, és a' két mellette eső szögletek x = y, o = s, mert visszások. Mar az egyenlő △-ökben minden megfelelő oldalok egyenlők: és igy MO = NP, MN = OP. — E. K. M.

Következetek. 1) Minden Egyközényt általlóval két egyenlő △-re lehet osztani.

2) Minden △-öket úgy lehet nézni, mint felét egy ollyan Egyközénynek, mellynek magossága és Talpa ugyan az, a' mi a' △-gé.

§. 37. Állitmány. Minden △-ben a' három szegletek együtt tesznek $180^{\underline{o}}$-t. (kép 53).

Megmutatás. Kihúzván az EF segét vonalt, az AB Talpal egyközüleg: Szegletek $x + y + z = 180^{\underline{o}}$, mert mellék Szegletek; — ugy de $x = o$, $z = r$, mert visszások; és igy egyenlők helyett egyenlőket tévén: $y + o + r = 180^{o}$.

Következetek: 1) Ha a' △-ben két szögletet esmerünk: a' harmadikat is esmerjük, — mert az pótlék 180^{o}-ra.

2) Az Egyen-oldalu △-nek mindenik külön Szeglete 60^{o}-nyi.

3) Az Egyen-szárú △-nek ha egy szegletét esmerjük: a' többit is esmerjük. Mert ha a' két Talpi-Szeglet közzül az egyiket esmerem, a' másik is egyenlő azzal, — a' harmadik pedig pótlék. — Ha pedig a' Tető-szegletet esmerem: azt kiveszem 180^{o}-ból, — a' maradéknak fele lessz egyik, — fele a' másik Talpi-Szeglet.

4) A' Merő-szegletü △-ben, egy Szeglet-Merő; a' másik kettő pedig együtt teszen egy Merő-Szegletet. Egyik tehát a' masiknak pótléka $90^{\underline{o}}$-ra. És ha a' Merő-Szögletü △, egyszersmind Egyen-Szárú is: úgy a' két Talpi-Szöglet egyenlő lévén; mindenik $45^{\underline{o}}$-nyi.

5) A' △-ben egynél több Merő-Szeglet nem lehet; annyival inkább tompa; mert már két Merő lenne 180°-nyi; hát a' harmadikra mi jutna?

6) Ha két △ közül egyiknek két Szöglete a' másiknak két Szögletével egyenlő: a' harmadik a' harmadikkal nem lehet nem egyenlő.

§. 38. **Állitmány.** A' △-nek folytatott oldalával formált külső szeglet x: annyi, mint a' két talponeső szögletek együtt $o + n = x$. (kép 54).

Megmutatás. Mert $y + x = 180°$. Ugy de
$y + o + n = 180$;
a' mik egy harmadikkal egyenlők: egymás közt is egyenlők, és igy - - - - - $y + x = y + o + n$.
Ha az egyenlőktől egyenlőt veszek el: egyenlők maradnak; tehát elvévén az y-t: lessz $x = o + n$. E. K. M.

§. 39. A' Kerületi Szögletnek **Mértéke** a' Szárai közzé eső Karélynak fele.

Megmutatás. Első eset: Ha a' Szöglet egyik Szára OB a' székponton megy keresztül. (kép 55). Húzván a' másik Száraival OA-val egyközü vonalt EF-t a' Székponton keresztül: lessz $\angle x = y$, mert külső-belsők; — és igy a' mi az x-nek mértéke $= EB$: éppen az, az y-né is. Az EB pedig fele az AB-nek, mert $EB = AE$; mivel egy harmadikkal as OF-el megegyeznek; $EB = OF$, mert hegy ellenes szögletek' mértékei; $AE = OF$, mert Egyközüek közt esnek. És igy $EB = \frac{AB}{2}$; vagy az y Szöglet-mértéke $= \frac{AB}{2}$.

Második Eset: Ha a' Kerületi Szöglet szárai BA és BC közre fogják a' Székpontot. (kép 56). Húzván mind a' két szárával egyközüeket az EV, és FZ-t a' Székponton keresztül: formáltatik az x Székponti Szöglet, melly az y kerületi Szöglettel egyenlő, mert egy harmadikkal az r-el, mind a' kettő egyenlő, mint külső-belsők. És igy a' mi az x-nek mértéke, az az y-né is; t. i az EF karély. Ezen EF karely pedig az AC-nek éppen fele mert $EF = AE + FC$. Ugyan is $EF = ZV$, mert hegyel lenes szögletek mértékei; $ZV = ZB + BV$: ugy de $ZB = FC$

és $BV = AE$, mert egyközűek közt esnek; az egyenlőket felcserélvén $ZV = AE + FC$; vagy $ZV = EF$, $= AE + FC$, az az, EF t. i. az y szöglet mértéke $= \frac{AC}{2}$.

Harmadik Eset. Ha a' kerületi Szöglet mind két szára a' székponttól egy oldalon esik. (kép 57). Az y Szöglet mértéke az AC karélynak fele. Mert $y = x$, mivel az o-val mind ketten egyenlők, mint külső-belsők. Az x-nek mértéke a' GF; és igy az az y-né is. Hogy pedig a' GF éppen fele az AC-nek, igy mutatom meg: $GF = EH$; mint hegyellenes szögletek mértékei; — $AC = BI$, mert Egyközüek közt esnek. Csak azt mutatom hát meg, hogy az EH a' BI-nek fele. Az EH éppen annyi, mint a' $BE + HI$, mert $BE = CF$; $HI = GC$; és igy $BE + HI = CF + GC = GF = EH$. És igy az EH a' BI-nek fele; vagy is egyenlőket tévén helyettök, a' GF az AC-nek fele; azaz, az y szöglet mértéke a' szárai közt eső karélynak fele. E. K. M.

Következetek. 1) Ha a' kerületi szöglet szárai, középszelő két végére esnek; úgy hogy fél kerület feleljen meg neki: akkor az Merő-Szöglet; mert mértéke $= 90°$. — Igy lehet legkönnyebben Merőszögletet csinálni.

2) Ha a' kerületi és székponti Szögleteknek száraik ugyan azon karélyra esnek: a' székponti Szöglet két annyi, mint a' kerületi.

3) Ha a' △ körül karikát irunk, a' három szöglet szárai közzé az egész kerület esik $= 360°$. És igy a' hároknak mérté e mind öszve $= 180°$.

§. 40. Állitmány. A' kerületen kivül eső szögletnek mértéke, a' szárai közt eső két karélynak fél-külömbsége. (kép 58).

Megmutatás. $x = y$, külső-belsők; x mértéke $\frac{EF}{2}$; ugyde $\frac{EF}{2} = \frac{DF}{2} - \frac{DE}{2}$; ugyde $DE = BC$; és igy helyette tévén $\frac{EF}{2} = \frac{DF}{2} - \frac{BC}{2}$, azaz, az x mértéke a' szára közti két karélyok fél külömbsége.

§. 41. Körérintőnek: (tangens circuli) neveztetik az a' vonal DC (kép 59), melly a' kerületet csak egy pontban érinti; és ha arra a' pontra küllőt huzunk: arra ez függönyös lessz.

§. 42. A' Kör-érintő és a' Húr által formált szögletnek BAC mértéke, a' Húr mellett lévő karélynak fele $\frac{AB}{2}$. (kép 59).

Megmutatás. Az EAD, EAB és BAC három mellékszögleteknek mértékök együtt $= 180^\circ$, vagy az egész kerületnek fele $= \frac{AB + BE + EA}{2}$; ugyde az EAB szögletnek magának mérteke $= \frac{EB}{2}$, és igy EAD + BAC-nek mértéke $= \frac{EA + AB}{2}$; és igy a' BAC-nek mértéke $\frac{AB}{2}$.

§. 43. Állitmány. Két pontok a' Kör-érintőn A, és B, mellyek az érintés pontjától a' D-től egyenlő távolságra esnek: a' karika Székpontjától is egyenlő távolságra vannak. (kép 60).

Megmutatás. Kihuzván az AC és BC Segéd-vonalokat: $\triangle ACD = \triangle CDB$, a' második próbán, t. i. $AD = DB$ a' feltétel szerént; — $DC = DC$; — $\angle CDB = \angle CDA$, mert merők. És igy $CB = CA$. — E. K. M.

Jegyzék. Ezen igazságon alapúl az úgy nevezett Viz-szin-mérés mestersége (libellatio). — T. i. ha én a' földön mint golyobison, akárhol megállván, ezen állás-ponttól a' föld székpontjáig vonalat, = Küllőt gondolok; — erre pedig egy vizerányos vonalat, melly ezen Küllővel, merő szögleteket formáljon a' vizerányos vonalat úgy nézhetem, mint Kör-érintőt; — az álláspontomat pedig mint érintés pontját. — Már ezen Kör-érintő vagy is viz-erányos vonal mentében két felöl tőllem egyenlő távolságra eső tárgyak; — vagy is a' mellyeknek magosságuk éppen ezen viz-erányos vonalig tart, az én álláspontomtól egyenlő távolságra két felől: azoknak a' föld székpontjátóli távolságok-is egyenlő. Ha pedig ezen viz-erányos vonalhoz képpest egyik lelyebb esik mint a' másik: akkor azt mondjuk, hogy a' lentebb esőnek Esése van. Nem szükség pedig ezen viz-erányos vonalnak éppen e' föld' szinén húzatni, — nem is lehet — hanem feljebb, ehez való műszerrel, mellyet Viz-szinmérőnek (libella) neveznek; — melly is egy üveg-cső, mellyet égett-borral annyira tele töltenek, hogy csak egy igen kevés levegőcske maradjon benne, melly kis levegő a' csőben, ha mozdittatik, ide 's tova futkosván, midőn a' esőnek, mellyet egy asztalra lefektetünk, éppen középén áll; — akkor a' cső éppen viz-erányos állásban van. — Már a' cső ezen állásának mentiben, a' melly vonalat, a' csőhöz egyközüleg kapcsolt Dioptra, vagy messzelátó segittségével nézhetünk kétfelé: az viz-erányos vonal. — Már ha meg akarnám tudni, hogy a' földön két pont közzül A és B (kép 61) az A mennyivel esik lentebb, mint a' B; karót üttetvén le mindenik pontnál GA és HB; a' kettő közt középen a' C-nél letévén a' viz-szin-mérőt: néznék viz-erányos vonalban mind a' két karóra; — 's a' melly pontjaikra azoknak esnék, a' viz-erányos vonal E és F, megjegyezvén az AE és BF magosságot megmérném; — és a' mennyivel nagyobb az AE, mint az FB: annyival esik magossabban a' B mint az A a' föld' Székpontjától; — vagy annyi Esése van az A-nak a' B-től.

HARMADIK CZIKKELY.

Az Egyenlő Háromszögök földmérési esetekre alkalmaztatásuk.

§. 44. Feladat. Két pontnak A és B (kép 62), mellyek közt egyenesen menni nem lehet, de egy harmadik C pontból mindenikhez egyenesen mehetni, egymástóli távolságukat megmérni.

Megfejtés. Karót ütvén le a' C-nél, meg kell mérni láncczal a CA távolságot, 's visszafelé menvén éppen annyit egyenes vonalban ki kell mérni az E-ig, 's ott karót ütni le. Igy meg kell mérni a' CB távolságot is, — 's hátra fele ugyan annyit mérni a' D-ig, — ott karót ütni le. Ekkor a' D az E-től éppen annyira lessz, mint az A a' B-től; és igy csak a' DE vonalt kell megmérni.

Megmutatás. $\triangle ACB = DCE$ a' második próbán; — $AC = CE$, $CB = CD$, $\angle ACB = \angle DCE$, mert hegyellenesek: és igy $DE = AB$.

§. 45. Feladat. Két pontoknak, mellyek közzül egyikhez menni nem lehet, egymástóli távolságukat megmérni.

Megfejtés. 1) Egyenoldalú $\triangle$-gel (kép 63). Indúlj el az A-tól 60 foknyi szöglet alatt, 's menny egyenes vonalban, mind addig, mig egy ollyan pontot nem találsz, mellytől az A és B felé húzható vonalok ismét 60 foknyi szögletet formáljanak; légyen ez a' pont p. o. C, ott üttess le karót, 's az itt formált ACB $\triangle$ egyenoldalu lesz, mert minden szöglete 60 foknyi, t. i. a' két szöglet 60°, a' harmadik is annyi. Már az Egyenoldalú $\triangle$ - ben csak egy oldalt mérjünk meg, az AC-t, azzal a' többi is egyenlő, és igy annyi lessz az AB is.

2) Egyenszáru $\triangle$-gel (kép 64). Indulj el az A-tól ollyan szöglet alatt, a' millyet lehet csinálni, az akadályok miatt. Ha p. o. indultál 105°-nyi szöglet alatt, menj egyenes vonalban mind addig, mig egy ollyan pontot nem találsz, a' C-nél, a' mellytől az A, és B felé húzható vonalok $37 + \frac{1}{2}$ foknyi szögletet formáljanak. Ide karót üttetvén, az ACB $\triangle$ egyenszáru lessz, mert a' B-nél eső szöglete is $37 + \frac{1}{2}^{\circ}$ és igy $AC = AB$, és csak az AC-t méresd meg.

3) A' B-ponttól (kép 65) két felöl egyenlő távolságra le kell ütni a' C és D karókat. A' C-től az A fele huzható vonalon akárhol le kell ütni az E karót; ekkor az EB távolságot megmérvén, hátra felé ugyan annyit mérünk ki az F-ig, 's oda karót ütünk; ekkor keresünk egy ollyan pontot a' G-nél, mellyből az F a' D-t egy felől, — más felől pedig a' B az A-t egészen elfödje; 's azt állítjuk, hogy a' BG távolság egyenlő a' BA-val, és igy csak a' BG-t mérjük meg.

Megmutatás. $\triangle ACB = \triangle BDG$ a' harmadik próbán, t. i. $BC = BD$ mert úgy csináltuk; — $\angle CBA = \angle GBD$, mert hegyellenesek; hogy pedig $\angle BCA = \angle GDB$ megmutatom más két kisebb $\triangle$ segitségével, t. i $\triangle ECB = \triangle BDF$ a' második próbán, mert $EB = BF$, és $BC = BD$, és a' közbe eső szögletek Hegyellenesek; tehát a' D-nél lévő szöglet is egyenlő a' C-nél esővel. Igy tehát meg van mutatva; hogy $\triangle ACB = \triangle BDG$; és igy $AB = BG$.

§. 46. Feladat. Két ollyan pontoknak távolságukat megmérni, mellyek közzül egyikhez sem lehet menni.

1) Eset. Ha van egy ollyan hely, a' honnan mind a' kettőt egyenes vonalban lehet látni: Ezen helytől t. i. a' C-től (kép 66). Indúlj el 60°-nyi szöglet alatt, 's menj mind addig, mig ollyan pontot nem találsz, a' D-nél, mellyből az A-hoz 60 foknyi szöglet alatt nézhetsz; — Innen ismét jőjj leljebb mind addig, mig ollyan pontot nem találsz az E-nél, mellyből a' B-felé 60 foknyi

szöglet alatt nézhetsz, és karókat ütvén a' D-nél 's az E-nél, lesz DE = AB.

Megmutatás. Mert △ CEB egyenoldalú, mivel minden szöglete 60 foknyi, és igy CE = CB; vagy CD + DE = CA + AB. Ugyde a' CDA △ is egyenoldalú, mert minden szögletei 60°; és igy CD = CA; — már egyenlőkből egyenlőket vévén el, egyenlők maradnak, és igy CD + DE = CA + AB; — kihagyván egy felől a' CA-t, más felől a' CD-t: lessz DE = AB, és igy csak a' DE távolságot kell megmérni.

2-dik Eset. Ha semmi pontból nem lehet a' két tárgyat egyenes vonalban látni.

Megfejtés. Vegyünk fel egy harmadik helyet a' C-nél (kép 67); attól két felől két egyenlő részt a' CE és CD-t. Már az E-től az A felé nézvén egyenes vonalban, üssünk le karót akárhova; p. o. az F-nél: — ekkor az FC vonalat megmérvén vigyük által a' CG-re. Most már keressünk egy ollyan pontot a' H-nál, mellyből egy felől a' G a' D-vel, más felől a' C az A-val egyenes vonalban lássék. — Hasonlóul nézvén a' D-ből a' B felé egyenesen, karót ütünk az I-nél, és az IC vonalat vigyük által a' CK-ra, 's ekkor keressünk egyollyan pontot az L-nél, mellyből egy felől a' K az E-vel, más felől a' C a' B-vel egyenes vonalban lássék. Most már az L karó a' H-tól éppen annyira van, mint az A a' B-től, vagy LH = AB.

Megmutatás. △ LCH = △ CAB a' második próbán, mert LC = CB a' mit meg lehet mutatni abból, mivel △ CEL = △ CDB (lásd §. 45) továbbá CH = CA, mivel CDH = △ CAE (lásd §. 45); — Már ha két oldal két oldallal egyenlő, LC = CB és HC = CA; a' közben eső szögletek pedig hegyellenesek, x = y: tehát a' △-ök egyenlők lévén, LH = AB.

§. 47. Feladat. Valamelly hozzájárúlható magosságot megmérni.

Megfejtés. Keressünk egy ollyan pontot a' C-nél (kép 68), mellyből ha a' Torony aljához, és tetejéhez nézünk, ez a' két vonal 45° szögletet formál; 's itt a' C-nél karót üttetvén le, formáltatik △ ABC, még pedig merőszögletű, egyenszáru, mivel a' Torony mellett merőszöglet van; a' másik két szöglete pedig mindenik 45^{o}; és igy ezen △-ben BC = BA, 's csak a' BC-t mérjük meg, ez annyi lessz, mint a' Torony' magassága.

NEGYEDIK CZIKKELY.

A' Hasonlatosságokról és Egyenszerességekről.

§. 48. **Hasonlatosságnak** neveztetik a' Mathesisben két mennyinek egyenlő számú, és egyenszerű részekre osztása. Ha két mennyi közzül a' kisebbiknek ugyan annyi része van, mint a' nagyobbiknak; — és a' kisebbiknek mindenik része éppen ollyan Szerben van a' maga egészéhez, és a' többi részekhez; — mint a' nagyobbiknak megfelelő része a' maga egészéhez, és a' többi részeihez: az illyen két mennyik egymáshoz **hasonlók**, vagy **egyenszeresek** (similia seu homologa). Igy p. o. a' kis karika hasonló a' nagy karikához, mert mindenik 360 fokra van osztva, és mindenik fok az egyikben éppen úgy van az egész kerülethez; mint a' másikban. — Két vonalok akkor egymáshoz hasonlók, vagy egyenszeresek: ha a' kisebbik nem csak annyi részekre van osztva mint a' nagyobbik, hanem ha mindenik része ugy van a' maga egészéhez, mint a' másiknak megfelelő része a' maga egészéhez. Igy hasonló a' Rajz a' maga Tárgyához, — a' gyermek a' nagy emberhez.

§ 49. **Állitmány.** A' △-ben a' talpal egyközü vonal ugy metszi a' △ két oldalait, hogy az elmettzett részek a' magok egészeikhez egyenlő Szerben lesznek: az az, az egyik oldalból elmettzett rész éppen annyid része a' maga egészének, mint a' másik oldalból elmettzett rész a' maga egészének. (kép 69).

Megmutatás. △ ABC tetejéből függő magosságot = AD eresztvén, — ezt elosztjuk néhány egyenlő részekre, p. o. háromra; az osztájok pontjaira a' talpal egy közü vonalakat húzunk; — ezen vonalok valamint a' függő magosságot: ugy a' △-nek mind két oldalait három három egyenlő részekre osztják, úgy hogy az AE $= \frac{1}{3}$ része az AB-nek, és az AF $= \frac{1}{3}$ része az AC-nek. Ha ezt megtudjuk mutatni: akkor illyen egyenszert mondhatunk: — AE : AB $=$ AF : AC; az az, akkor az EF talpal egyközü vonal a' △ oldalait egyenszeresen (proportionaliter) mettzi. — Mutassuk meg tehát 1-ször: hogy az AE $= \frac{1}{3}$ az AB-nek. Ez meg lesz mutatva akkor, ha megmutatjuk azt, hogy AE $=$ EG $=$ GB. Mert ha ezek mind egyenlők: akkor egyik egyik $\frac{1}{3}$ része az egész AB-nek. —

Először tehát AE $=$ EG. — Bele veszem mindeniket két △ be, huzván az E-től Függönyt $=$ EL. Már △ AEI $=$ △ EGL a' harmadik próbán, t. i. AI $=$ EL, mert egy harmadikkal az IK-val mindenik egyenlő, t. i. AI $=$ IK, mivel ugy csináltuk; EL $=$ IK, mert egyközük közt egyközük; — továbbá a' mellettök fekvő szögletek, $\angle$ L $=$ $\angle$ I, mert merök, $\angle$ GEL $=$ $\angle$ EAI, mert külső-belsők, és igy △ EAI $=$ △ EGL: és igy AE $=$ EG.

Másodszor. Hasonlóul hogy EG $=$ GB onnan tetszik ki, mert △ EGL $=$ △ GBM, éppen azon megmutatással, mint az előbbeni. — Innen látni való hogy AE $=$ EG $=$ GB; és igy ezek mind egyenlők, és egyik egyik az egész AB nek $\frac{1}{3}$ része. — Hasonlóul a' másik oldalon megmutatjuk, hogy AF $=$ FH, mert △ AIF $=$ △ FNH a' harmadik próbán, mert AI $=$ FN, mert mindenik egyenlő egy harmadikkal, az IK-val és $\angle$ N $=$ $\angle$ I, mert merök; — $\angle$ F $=$ $\angle$ A, mert külső-belsők; tehát △ AIF $=$ △ FNH; és igy AF $=$ FH. — Továbbá hogy FH $=$ HC megtetszik abból, mert △ FNH $=$ △ HOC éppen az előbbi megmutatással. — Innen látni való, hogy AF $=$ FH $=$ HC; és igy mindenik $\frac{1}{3}$ része az egész AC-nek. Mondhatjuk hát ezen egyenszert: — AE : AB $=$ AF : AC: mert valamint az AE $= \frac{1}{3}$ AB; ugy az AF $= \frac{1}{3}$ AC. — És igy a' talpal egyközüleg huzott vonal a' △ oldalait egyenszeresen mettzi. — Ezt pedig megforditván, az is igaz lessz, hogy minden ollyan vonal, melly a' △ oldalait egyszeresen mettzi, a' talpal egyközü. —

§. 50. **Állitmány.** Az ollyan $\triangle$-ökben, mellyeknek szögleteik egyenlők, az egyenlő szögletökkel által-ellenes oldalok egyenszeresek (proportionalia). (kép 70),

Megmutatás. Csináljunk két $\triangle$-t ABC és $\alpha\beta\gamma$-t ugy hogy azoknak megfelelő szögleteik egyenlők legyenek, t. i. $<\alpha = <A$, $<\beta = <B$, $<\gamma = <C$. Tegyük fel a' kisebb $\triangle$-t a' nagyobbik tetejére; a' mit megtehetünk, mivel $<\alpha = <A$. — Már azt állitom, hogy a' kisebb $\triangle$ talpa, a' $\beta\gamma$ egyközü a' nagyobb $\triangle$ talpával a' BC-vel; — mert $<\beta = <B$, és $<\gamma = C$. mert ugy csináltuk; ugy de ezen szögletek itt külső-belsők; már pedig, ha a' külső-belső szögletek egyenlők: akkor azon vonaloknak, mellyek mellett azok esnek, egyközüeknek kell lenniök; — és igy $\beta\gamma$ egyközü a' BC-vel. — Továbbá az imént tanultuk, hogy a' talpal egyközü vonal a' $\triangle$ oldalait egyenszeresen metszi, és igy mondhatom ezen egyenszert; — $\alpha\beta : AB = \alpha\gamma : AC$; és ha már most a' kisebb $\triangle$-t a' nagyobbtól külön nézem (kép 71). 's akkor mondom ezen egyenszert $\overline{\alpha\beta} : AB = \alpha\gamma : AC$: latni való, hogy az egyenlő szögletekkel által-ellenes oldalok egyenszeresek. —

Ha másuvá teszem is a' kisebb $\triangle$-et a' nagyobbra, p. o. a' β szögletet a' B-re (kép 71); akár a' γ-t a' C re mindég egyközü lessz a' kisebbiknek talpa a' nagyobbikéval; mivel szögleteik egyenlők t. i. külső-belsők; — és igy annak oldalait mindég egyenszeresen mettzi; és igy minden egyenlő szögletekkel által-ellenes oldalok egyenszeresek. — Mondhatok tehát illyen egyenszereket, $\alpha\beta : AB = \beta\gamma : BC$, vagy $\beta\gamma : BC = \alpha\gamma\ AC$. — Már az illyen $\triangle$-öket nevezzük **hasonló $\triangle$-öknek.** Arra tehát, hogy két $\triangle$ hasonló legyen, csak annyi szükséges, hogy a' megfelelő szögleteik egyenlők legyenek; és ekkor ezeknek egyenlő szögleteikkel által-ellenes oldalaik bizonyosan egyenszeresek.

Következet. A' $\triangle$-ök hasonlatosságokuak arra veszszük hasznokat, hogy azoknak segitségökkel valamelly esmeretlen vonalat kikereshetünk, **Arany regula** által p. o. ha az ABC $\triangle$-nek (kép 71). BC oldalát nem esmerném; de tudnám hogy hasonló hozzá az $\alpha\beta\gamma$ $\triangle$, 's ennek oldalait esmérném: csak egy oldalát esmerjem az ABC $\triangle$-nek; p. o.

az AB-t: mindjárt kikereshetném a' BC-t egyenszeresen igy: — $\alpha\beta : = AB = \beta\gamma : BC = x$.

§. 51 Állitmány. A' Karikák kerületeik ugy vannak egymáshoz, mint azoknak Küllőik, vagy Közép-szelőik. (kép 72)

Megmutatás. Csinálván egyközü karikákat: húzzunk azokba két két Küllőt minél közelebb egymáshoz, azért hogy a' köztök eső karélyok minél közelebb lévén egymáshoz, szinte egyenes vonalok gyanánt nézethessenek. Itt formáltatnak hasonló △ ök: Cei, — Cdk, — Cfl; mert a' talpaik egyközüek: és igy mondhatok bennök illyen egyenszert. — Ce : ei = Cf : fl; vagy Ce : Cf = ei : fl; az az: a' mint van egyik karikának küllője a' maga kerületének egy bizonyos részéhez: ugy van a' másiknak Küllője a' maga kerületének megfelelő részéhez. — Már a' megfelelő részek helyet lehet tenni nagyobb megfelelő részeket; sőt lehet mindeniknek egészét tenni, t. i. az egész kerületeket. — És igy n' mint van az egyiknek Küllője a' mága kerületéhez: úgy van a' másiknak is Küllője a' maga kerületéhez. — És mivel a' Küllők a' középszelőknek felei: tehetem a' Küllők szere helyett a' közép szelök szerét: és igy lessz az egyenszer: — a' mint van az egyik karika közép szelöje a' maga kerületéhez: ugy van a' másik karikának is közép-szelöje a' maga kerületéhez. — Ha tehát tudnánk egy valamelly karikában azt, hogy micsoda szerben van annak közép-szelője a' maga kerületéhez: akkor arany regula által akármelly karikának középszelöjéből kikereshetnénk annak kerületét. — De ezt pontosan kikeresni bajos. — Archimedes szerént úgy van a' közép szelö a' maga kerületéhez mint 7 : 22. — Ha hát meg akarnám tadni, hogy egy 50 lábnyi közép-szelöjü karikának hány lábnyi a' kerülete: illyen egyenszerrel keresném ki: 7 : 22 = 50 : x.

§. 52. Feladat. Valamelly egyenes veoalt skárhány egyenlő részekre osztaui. (kép 73).

Megfejtés. Huzván egynehány egyközü vonalokat egymástól egyenlő távolságra; az elosztandó vonalat czirkalomra veszem; — a' czirkalom egyik szárát pedig annyidik egyközühöz teszem; a' hány részre kell azt felosztani. — A' közbe eső egyközüeknél egyenlő részekre lessz felosztva;

p. o. most fel van osztva 4 részre, — mert az ab éppen $\frac{1}{4}$ része az ae-nek, mivel △ab1 ∽ △a4e, mivel a' talpaik egyközüek, — és igy mondhatok illyen egyenszert: a1 : a4 = ab : ae; — már pedig az a1 = $\frac{1}{4}$ része az a4-nek; és igy az ab-is az ae-nek. — Igy a' többi osztályokról is.

§. 53. **Feladat. Valamelly vonalt egy másik vonal részeivel egyenszeresen, vagy egyenszeres részekre osztani.**

Megfejtés. A' nagyobbik vonalat, akár az legyen a' már felosztott; akár nem: letévén Talpúl, csinálok rá egyenoldalú △-t; a' kisebbik vonalt pedig ezen △ két oldalára, a' hová lehet leteszem, de a' talpal egyközüleg; — ekkor a' tetőből a' már elosztott vonal' osztaly-pontjain keresztül vonalat húzok; és ezek a' másik vonalat egyenszeresen osztják el, ugy hogy (kép 74). a1 : ab = c3 : cd, és b2 : ba = d4 : dc.

Megmutatás. 1) Azt állitom, hogy △edc egyenoldalú; mert △edc ∽ △eab — mert a' talpaik egyközüek, és igy mondhatok illyen egyen-szert. „ec : ae = cd : ab, — vagy ea : ab = ec : cd; — már pedig ea = ab, és igy ec = cd; — hasonlóul: — eb : ab = ed : cd. — már eb = ab, és igy ed = cd, és igy △ecd egyenoldalu. — Mar az egyenoldalu △-ben egyik oldalt lehet a' másik helyett tenni.

2) Hogy pedig helyes lessz ezen egyen-szer „a1 : ab = c3 : cd megmutatom igy: — bele esnek ezen két △-be, az ea1, és ec3 △-ökbe: — ezen △-ök pedig hasonlók, mert a' talpaik egyközüek: és igy áll illyen egyen-szer, a1 : ae = c3 : ce, vagy ae helyett ab-t, — ce helyett cd-t tévén, igy lessz: a1 : ab = c3 : cd. — Hasonlóul, hogy helyes ez az egyen-szer „ba : b2 = cd : d4, vagy: b2 : ba = d4 : cd éppen az előbbi módon lehet megmutatni, az ed4 és eb2 △-ök hasonlatosságukból. — Ha pedig két rész egyenszeres; a' harmadiknak is egyenszeresnek kell lenni. —

§. 54. **Feladat. Két kiadott vonalhoz, harmadik, (vagy 3-hoz 4-ik) egyenszeres vonalat keresni.** (kép 75).

Megfejtés. Csináljunk egy akár melly nagyságu szögletet: annak alsó szárára tegyük le az első kiadott vonalt $=$ AB, — Felső szárára pedig a' másodikat $=$ CD, ismét az alsó szárára is a' másodikat $=$ BC; — már a' D és B pontokat kössük öszve DB egyenes vonallal, és a' C-ből huzzunk azzal egyközü vonalat $=$ CE: itt a' felső száron lévő DE lessz a' harmadik egyenszeres vonal. —

Megmutatás. $\triangle$ ADB $\backsim$ $\triangle$ AEC, mert talpaik egyközüek; és igy illyen egyenszert mondhatok „ AB : AC $=$ AD : AE, vagy: AB : AC — AB $=$ AD : AE — AD, az az: AB : BC $=$ AD : DE, az az: a' mint van az első vonal a' masodikhoz: ugy van a' második a' DE hez; és az a' harmadik egyenszeres vonal.

Ha pedig a' harmadik vonalhoz kellene keresni negyedik egyenszerest: akkor igy raknám le a' szöglet száraira, — 1-ső lenne az AB, — 2-dik a' BC, — 3-dik az AD, — és 4-dik lenne a DE.

És ha a' keresendő egyenszeres lessz a' legnagyobbik: akkor a' legkisebbik legyen az első, igy tovább. — Egyébbaránt éppen ugy találjuk meg, mint az elsőt. —

ÖTÖDIK CZIKKELY.

A' hasonló Háromszögök' Földmérési esetekre alkalmaztatásuk.

§. 55. Hogy a' Földmérő hasonló $\triangle$-ökkel mérhessen: mindenek előtt Kismértékre (scala) van szüksége. Azt pedig igy késziti: Fel vesz akár mekkora vonalat, p. o. (kép 76). AC, hogy az tegyen neki egy ölet, vagy tiz ölet, 's a' t. Ha ez $=$ 1 öl: ugy egy tized része $=$ A 1 $=$ 1 láb; ha pedig AC $=$ 10 - öl. úgy A 1 $=$ 1 öl. Ekkor keresztbe tévén az AB-t $=$ AC, 's ezt is tiz részre osztván, minden osztályára húz egyközü vonalakat; ezekre ismét húz keresztbe egyközüeket, ugy, hogy az elsőnek egyik vége az AC-nek kezdő pontjára, másik vége pedig a' BD-nek első osztályára essék. Már ezek közt az első $=$ A 9 a' keresztbe fekvő egyközüeket úgy metszi, hogy az első $=$ 1 X, a' B 9-

nek, vagy is az egyölnek $\frac{1}{10}$ része, $=1$ láb; a' második a' $2r = \frac{2}{10} = 2$ láb, a' harmadik $\frac{3}{10}$ rész $= 3$ láb 's a' t. a' kilenczedik $= \frac{9}{10} = 9$ láb. Mert $\triangle A1x \backsim \triangle AB9$, és igy áll ez az egyenszer: $A1 : AB = 1x : B9$; — már pedig az A1 az AB-nek $= \frac{1}{10}$ része; — és igy az 1x is a' B9-nek, vagy az egy ölnek $\frac{1}{10}$ része, az az, $=1$ láb. Igy a' többiről is.

Már ha valamelly vonal Kismértékben éppen annyi, mint egy másik nagy mértékben: az ehez hasonló; — és ha valamelly Képnek minden oldalai Kismértékben akkorák mint a' nagyobb Képnek megfelelő oldalvonalai nagy mértékben: ezen Képek is egymáshoz hasonlók.

§. 56. **Feladat. Két pontoknak A és B, mellyek közt menni nem lehet, de egy harmadik C pontból mindenikhez mehetni, egymástóli távolságukat megmérni.** (kép 77).

Megfejtés A' CA és CB távolságot méresd meg lánczal; — az EF asztalt tedd a' C-felibe, a' C-nek megfelelő pontot Függöny segitségével az asztalon jegyezd meg; 's az Arányzóval (Dioptra) nézvén az A-felé, huzz mellette vonalat, a' meddig mehet az asztalon; — igy a' CB-felé is; — Ekkor a' hány öl lánczal a' CA, végyfel annyit czirkalommal, a' Kismértékedből, 's tedd le a' CA vonalra, p. o. lenne $= C\alpha$; és a' hány öl lánczal a' CB, tégy le annyit Kismértékben a' CB-re $= C\beta$; — kösd öszve az α és β pontokat; 's ekkor az $\alpha\beta$ éppen annyi lessz Kismértékben, mint az AB nagy mértékben; tehát nézd meg mennyi as $\alpha\beta$ Kismértékben.

Megmutatás. Az ABC$\triangle$ oldalait az $\alpha\beta$ vonal egyenszeresen metszi, mert $C\alpha : CA = C\beta : CB$; mert Kismértékben a' $C\alpha$ annyi, mint a' CA nagyban; — és a' $C\beta$ annyi, mint CB. És igy az $\alpha\beta$ az AB vel egyközü; — tehát $\triangle C\alpha\beta \backsim \triangle CAB$. És igy mondok illyen egyenszert: $C\alpha\ CA = \alpha\beta : AB$. az az: valamint $C\alpha$ Kismértékben annyi mint CA nagyban; — ugy $\alpha\beta$ éppen annyi Kismértékben, mint AB nagyban. E. K. M.

§. 57. **Feladat. Két pontoknak A és B, mel-**

lyek közzül az A-hoz menni nem lehet, távolságukat megmérni. (kép 78).

Megfejtés. Letévén az asztalt a' B-nél, éppen a' B pont felett megszúrom az N pontban, — 's az Arányzó mellett vonalat húzok az A felé; Ekkor felveszek egy harmadik pontot a' C-t, 's a' felé is vonalt húzok: — 's megméretvén lánczal a' BC-t Kismértékbe leteszem a' vonalomra = no. Ekkor által viszem az asztalt a' C-hez, úgy hogy az o pont essék a C felibe, és a' BC vonalom, viszszafelé nézvén, az előbbeni állásában legyen; — itt már az Arányzóval huzok az ó-tol az A felé tartó vonalat, — ezen vonal az elébbi állásomból az A-felé huzott vonalat metszi az x-nél; — és azt állitom, hogy nx Kismértékben annyi, mint AB nagy mértékben.

Megmutatás. △onx ∽ △CBA, mert $\angle o = \angle o$ közös; — $\angle n = \angle n$, mert csak azt hoztam által, a' mellyet az elébbi álláspontom csináltam; a' harmadik a' harmadikkal egyenlő tartozik lenni: — és igy a' △-ök hasonlók. Tehát illyen egyen-szert mondok: no : BC = nx : AB. az az, valamint az no Kismértékben annyi, mint a' BC nagyban: úgy az nx Kismértékben annyi mint BA nagyban. E. K. M.

§. 58. Feladat. Két pontoknak A és B, mellyek közzül egyikhez sem lehet menni, távolságukat megmérni. (kép 79).

Megfejtés. Választván két álló pontot a' C és D-t, előbb a' D-be teszem az asztalt, 's az o pontot a' D felett megszúrván, húzok mind az A, mind a' B, mind a' C felé vonalakat, — 's a' CD-t megméretvén lánczal, Kismértékleteszem = on. Ekkor ezekkel a' vonalakkal által viszem az asztalt a' C ponthoz, úgy hogy az n essék éppen a' C-felibe, és a' CD vonal elébbi állásaban legyen. Itten az n-től húzok vonalokat mind az A, mind a' B felé: és a' hol ezen most húzott vonalak az előbbi D pontból ugyan csak az A és B felé húzott vonalokat metszik, az r és s pontokat öszvekötöm; — és ezen rs Kismértékben annyi, mint AB nagyban.

Megmutatás. Ezt megmutathatnám az ABC és rsn △-ök hasonlatosságukból; de még azt nem tudom; mert nem tudom ha vallyon az rs egyenszeresen metszi é az ABC △ oldalait; — vagy más szóval, nem tudom minő szerben van az nr a' CA-hoz, és az ns a' CB-hez; — ezeket kell hát előbb megvi'sgálnom.

1). Hogy az rn minő Szerben van az AC-hez kitalálom az rno és ACB$\triangle$-ökből; mert ezek hasonlók, mivel $\angle n = \angle n$, $\angle Aon = \angle AoC$, mert onnan hoztam által, a' harmadik a' harmadikkal egyenlő; — és igy: $no : CD = nr : CA$; az az, valamint $no = CD$ úgy $nr = CA$, egyik kis mértékben, másik nagyban.

2) Hogy ns minő Szerben van a' CB-hez, kitalálom az nso és CBD$\triangle$-ökből; — ezek is hasonlók, mert $\angle n = \angle n$, $\angle o = \angle o$, mert onnan hoztam által, — a' harmadik a' harmadikkal egyenlő; — és igy $no : CD = ns : CB$; és igy $ns = CD$, egyik kis mértékben, másik nagyban.

3) Most már látni való, hogy $\triangle nrs \backsim \triangle ACB$, mert az rs vonal az ACB$\triangle$-oldalait egyszeresen metszi. És igy mondhatok ilyen egyenszert: $nr : CA = rs : AB$. az az, valamint nr kis mértékben $= CA$ nagyban; ugy rs kicsinyben $= AB$. nagyban E. K. M.

§. 59. Feladat. Hozzá járulható magosságot megmérni. (kép 80).

Megfejtés. 1-ső Eset. Karókkal.

A' CD és EF külümböző magosságú karókat leütjük függönyösön, ugy hogy a' kettő tetejét a' BA Torony tetejével egy vonalban lássuk; — a' BF vagy HE vonalt megmérjük; — itt van két hasonló $\triangle$ t. i. $\triangle ECG \backsim \triangle EAH$, mert $\angle E$ közös. — $\angle G = \angle H$, mert merők, — harmadik harmadikkal egyenlő. És igy áll ez az egyenszer: $EG : EH = CG : AH$. az az: a' mint van a' két karó egymástoli távolsága, — a' kisebb karónak Toronytóli távolságához: ugy van a' két karó magossága közti külömbség, az AH-hoz; melyet igy Szeres-Intézeten megtalálván, még hozzá kell adni $HB = EF$ t, az az a' kisebbik karó magosságát.

2-dik Eset. Asztallal.

Letévén az asztalt függönyös állásban a' C pontnál (kép 81) ezen C pontnak éppen függönyösen felette megszúrjuk az ó pontot, — ettől az arányzó mellett vizerányosan nézünk a' H felé, és a' $CB = OH$ Távolságot megméretjük lánczal, — 's annyit kismértékben leteszünk $= or$, 's ezen r pontra f ggönyt állitunk; — ugyan az o-bol húzunk vonalat a' Torony teteje felé is, és a' mint ezen vonal a' függönyt metszi, az rx vonal kismértékben = HA nagyban; — mert △ orx ∽ △ oHA, mivel < o közös, < r = < H merők, — harmadik harmadikkal egyenlő; — és igy or : oH = rx : HA, az az or = oH, és igy rx = HA. Igy a' HA-t kitalálván hozzá adjuk HB = oC-t, — az az, az o pontnak föld feletti magosságát.

Jegyzék. 2) Ha a' Toronytól a' karókig, vagy asztalig, lánczot nem lehetne vinni: a' már feljebb előadott módokon meg kell mérni azon távolságot.

2) Árnyékbol is lehet hozzá járulható magosságot mérni; — a' mint van valamely karó árnyéka annak hosszaságához: úgy van a' torony árnyéka annak magosságához.

§. 60. Feladat. Hozzá nem járúlható magosságot megmérni. (kép 82).

Megfejtés. Felvévén két pontot C, és D-t a' B irányában, ezeknek távolságukat = CD megmérem, 's leteszem az asztalt előbb a' C-nél; — a' CD-t kis mértékben leveszem = or; — húzok vonalat az A felé is. Ekkor által viszem az asztalt a' D-hez, ugy hogy az r a' D felibe essék; 's húzok az r-ből is vonalat az A felé, 's a' hol ez az előbbenit metszi az x-nél, leeresztek függönyt = xs, és ez kismértékben annyi mint AB nagyban.

Megmutatás. 1) △ xro ∽ △ ADC, mert < r közös, < o = < o, általhozott, harmadik harmadikkal egyenlő. És igy áll ezen egyenszer: ro : DC = rx : DA; az az, valamint ro kicsiben = DC nagyban: ugy rx kicsiben = DA nagyban.

2) △ rxs ∽ △ DAB, mert < r közös, < s = < B merök, harmadik harmadikkal egyenlő. És igy áll ezen egyenszer: rx : DA = xs : AB; az az, valamint rx = DA: ugy xs = AB, egyik kis mértékben másik nagyban.

§. 61. Képrajznak (Ichnographia) neveztetik az olyan rajzolat, mely valamely Térképet, p. o. darab földnek, — erdőnek, szőllőnek 's a' t. képét kis-formában előállitja. — A' képrajznek múlhatatlan tulajdona, az, hogy ennek minden oldalai az eredeti Térképnek minden oldalaihoz hasonlók, — vagy is kismértéknek éppen akkorák legyenek, mint az eredeti Térkép oldalai nagy mértékben; —

igy az egész kis képrajz hasonló lesz az eredeti Térképhez. — A' Képrajz' készitésben, éppen azon munkálatok fordúlnak több izben elő, melyek akkor, midőn valamely egyes vonalat kismértékben előállítunk, p. o. (kép 83). az M Térképnck képrajzát, ugy csinálhatni, hogy letévén az asztalt egy szögletiben az A-nál, néz az ember a' két közelebbi szögletben felállitott poznák felé, 's az A x és A o távolságokat kismértékben az asztalon huzott vonalra leteszi = A x, és A o. — Ekkor viszi az asztalt az o szögletbe, ugy hogy az o pont essék a' szöglet-pont felibe, — 's vissza felé az o A, az A-nak irányoztassék. — Ekkor megmérvén az o r távolságot, azt is kismértékben az asztalra leteszi. — Ekkor az asztalt az r szögletbe viszi az előbbi módon; — 's az r y vonalat letévén, viszi az asztalt az y-ba, 's az x y vonalat letévén; készen van a' Rajzkép = a o r y x, — mellya' nagy Térképhez hasonló. — (Többféle készitéseiről a' Rajzképeknek szóval). —

Jegyzék. Gyakran emlegetjük, hogy el kell indulni valamely ponttól ilyen 's ilyen szöglet alatt. De hogy találja el az ember a' kivánt szögletet? Ezen végre szolgáló szerszam az úgy nevezett Astrolabium, — Szögletmérő, — mely rézből készült fél vagy egész karika, 180, — vagy 360 fokokra van felosztva; 's két Arányzóval felkészitve, — melyek közzül az egyik 1, és 180 fok vonalában meg van erősitve; másik mozogható; az egyikkel egy pont felé nézünk, — a' másikat a' kivánt szöglethez visszük, — 's annak irányában megyünk. (Ennek több formáiról, — Theodolithról, 's a' t. szóval).

§. 62. Állitmány. A' Kerület akármely pontjáról, p. o. C-ről, a' középszelőre függönyösön eresztett Félhúr (Semiordinata) = CD, — a' középszelőből esett két metszék között (Abscissa) középszeres lessz; úgy hogy: AD : DC = DC : DB (kép 84).

Megmutatás. Huzván AC és BC segéd vonalakat, áll itt elő három △, egy legnagyobb ABC, közép ACD, — legkissebb DCB; ezek mind hasonlók egymáshoz, t. i.

1) △ACB ∽ △ACD, mert ∠ACB = ∠ADC, merők, — ∠p. közös, harmadik = o harmadikkal = u — egyenlő

2) △ACB ∽ △CDB, mert ∠ACB = ∠CDB merők, — ∠u közös, harmadik harmadikkal egyenlő, az az s = p.

3) $\triangle ACD \backsim \triangle CDB$, mert $\angle r = \angle t$, merők, $\angle u = \angle o$, $\angle s = p$. És igy az egyenlő szögletekkel általellenes oldalok egyenszeresek; — tehát

$$AD \mid : o\angle : \mid : DC \mid : \angle u : \mid = DC \mid \angle p \mid : DB \mid s\angle \mid .$$

Következet. Két kiadott vonal AD és DB (kép 84). közt középszerest ugy találhatni, ha a' kettőt egymás végébe letévén, felibök, mint középszelő felibe félkarikát csinálok; 's az öszvejövetel pontjáról a' D-ről függönyös Félhúrt ereszteк fel $= DC$; ez lessz a' középszeres.

§. 63. Ha a' merő szegletü $\triangle$-nek (kép 84). ACB merő szögletiből C-ből a' feszes oldalra AB függönyt eresztünk $= CD$: ekkor a' nagyobbik mellékoldal AC középszeres lessz az egész feszes oldal és annak nagyobbik metszéke között: $AB : AC = AC : AD$; — a' kissebbik mellékoldal pedig középszeres lessz az egész Feszesoldal, és annak kisebbik metszéke között: $AB : CB = CB : DB$.

Megmutatás. 1) $\triangle ABC \backsim \triangle ADC$ (lásd feljebb §. 61), és igy áll ezen egyenszer: $AB : AC = AC : AD$, vagy: $v + x : y = y : v$.

2) $\triangle ACB \backsim \triangle CDB$ (lásd feljebb §. 61), és igy áll ezen egyenszer: $AB : CB = CB : DB$, vagy: $v + x : z = z : x$.

Következet: Csináljunk ezen két egyenszerből egyenlitéseket igy:

$$v + x : y = y : v$$
$$v + x : z = z : x$$

$$v^2 + vx = y^2$$
$$vx + x^2 = z^2$$

adjuk öszve ezeket $v^2 + 2vx + x^2 = y^2 + z^2$

Ezen egyenlet első részének gyökere $= v + x = AB =$ a' feszes oldal, és igy ez a' feszes oldal kotzka rangja; — másik része pedig nem egyébb, mint a' két mellék oldal koczka rangja. És igy ez azt teszi, hogy a' feszesoldal négyleg rangja; annyi mint a' két mellék oldal négyleg rangja együtt (lásd lejjebb Pythagoras Állitmányát §. 77).

§. 64. Két vonalnak AB és CB a' karikán kívül eső darabjai DD és EB magoknak az egész vonaloknak viszás szerében vannak. (kép 85).

Megmutatás. Húzván AE és CD segéd vonalokat, lessz $\triangle AEB \backsim \triangle DCB$, mert $<x = <y$, mivel mindeniknek mértéke a' DE karélynak fele; $<B$ közös; és igy harmadik harmadikkal $v = z$. Tehát áll ezen egyenszer: $DB : BC = BE : AB$. — E. K. M.

MÁSODIK RÉSZ.

TERÜLET MÉRÉS.

ELSŐ CZIKKELY.

Az Udvarok' Négyszegitéséről.

§. 65. Területnek (superficies) neveztetik több vonalok által bekeritett 's meghatározott Tér; — mely tehát Hosszúság és Szélesség együtt, de Vastagság nélkül. A' Terület az oldalvonalok számához képpest külömböző formájú lehet; 's formáját tekintve neveztetik Képnek (Figura) p. o. Háromszög, Négyszög, Sokszög, Karika 's a' t.

Azomban a' Területek udvarukat tekintve vagy Lapossak (Superficies planae), mellyek egyenes vonalakban terjednek; — vagy Domborúk (Superficies sphaericae), mellyek görbe vonalokban terjednek. A' Domborúk ismét vagy Hátasok, vagy Völgyesek.

Jegyzék. A' Területek Kerítései és Szögletei méréséről tanultuk a' Vonalmérésben; itt pedig a' Terjedtségmérés második részében t. i. a' Terület-mérésben tanúlni fogunk a' Területek Udvaraikról, és azoknak méréstikről.

§. 66. Minden dolgot hasonfajta mértékkel szoktunk mérni; így a' hosszúságot vagy vonalt vonallal p. o. lábbal, öllel 's a' t. mértük; már a' Területet is Területtel kell mérni; és igy valami meghatározott Területet kell felvenni mértékül. Ilyen mértékül felvett meghatározott Területek ezek: Négyszög-öl, Négyszög-láb, Négyszög-ujj, Négyszög-vonal. — A' □ öl olyan Területecske, melynek mind a' négy oldala egyegy öl; — □ láb, melynek minden oldala egyegy láb 's a' t. Származnak ezek a' vonalmérési mértékekből oly móddal, ha az ottani mértéknek minden pontjára önnön magát keresztbe letétetni képzeljük, p. o. □ öl származik úgy, ha egy ölnyi vonalnak minden pontjára keresztbe merő szögletre, ugyan csak egy ölnyi vonalat leteszünk; vagy ha 10 lábnyi vonalnak mindenik lábjára ugyan csak 10 lábnyi vonalat leteszünk; — vagy számitás szerént származnak úgy, ha a' vonalmérési mértéket magát magával szorozzuk, p. o. egy □ ölben lesz tehát 100 □ láb, — egy □ lábban 100 □ újj 's a' t.

Már valamely Terület' megmérésében mindég azt keressűk, valjon hány □ öl, vagy □ láb 's a' t. telne abból ki, — vagy lehet abban? Mely munkálatot igy fejezünk ki: a' Terület' udvarát négyszögiteni (aream quadrare).

§. 67. Nyilván való, — vagy már bebizonyitott Állitmányok:

1) Az egyenlő △-öknek udvaraik is egyenlők.

2) Minden Egyközény Általóval két egyenlő △-ökre osztatik.

3) És igy akármely △-t úgy lehet nézni, mint felét egy olyan Egyközénynek, melynek Talpa és Függönyös magossága a' △-éivel egyenlők.

4) Minden Sokszögöt (Polygonum) Általlókkal több △-ökre lehet hasitani.

5) Minden rendes Sokszög a' Székpontból szögleteibe húzott vonalakkal annyi egyenlő △-ökre osztatik fel a' hány oldala vagy szöglete van.

6) A' rendes Sokszök annyival közelebb jár a' Karikakerülethez, minél több oldala van; — és igy a' Karikát ugy nézhetni, mint számtalan sokoldalú Sokszögöt.

§. 68. Feladat. Akármely rendes Sokszög' Szögleteinek Summáját kikeresni. (kép 86).

Megfejtés. Mivel a' hány oldala van a' Sokszögnek, annyi egyen-száru △ telik belőle, melyeknek mindeniknek háromszögletei együtt $= 180$ fok: tehát a' 180-t szorozzuk az oldalok számával; ekkor a' Székpontnál eső szögletek summáját $= 360^{\circ}$-t vegyük ki az előbbi summából, — 's a' maradék lessz a' Sokszög szögleteinek summája: p. o. az Ötszög szögletei' summáját igy keresem ki: $180 \times 5 = 900$; és $900 - 360 = 540 =$ a' szögletek summája.

Következet: Ha a' Szögletek summáját elosztjuk annyival a' hány szögletü a' Sokszög: akkor kijön egyegy Szöglet' mennyisége, p. o. az Ötszögé $\frac{540}{5} = 108^{\circ}$. — A' Hatszögre nézve summa $180 \times 6 = 1080 - 360 = 720$, és egyszöglet $= \frac{720}{6} = 120$.

§. 69. Állitmány. Az olyan Egyközényeknek, melyeknek Talpuk és függönyös magosságuk vagy ugyan az, vagy egyenlő, — udvaraik is egyenlők. (kép 87).

Megmutatás. Az AF és CF Egyközények udvaraik egyenlők. Mert:

1) △AEC = △BFD a' második próbán, t. i. AE = BF, és EC = FD, mert Egyközük közt Egyközük, — $\angle o = \angle s$, mert egy harmadikkal az r-el mind ketten egyenlők, mint visszások vele.

2) Ha ezen két egyenlő △-től ugyan azt elveszem t. i. a' BGC △-t = x: a' maradékok egyenlők lesznek, t. i. az AEGB oldalmás (Trapezium) = CGFD oldalmással vagy z = t.

3) Ha ezen egyenlő oldalmásokhoz ugyan annyit adunk, t. i. EFG △-t: ismét egyenlők lesznek, az az ABEF = CDEF, vagy AF Egyközény = CF Egyközény.

§. 70. Állitmány. Az egyenlő Talpú és magosságu Háromszögök udvaraik is egyenlők, ADB = ACB. (kép 88).

Megmutatás. 1) Ugyan is huzván az AD oldallal egyközü BE-t, — és BC-vel egyközü AF-t, — 's feljül az öszvefoglaló FE vonalt: származnak itt két Egyközények FB és AE; melyeknek udvaraik egyenlők, mivel Talpuk és magosságuk egyenlők.

2) És igy ezeknek Feleik is egyenlők. Fele pedig az FB-nek = △ACB — az AE-nek pedig = △DAB, mert az Általló az Egyközényeket két egyenlő △-ökre osztja. — És igy △ACB = △ADB.

Jegyzék. A' Vonalmérésben egyenlő △-ök azok, melyeknek minden megfelelő oldalaik és szögleteik egyenlők. A' Területmérésben pedig egyenlő △-ök azok, melyeknek udvaraik egyenlők. A' vonalmérési tekintetben egyenlő △-ök, Területmérési tekintetben is egyenlők; de a' Területmérési tekintetben egyenlők, nem szükségképpen egyenlők vonalmérési tekintetben is.

Következet. 1) Ha egy △-nek és egy Egyközénynek Talpuk és magosságuk egyenlő: ugy a' △-udvara éppen fele az Egyközény udvarának; és az Egyközény udvara éppen kettőzete a' △-ének.

2) Ha az Egyközény vagy △ Talpát több egyenlő részekre osztjuk; és azon osztály pontokra a' felső Talpról vagy a' Tetőből vonalakat eresztünk: el fog az osztatni ugyan annyi egyenlő Egyközényekre vagy △-ökre (kép 89). △ADB = △ADE = AEC, mert talpaik és magosságuk egyenlők.

§. 71. Feladat. Külömbféle Területeket Négyszögiteni.

Megfejtés. 1) Az Egyközényeket: Mivel ezeknek származásukat ugy képzelhetni, mintha a' Talp, vagy a' Talpon elnyuló négyszög területetskék bizonyos magosságra, akár egyenes (Négyleg és Párlag), akár dült (Ferde Négyleg, Ferde Párlag) állásban egymásra rakodnának: tehát az Egyközények udvara kijön, ha a' Talpot a' függönyös magossággal szorozzuk. — Különösön a' Négyleg (quadratum) udvara kijön, ha annak egy oldalát magát magával szorozzuk.

2) A' △-öket Négyszögíteni. Mivel a' △ az Egyközénynek fele: annak udvara kijön, ha a' Talp és magosság szorozatjának felét vesszük; — vagy ha az egyik szorozónak előre felét vesszük, p. o. ha fél-talpát egész magossággal, vagy fél-magosságot egész talpal szorozunk.

3) Az Oldalmásnak és rendetlen Sokszögnek udvara kijön, ha a' bennök Általlókkal formálható △-ök ud-

varait kikeressük és öszve adjuk. (kép 90. a:); — p. o. $\triangle$ ABC + $\triangle$ BCD = DA Oldalmás; hasonlóul (kép 90. b,) $\triangle$ ABC + $\triangle$ ACE + $\triangle$ ECD = rendetlen Sokszög.

§ 72. Az Egyközényekben és $\triangle$-ökben tehát az Udvar = Szorozat, — a' Talp és magasság pedig Szorozók. Ha tehát kiadják az Udvart és a' Talpat, kitalálhatjuk a' magosságot; — vagy ha kiadják az Udvart és magosságot, kitalálhatjuk a' Talpot; t. i. az Udvart mint Szorozatot elosztjuk a' kiadott Szorozóval, 's kijön a' másik Szorozó, melyet a' háromszögre nézve kétszer kell venni. (kép 91).

§. 73. Valamely Szorozatnak Szorozói helyett többféle Szorozókat lehet tenni; 's e' szerént ugyan azon udvart többféle formára lehet változtatni, p. o.

1) Az Egyközényt (kép 92). Háromszöggé, ha megmaradván a' Talp, a' Magosságot tesszük két annyivá (kép 93); — vagy megmaradván a' Magosság a' Talpat teszszük két annyivá (kép 94).

2) A' $\triangle$-et (kép 95). lehet változtatni egyenlő udvarú Egyközénnyé, ha vagy megmaradván a' Talp, felényivé lessz a' Magosság, (kép 96, a,); — vagy megmaradván a' Magosság felényivé lesz a' Talp. (kép 96, b.).

3) A' Párlag-ot Négyleggé, középszerest keresvén annak két oldala között, 's azzal csinálván Négyleget. — Igy a' Négyleget Párlaggá 's a' t.

§. 74. Feladat. Valamely Egyközényt akármely kiadott Pontból két egyenlő részekre osztani, p. o. (kép 97). AD Egyközényt az E pontból.

Megfejtés. Húzván az AD és BC általlókat, ezeknek mettzés pontján az F-en keresztül húzok az E-ből egyenes vonalat = EG; ez az Egyközényt két egyenlő részre osztja.

Megmutatás. 1) $\triangle$ 2 = $\triangle$ y, a' harmadik próbán, t. i. DC = AB; — $<$ FCD = $<$ FBA, — és $<$ CDF = $<$ FAB, mert viszszások.

2) $\triangle$ 1 = $\triangle$ z a' harmadik próbán, t. i. FC = FB (az előbbi $\triangle$-ök egyenlőségéből); — $<$ EFC = $<$ BFG, hegyellenesek; $<$ ECF = $<$ GBF, visszások.

3) $\triangle 3 = \triangle x$, mert $GF = FE$, és $DF = FA$, — a' közbe eső Szögletök hegyellenesek.

4) És igy ha $\triangle\triangle 1 + 2 + 3 = \triangle\triangle x + y + z$: tehát $CDGE = GBAE$. Vagy az Egyközény két egyenlő részre van felosztva.

§. 75. Feladat. Oldalmást két egyenlő részre osztani. (kép 98).

Megfejtés. 1) Az AD Oldalmást CB Általlóval elosztjuk két $\triangle$-re, u. m. ACB és BCD-re; de ezek nem egyenlők; és igy a' nagyobbikból adni kell valamit a' kissebbikhez. De kérdés mennyit szakasszunk hozzá?

2) Mérjük fel mindenik $\triangle$-et: lessz az $ACB = 10 \times 3,6 = \frac{36}{2} = 18$; — a' CBD pedig lessz $= 10 \times 5 = \frac{50}{2} = 25$. — Külömbség $= 25 - 18 = 7$; Félkülömbség $= 3,5$.

3) Ha a' félkülömbséget a' nagyobbiktól elszakasztanám 's a' kisebbikhez toldanám: akkor egyenlők lennének t. i. mindenik lenne $= 21,5$.

4) Ezen félkülömbséget 3,5 leteszem $\triangle$ formában, melynek Talpa legyen a' $CB = 10$; De valjon mi lessz azon $\triangle$ magossága? Megtudom ha a' lejendő Udvart $= 3,5$ elosztom a' Talpal, t. i. 10-zel, 's a' mi kijön kétszer veszem, — vagy ha a' 10-nek felivel elosztom, $= 5 \mid 3,5 \mid = 0,7$. — Ezen 0,7-val, mint magossággal $= HG$, csinálok $\triangle$-t $= CGB$, melynek udvara $= 0,7 \times 5 = 3,5$. — Ha hát ezen CBG $\triangle$-et hozzá adom az ACB-hez lessz: $ACGB = GDB$. — 'S igy az oldalmás két egyenlő részre van osztva.

§. 76. Állitmány. A' rendes Sokszög' Udvara kijön, ha annak keritése, a' benne formáltatható $\triangle$-ök magosságának felével szoroztatik.

Megmutatás. Minden rendes Sokszögöt annyi egyenlő $\triangle$-ökre lehet osztani, a' hány oldala van. Ezek közzül egynek egynek udvara kijön, ha a' Talpot fél magossággal szorozzuk; a' Talp legyen $= b$, — magasság $= a$, — udvar $= \frac{ab}{2}$. Már a' hány ilyen $\triangle$ van; ezt annyiszor vegyük; p. o. az Ötszög udvara lessz $= \frac{5ab}{2}$ Ezt, mint szorozatot elszaggathatni többképpen szorozókra, p. o. $5b \times \frac{a}{2}$; már 56 = öt oldal, vagy az egész kerités: és igy az udvar kijön, ha az egész keritést, a' formálható △-ök félmagosságával szorozzuk.

§. 77. **Állitmány.** A' Karika udvara ki jön, ha a' kerités, Félküllővel, vagy Negyedrész középszelővel szoroztatik.

Megmutatás. A' Karika nem egyébb, mint végtelen sok oldalu Sokszög, melynek minden oldala egy egy pont; és igy az ebben formálható △-ök oldalai öszve esnek, — 's magosságuk is annyi mint az oldal, = egy küllő. És igy itt a' kerületet fél küllővel, vagy $\frac{1}{4}$ középszelővel kell szorozni, hogy az udvar kijőjjön. Tehát a' Karika udvarát igy fejezhetni ki $= \frac{pd}{4}$.

Következet. Ezen $\frac{pd}{4}$-t, mint szorozatot többképpen lehet szorozókra szaggatni, p. o. $p \times \frac{d}{4}$, $\frac{p}{4} \times d$, $\frac{p}{2} \times \frac{d}{2}$, mellyek közzül egyiket Talpá, másikat Magossággá tévén, formálhatunk a' karika helyett vélle egyenlő udvarú Egyközényt; — vagy pedig egyiknek kettőzetét vévén, Háromszögöt, p. o. $p \times \frac{d}{4}$ ezzel △ lessz úgy, ha talp lessz az egész kerűlet, magosság pedig $\frac{d}{2}$ = küllő; és igy egy olyan △, melynek Talpa az egész Kerület, — magassága pedig a' Küllő, egyenlő udvarú a' karikaval.

Jegyzék. E' szerént lehetne a' Karikát Négyszögitni. De mivel a' Középszelőnek a' Kerülethez való Szere nem tökélletes (7 : 22, vagy 100: 314 's a' t.); és igy mivel a' Kerületet tökélletesen kitalálni nem lehet: tehát a' Karikát sem lehet tökélletesen négyszögiteni.

Következet. A' Gerézd (kép 99). udvara ki jön, ha a' talp karély, fél küllővel szoroztatik.

§. 78. **Állitmány.** A' merő szögletü △-ben a' feszes oldallal formálható Négyleg annyi, mint a' két mellék-oldalokkal formálható Négylegek együtt. (kép 100).

Megmutatás. A' BE Négyleggel egyenlőt csinálok feljül a' KC-t. — Az IH és NM oldalokat addig nyujtom, mig öszve nem érnek az F-nél. Innen az A-n keresztül függönyt bocsátok le a' G-ig. Most az FG vonal mellett két felől formáltattak három három Egyközények, melyek egymással egyenlők. Nevezetesen:

1) GB = FB, mert talpuk és magosságuk egyenlő. Ugyde NA is = FB, mert talpuk és magosságuk egyenlő. És igy BG = NA.

2) GC = FC, mert talpuk és magosságuk egyenlő. Ugyde HC is = FC, mert talpuk és magosságuk egyenlő. És igy HC = GC.

3) HC = GC } és igy HC + NA = GC + GB = BE. az az
NA = GB } a' két mellékoldal Négylege = Feszes oldal Négylege.

Jegyzék. Ezen Állitmányt feltalálta Pythagoras, a' kiről neveztetik Theorema Pythagoricumnak; — vagy a' Geometriabeli sok hasznától Magister Matheseosnak. (Más megmutatását szóval).

Következet. 1). A' merő szögletű △-ben, ha két oldalt kiadnak: kitalálhatjuk a' harmadikat, p. o. legyen a' feszes oldal = a, — az egyik mellék oldal = b, — a' másik = C: lessz; $a^2 = b^2 + c^2$. Már $a^2 - b^2 = c^2$, és $a^2 - c^2 = b^2$. — Ha kiadják a' két mellék oldalt, kikeresem a' feszes oldalt igy: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; — A' feszes oldalból és egyik mellék oldalból a' másik mellék oldalt igy: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, és $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2) Két vagy több Négyleg helyett egy Négyleget, melynek udvara amazok udvaraival mind öszve egyenlő legyen, ugy lehet csinálni, ha előbb a' kettőnek egyegy oldalát a b és b c (kép 101). letesszük merő szögletre: — 's kihuzván a' feszes oldalt = c a azzal Négyleget csinálunk: ez annyi lessz, mint a' másik két Négyleg együtt. — Ehez ismét a' harmadiknak oldalát merő szögletre tesszük, 's kihuzván a' feszes oldalt, azzal □-et csinálunk, mely már annyi lessz, mint a' három' udvara együtt. — Sőtt igy több Négylegek udvarait is egy Négylegbe öszve lehet szedni.

MÁSODIK CZIKKELY.

Az Udvarok' Szereiről.

§. 79. Állitmány. Két Egyközények udvarai, az ő Magosságaik Szeréből öszvetett Szerben vannak egymáshoz. (kép 102).

Megmutatás. Legyen az egyik Egyközény' magossága $=$ A, talpa $=$B; — ennek udvara lessz $=$ AB; a' másik Egyközény' magossága $=$ a, talpa $=$ b: udvara $=$ ab. — Ezeknek udvaraik tehát igy vannak egymáshoz: AB : ab. Ugyde ez olyan öszvetett Szer, mely ezekből az egyszerüekből van öszvetéve:

A : a, az az a' magosságuk Szeréből,

és A : b: — talpuk Szeréből.

AB : ab.

p. o. legyen A $=$ 5, B $=$ 4, a $=$ 3, b $=$ 2

leszneк az udvarok: 5 : 3

4 : 2

20 : 6.

mert valósággal az egyik udvara $=$ 20, a' másiké $=$ 6.

Következet. 1) Ha két Egyközényeknek talpaik egyenlők, akkor az udvaraik ugy vannak egymáshoz, mint magosságaik; — vagy ha a' magosságaik egyenlők; akkor az udvaraik ugy vannak egymáshoz mint a' talpaik. Mert ha az egyik Szernek mind a' két tagja ugyan az; akkor a' másik Szernek mind elsőjét, mind utolsóját ugyan azzal kellene szorozni; — ez által pedig a' Szer nem változik; — és igy kár volna szorozni: p. o. legyen A $=$ 5, B $=$ 4, a $=$ 3, b $=$ 4

lesznek az udvarok 5 : 3

4 : 4 vagy

20 : 12 $=$ 5 : 3

2) Két Háromszögöknek udvaraik is az ő magosságaik Szeréből és Talpaik Szeréből öszve tett Szerben vannak egymáshoz. Azoknak udvaraik is $\frac{AB}{2}$ és $\frac{ab}{2}$; és igy ugy, vannak

egymáshoz mint $\frac{AB}{2} : \frac{ab}{2}$. Ugyde ha a' Szernek mind a' két tagját ugyan azzal szorozom : a' Szer nem változik ; — szorozom hát kettővel: 's ugy lesznek a' △-ök udvaraik is egymáshoz, mint AB : ab. Mely Szer ezen egyes Szerekből van öszve téve:

A : a — az az Magosságuk Szere
B : b — az az Talpuk Szere.

AB : ab

És ha vagy a' Talpak, vagy a' Magosságok egyenlők : akkor csak az egyiknek Szerében vannak egymáshoz az udvarok.

§, 80. **Állitmány.** A' **középszelő Négylege** (**vagy Négyleg rangja**) **úgy van a' Karika udvarához, mint a' középszelő a' Kerület Negyedrészéhez,** $7 : \frac{22}{4}$ (kép 103).

Megmutatás. A' Középszelő Négylege $=$ CB, — ennek fele $=$ FB, ezt ha kétszer nyujtom egymás végibe FB $+$ BK $=$ FI. És az FI Párlag, tehát teszi a' Középszelő Négylegét. — Már ha csinálok egy olyan Párlagot, melynek Talpa legyen a' karika fél kerülete egyenes vonalban $=$ FH, — magossága pedig egy Küllö $=$ EO: ennek udvara lessz $= \frac{p}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{pd}{4}$: ez éppen a' karika udvara. Itt tehát az FG Párlag mutatja nekem a' karika udvarát. — Ha tehát azt akarom megtudni: minő Szerben van a' középszelő Négylegének udvara, a' karika udvarához: csak azt nézem meg, hogy az FI Párlag, az FG Párlaghoz minő Szerben van. — Ezen két Párlagok magossága ugyan az: és igy az udvaraik úgy vannak egymáshoz, mint a' Talpaik: FI : FG $=$ FK : FH, az az. a' Középszelő Négylege, úgy van a' karika udvarához: mint két középszelő a' félkerülethez, vagy mint egy középszelő a' negyedrész kerülethez; és igy számokban Archimedes szerént: $7 : \frac{22}{4}$, vagy néggyel mind két tagját szorozván: 28 : 22, vagy kettővel elosztván: 14 : 11.

Más megmutatás. A' Karika udvara $= \frac{pd}{4}$, — a' Középszelő Négylege $= d^2$. És igy, úgy van a' Középszelő

Négylege a' karika udvarához, mint $d^2 : \frac{pd}{4}$, vagy a' Szer mind két tagját elosztván d-vel: mint $d : \frac{p}{4}$, mint $7 : \frac{22}{4}$, $28 : 22$, — $14 : 11$.

Következet. Ha tehát valamely karikának Középszelőjét tudom: kikereshetem annak udvarát, ezen egyenszeren: $14 : 11 = d^2 : x$. p. o. legyen a' Középszelő 6 öl; — lessz az udvar: $14 : 11 = 36 : x = \frac{396}{14} = 28,\frac{2}{7}$ □ öl.

Jegyzék. Ugyan az udvarnak hosszabb kikeresését láttuk feljebb, t. i. előbb a' Kerületet kikeresni:

$$7 : 22 = 6 : x = 18 + \tfrac{6}{7}.$$

Ezt szorozni fél küllővel, vagy ennek felét egész küllővel,

$$9 + \tfrac{3}{7} \times 3 = 28 + \tfrac{2}{7}.$$

§. 81. A' hasonló Háromszögök udvaraik úgy vannak egymáshoz, mint akár a' magosságaiknak, akár a' Talpaiknak, — sőt akármely szeres oldalaiknak Négyleg-rangjai: $A^2 : a^2$, vagy $B^2 : b^2$'s a' t.

Megmutatás. Tulajdonképpen a' hasonló △-ök udvaraik is csak úgy vannak egymáshoz, mint a' többi △-kéi tudniillik:

$$\begin{array}{lll} A : a & & \text{az az, a' magosságok} \\ B : b & & \text{— és Talpok Szeréből} \\ \hline AB : ab & & \text{— öszvetett Szerben.} \end{array}$$

De mivel itt minden megfelelő oldalok Szere egyenlő; az egyenlő szereket pedig egyiket a' másik helyett lehet tenni:

$$\text{tehát e' helyett } \begin{array}{l} A : a \\ B : b \end{array} \text{ lessz } \left.\begin{array}{l} A : a \\ A : a \end{array}\right\} A^2 : a^2$$

$$\text{vagy } \left.\begin{array}{l} B : b \\ B : b \end{array}\right\} B^2 : b^2$$

p. o. (kép 104). legyen $AD = 6$, $ad = 3$, — $BC = 8$, $bc = 4$: az udvarok ugy vannak, mint

$$\begin{array}{c} 6 : 3 \\ 8 : 4 \\ \hline 48 : 12 \end{array}$$

vagy mivel ezen két Szerek $6 : 3$, és $8 : 4$ egyenlők, egyiket a' másik helyett tehetem.

$$\left.\begin{matrix}6 : 3\\ 6 : 3\end{matrix}\right\} = 6^2 : 3^2 \text{ vagy } \left.\begin{matrix}8 : 4\\ 8 : 4\end{matrix}\right\} = 8^2 : 4^2$$

$$\begin{matrix}36 : 9 & \qquad & 64 : 16\end{matrix}$$

Már látni való, hogy mind egy, akár $48 : 12$, akár $36 : 9$, akár $64 : 16$, mert ezek egyenlő Szerek. — Sőt mind egy akár melyik megfelelő oldalok négylegrangját vegyük, — mert azoknak Szereik is egyenlők, a' Talp és Magosság Szerével, ha hasonlók a' $\triangle$-ök; és igy az egyenlőket egyenlők helyett lehet tenni p. o. (kép 104). a' $\triangle$ ABC udvara ugy van a' $\triangle$ abc udvarához, mint:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}6 : 3\\ 10 : 5\\ \hline 60 : 15\end{matrix} &
\text{vagy: } \begin{matrix}6 : 3\\ 6 : 3\\ \hline 36 : 9\\ \hline 6^2 : 3^2\end{matrix} &
\text{vagy: } \begin{matrix}10 : 5\\ 10 : 5\\ \hline 100 : 25\\ \hline 10^2 : 5^2\end{matrix} &
\text{vagy: } \begin{matrix}8 : 4\\ 8 : 4\\ \hline 64 : 16\\ \hline 8^2 : 4^2\end{matrix}
\end{array}$$

$$\text{vagy: } \begin{matrix}9 : 4\frac{1}{2}\\ 9 : 4\frac{1}{2}\\ \hline 81 : \frac{81}{4}\\ \hline 9^2 : 4\frac{1}{2}^2.\end{matrix}$$

És igy a' hasonló $\triangle$-ök udvarai ugy vannak egymáshoz, mint akármely megfelelő oldalok négyleg rangjai:

Következet. 1) Mivel a' rendes Sokszög' udvara, nem egyébb mint több egyenlő $\triangle$-ök őszvezete; és a' Sokszög helyett csinálhatni olyan $\triangle$-et, melynek talpa a' kerités, — magossága pedig egyegy benne lévő $\triangle$ magossága: tehát, ha két egynemü Sokszögből ilyen $\triangle$-öket formálunk, azok hasonlók lesznek; tehát két egynemü Sokszögök, p. o. két Ötszögök udvarai, ugy vannak egymáshoz, mint a' hasonló $\triangle$-ök udvarai, — t. i. mint akármelyik megfelelő oldalaik Négyleg rangjai, p. o. mint a' Keritésök $\square$ rangjai, vagy mint a' Küllők $\square$ rangjai.

2) Mivel pedig a' karikák nem egyebek, mint igen sok oldalú Sokszögök: tehát két karikának udvara is ugy van egymáshoz; mint a' Kerületeiknek, vagy mint a' Küllőiknek, vagy mint a' Középszelőiknek Négyleg rangjaik, p. o.

legyen az eggyiknek Középszelője $=4$, a' másiké $=2$; amannak udvara, ugy lessz ennek udvarához mint $16 : 4$. — — legyen $D=5$, $d=3$ lessz $C : c=25 : 9$. Egy szóval $C : c=D^2 : d^2$

3) Valamint már a' feszes oldal Négylege annyi, mint a' két mellék oldal Négylege; ugy a' feszes oldal karika udvara: annyi mint a' két mellék oldal karika udvara; az az, ha a' feszes oldallal, mint középszelővel, vagy küllővel karikát csinálok, annak udvara annyi, mint a' két mellék oldallal csinálható karikák udvarai együtt.

4) Innen két karika helyett egyet, melynek udvara a' kettőjével egyenlő legyen, úgy csinálhatni, ha a' kettőnek középszelöjét merő szögletre letévén: feszes oldalt huzunk, 's ezzel mint középszelővel csinálunk karikát, ez annyi lessz, mint a' másik kettő együtt.

§. 82. Feladat. Olyan Hóldforma képnek udvarát Négyszögitni, melynek egyik oldala, valamely karikának Félkerülete: másik oldala pedig valamely nagyobb karika Kerületének Negyedrésze, p. o. BDAE (kép 105).

Megfejtés. Kihúzván a' Hóld felső BDA oldalának két Küllőjét CB és CA-t, 's ezekre függönyösön állitván egy harmadik Küllőt $=$ CF: huzzunk feszes oldalokat $=$ AF és BF, melyek a' Hóld BEA oldalának Kűllői. — Itt formáltatott a' BAF $\triangle$, melynek udvaráról azt állitom, hogy annyi mint a' Holdé.

Megmutatás. Az ACF merő szögletű $\triangle$-ben az AF feszes oldallal formálható karika, annyi mint a' két mellék oldalokkal AC és CF-el formálható karikák együtt; vagy mivel AC$=$CF, mint az AC-vel formálható két karikák. És az AF-el formálható karikának fele, mint az AC-vel formálható egy karika; — és az AF-el formálhatónak $\frac{1}{4}$ része, annyi mint az AC-vel formálhatónak fele. Itt éppen ezen utolsók vannak, t. i. BEAF éppen az AF-el formált karikának $\frac{1}{4}$ része, — BDAC pedig az AC-vel formált karikának fele. És igy ezek egyenlők BEAF $=$ BDAC. — Már ha mind kettőtől elveszem ugyan azt, t. i. BEAC-t, egyenlők maradnak, t. i. egy felől a' BDAE Hóld, más felől $\triangle$BFA, melyek hát egyenlők.

§. 83. Állitmány. Ha az ABC merő szögletü Háromszög minden oldalával fél karikákat csinálunk: származik két Hóld, melyeknek udvaraik együtt, annyit tesznek, mint az ABC △ udvara, $x+z=y$. (kép 106).

Megmutatás. $s+y+v=v+z+s+x$; mert a' Feszes oldal Félkarikája egyenlő a' két mellék oldal Félkarikáival. Már egyenlöket kihagyván: lessz $y=z+x$.

Jegyzék. Ezek neveztetnek a' Chiusi Hyppocrates Holdotskáinak.

HARMADIK RÉSZ.

TÖMEG-MÉRÉS (Stereometria).

ELSŐ CZIKKELY.

A' Tömeg képzelhető Származása, 's különböző Fajai.

§. 84. Tömegnek (Solidum) neveztetik a' Területekkel mindenfelől bezárt Tér. Ha ezen bezárt Tért materiával betöltve gondoljuk: akkor neveztetik Testnek. — A' Tömeg tehát = Corpus Mathematicum; a' Test pedig = Corpus Physicum.

A' Tömegnek háromféle kiterjedése van; u. m. Hoszszúság, — Szélesség, — Vastagság.

A' Tömeg származását úgy képzelhetjük, mintha valamely Terület, egy reá függönyösen allitott vonalnak minden pontjain, akár merően, akár dülösen maga magára rakodnék.

§. 85. Háromféle Szögleteket különböztessünk meg egymástól, u. m.

1) Vonal Szöglet, melyet két vonal formál.

2) Lap Szöglet, melyet két lap formál, p. o. két fal, a' mint öszve jön.

3) Tömegszöglet, melyet több lapok formálnak oly móddal, hogy mindenik lapnak egyegy sarka, vagy vonal-

szöglete, öszve jön csúcsra. Ennek formálására tehát legalább is három lap szükséges; de lehet több is. — A' Tömegszögletet formálni akaró lapoknak sarkaik vagy vonal-szögleteik mind öszve nem mehetnek fel 360 fokra: mert ha annyira mennének, már akkor nem borúlhatnának öszve csúcsra, hanem egyenesen elterülnének.

§. 86. A' Testek, vagy elvonva szóllván a' Tömegek, vagy Formátlanok (asymmetrica corpora), melyeknek oldalaik vagy lapjaik, és szögleteik külömbözők; — vagy Formások (symmetrica), melyeknek vagy minden, vagy legalább az általellenes lapjaik és szögleteik egyenlők.

A' Formások ismét kétfélék:

a) Rendesek (Regularia), melyeknek minden lapjaik egyenlő rendes lapok.

b) Rendetlenek (Irregularia), melyeknek csak az által ellenes lapjaik és szögleteik egyenlők.

§. 87. A' Formás Testek ismét a' szerént, a' mint vagy lapos vagy domború területekkel záratnak be; három rendre osztatnak, u. m.

1) Olyanokra, melyeket minden felől lapok, az az egyenes Területek zárnak.

2) Melyeket minden felől domború Terület zár.

3) Melyeket részént egyenes, részént domboru Terület zár.

§. 88, Az első rendbe tartoznak az Oszlopok, melyek kétfélék: u. m. Szögoszlopok (Prismata) és Hegyoszlopok (Pyramides).

1) A' Szögoszlopok olyan Tömegek, melyeknek minden lapjaik Egyközények, és két talpaik egyenlők, és Egyközük. — Ezeknek származásukat úgy képzelhetni, mintha valamely szögletes Talp, egy keresztbe fektetett vonalnak minden pontjára, ugyan azon nagyságát végig megtartván, lerakodnék. — Ha négyszögü Talp indúl el: az abból származó Szögoszlop neveztetik Négyszögü Szögoszlopnak (Prisma quadrangulare); — ha háromszögü a' Talp, úgy a' Szögoszlop neveztetik Háromszögünek (Prisma Triangulare); — ha a' Talp sokszögü a' Szögoszlop is Sokszögünek neveztetik (Prisma Polygonum).

Az olyan Szögoszlop; melynek minden általellenes oldalai egyközük és egyenlők neveztetik Párlapnak (Parallelepipedon).

Az olyan Szögoszlop pedig, melynek minden oldalai nem csak egyenlők és egyközük; hanem egyszersmind Négylegek, neveztetik Koczkának (Cubus).

2). A' Hegyoszlopok (Pyramides) olyan Tömegek, melyeknek oldal lapjaik Hegypontra öszveborult Háromszögök, — Talpok pedig szögletes lap. — A' szerént a' mint a' talp vagy 3, vagy 4, vagy sokszögü Lap: az oldal is vagy 3, vagy 4, vagy sok; 's a' Hegyoszlopok, vagy Háromszögü vagy Négyszögü, vagy Sokszögü Hegyoszlopoknak neveztetnek. Ezeknek származásukat úgy képzelhetni, mintha a' szögletes talp, a' reá eresztett függöny pontjaira, ugy rakodnék le, hogy felljebb felljebb mindég egyenlő folydogáló Szerben kissebbednék, mig utoljára egy pontban végződnék.

§. 89. A' második Rendbe tartozik a' Golyóbis (Sphaera), mely minden felül domború területtel bezárt Tömeg, mely területnek minden pontja a' közép-ponttól egyenlő távolságra van.

§. 90. A' harmadik rendbe tartoznak a' Henger és a' Kúp.

1) A' Henger (Cylinder) olyan Tömeg, melynek két talpa egyenlő és egyközü karikaterület, — oldalterülete pedig domboru. Származását úgy képzelhetni, mintha a' karika terület, megtartván a' maga nagyságát, magára sorba, lerakodnék. — A' Hengert úgy nézhetni, mint véghetetlen sokoldalu Szögoszlopot.

2) A' Kúp (Conus) olyan Tömeg, melynek talpa karikaterület, oldala pedig Hegypontra tornyodzó domború terület. Származását ugy képzelhetni, mintha a' talp karika úgy rakodnék le maga magára, hogy felljebb felljebb mindég kisebbednék, 's utoljára egy pontban végződnék. — A' Kúpot úgy nézhetni, mint véghetetlen sok oldalú Hegyoszlopot.

§. 91. A' Rendes Tömeg, mint láttuk minden felöl egyenlő rendes lapokkal bezárt Tér. — Rendes lapok pedig ezek: Egyen-oldalú △, — Négyleg, — és rendes sokszeg. — Már rendes Tömeg nem lehet több Ötnél: — a' mint ezeknek származhatásokból nyilván kitetszik. T. i. arra, hogy Tömeg származzék legalább Négy lap szükséges; arra pedig, hogy Tömeg-szeglet, vagy csúcs származzék, legalább három lap kell, de több is lehet; és ezen lapoknak vonal-szegletei nem mehetnek fel mind öszve 360 fokra. Lehet tehát rendes Tömegeket formálni e' következő rendes lapokból:

1) Egyen-oldalú Háromszeg-lapokból.

a) Négyből, melyben a' csúcsot három lap formálja, és a' három szögletek summája = 180°. Ez neveztetik Négylapúnak (Tetraëdron, — ἕδρα = ülőhely, lap).

b) Nyolczból, melyben a' csúcsot négy lap formálja, és a' Négyszeglet summája = 240°. Ez neveztetik Nyolczlapú-nak (Octaëdron).

c) Húszból, melyben a' csúcsot 5 lap formálja, és az öt lap summája = 300°. — Ez neveztetik Húszlapúnak, (Icosaëdron).

Már hat egyen-oldalú háromszeget csucsra öszve tenni nem lehet, mert az tenne = 360 fokot; — és igy egyenoldalu Háromszegből már háromnál több rendes tömeget nem formálhatni.

2) Négyleg-lapokból csak egy rendes Tömeget formálhatni, t. i. a' Koczkát, — melyben a' csúcsot formáló 3 lap szegletei' summája = 270°. — Már négy lap szögletei tennének = 360 fokot.

3) Ötszegü lapokból is lehet egy rendes Tömeget formálni, melyben három lap formálja a' csúcsot, melyeknek szegleteik summája = 108 × 3 = 324°: — 12 lap pedig a' Tömeget, — 's ez neveztetik Tizenkétlapunak (Dodecaëdron). — Már ötszegü lapból négyet csúcsra öszve tenni nem lehet, mert 108 × 4 több 360 foknál. — Hatszegü lapokból még csak hármat se lehet öszve tenni, mert egy egy szöglet = 120°, és 120 × 3 = 360°; — Hatnál többszegü lapokból annyival inkább nem lehet; és igy rendes Tömeg csak ezen öt lehet: Négylapú, Nyolczlapú, Húszlapú: Hatlapú (vagy koczka), Tizenkétlapú.

Jegyék. A' rendes Tömegeket kemény papirosból készitett formákról könnyebb megesmerni, mint rajzolt képekről. —

§. 92. A' Rendes Tömegeket úgy lehet képzelni, mint ha Golyobisból volnának kimetszve: 's igy azoknak közepében van a' Golyobis középpontja. Már ha ezen Tömegek minden csúcs-szegleteitől gondolattal vonalakat huzunk be a' közép pontig: formáltatnak több Hegyoszlopok, melyeknek Talpaik a' Tömeg lapjai, — Hegyeik pedig a' közép pontban mind öszve mennek; p. o. a' Húszlapú áll ilyen 20 Hegyoszlopokból, a' Tizenkétlapu tizenkettőből 's a' t.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' Tömegek megmérése.

§. 93. A' Tömegek mérésében mértékül felveszünk bizonyos nagyságu Koczkát, melynek oldal-vonala egy ujj, vagy láb, vagy öl, — mértföld 's a' t.

Jegyzék. A' kissebb mértékek a' nagyobbakhoz a' mely Szerben voltak a' vonalmérésben; már a' Területmérésben ugyan azon Szernek Négylegében lettek; — a' Tömegmérésben pedig ugyan azon Szernek koczka rangjában vannak; p. o. a' láb az ölhöz a' vonalmérésben ugy van mint 10 : 1, — a' Területmérésben mint 100 : 1, mert 100 □ láb tesz egy □ ölet; — a' Tömegmérésben, mint 1000 : 1, mert 1000 koczkaláb tesz egy koczka ölet. — Igy hat lábbal vévén egy ölet, a' vonalmérésben 6 : 1, a' Területmérésben 36 : 1, a' Tömegmérésben 216 : 1.

Külömbféle Tömegek mérése.

§. 94. A' Koczka Tömege ki jön ha a' Talpterületet, mely az oldalnak Négylege, a' magossággal, mely ismét maga az oldal, szorozzuk, — vagy is ha egy oldalát koczka rangra emelünk.

Akármely Szögoszlopnak, és Hengernek Tömege ki jön, ha a' Talpterületet, a' Területmérési szabályok szerént kikeresvén, azt a' magossággal szorozzuk.

Következet. 1) A' Hengernek karika talpa $= \frac{pd}{4}$; már ha magossága is annyi, mint a' középszelője; akkor a' Tömeg $= \frac{pd \times d}{} = \frac{pd^2}{4}$.

Következet. 2) Mivel a' Tömeg mennyisége függ a' Talptól és magosságtól: tehát az egyenlő talpú és magosságu Tömegek egyenlők.

§. 95. **Állitmány. A' Párlagot Általló-Lappal két egyenlő Háromszegü Szegoszlopokra lehet osztani.**

Megmutatás. A' Párlap ugy származik, ha egy Egyközény terület, mint Talp elindúl, 's maga magára rakodik. — Már az Egyközényt általlóval két egyenlő △-re lehet osztani. Ezen egyenlő két △-ök pedig magok magokra rakodván formálnak két egyenlő háromszegü Szegoszlopot.

Következet. Minden háromszegü Szegoszlopot úgy lehet tehát nézni, mint felét egy olyan Négyszegü Szegoszlopnak, melynek magossága azéval egyenlő, talpa pedig két akkora.

§. 96. **Minden háromszegü Szegoszlopból telik három háromszegü és egyenlő Hegyoszlop.**

Megmutatás. Ha a' háromszegü Szögoszlop csucsaiból az általellenes talpak alsó vonalára ré'sut metsző falat gondolunk: látni való, hogy három Hegyoszlopnak kell belőle kitelni; — és mivel azoknak talpaik és magosságaik egyenlők: tömegeik is egyenlők.

Következet. 1) Minden háromszögü Szegoszlopot tehát úgy lehet nézni, mint egy vele egyenlő Talpú 's magosságú háromszegü Szegoszlopnak $\frac{1}{3}$ részét.

Következet. 2) Minden sokszegü Szögoszlopot feloszthatni több háromszegü Szegoszlopra; p. o. az Ötszegüt ötszegüre; melyek mind három három háromszegü Hegyoszlopokból állanak. És valamint egy ilyen háromszegü Szegoszlopnak $\frac{1}{3}$ része egy benne lévő háromszegü Hegyoszlop: úgy az egész sokszegü Szegoszlopnak $\frac{1}{3}$ része annyi háromszegü Hegyoszlop, a' hány részre amazt felosztottuk; p. o. az ötszögü Szegoszlopnak $\frac{1}{3}$ része öt háromszegü Hegyoszlop, — vagy az abból formálható ötszegü Hegyoszlop. — Általjába tehát minden Hegyoszlop, $=$ $\frac{1}{3}$ része a' vele egyenlő Talpu és magosságu Szögoszlopnak.

Következet. 3) Innen a' Hegyoszlop Tömege úgy jön ki, ha a' talpot $\frac{1}{3}$ magossággal szorozzuk $= \frac{ab}{3}$.

Következet. 4) Az egyenlő talpú és magosságu Hegyoszlopok tömegei egyenlők.

Következet. 5) Mivel a' karika nem egyébb mint véghetetlen sokoldalu Sokszög; és a' Henger = sokoldalú Szögoszlop; — a' Kúp = sokoldalú Hegyoszlop: innen a' Kúp is a' vele egyenlőtalpú 's magosságú Hengernek $\frac{1}{3}$ része. 'S innen a' Kúp tömege kijön, ha a' Talp karika területe $\frac{1}{3}$ magossággal szoroztatik. Az olyan Kúpnak, melynek magossága a' Talp Középszelőjével egyenlő, tömege lessz ez:

$$\frac{pd}{4} \times \frac{d}{3} = \frac{pd^2}{12}.$$

Következet. 6) Mivel a' Golyobist úgy lehet képzelni, mintha végetlen sok kúpokból állana, melyeknek talpaik egyegy pont a' Golyobis felületen; tetejeik pedig mind a' Középpontban jönnek öszve: igy a' Golyobis helyett csinálhatnánk egy olyan Kúpot, melynek talpa lenne a' Golyobis' egész felülete, — magossága pedig egy Küllő; — és ezen Kúpnak vagy is a' Golyobisnak tömege kijön, ha annak felületét a' Küllő $\frac{1}{3}$ részével szorozzuk. — Csak az a' kérdés; hát a' felületet hogy találjuk ki? — Lásd feljebb.

§. 97. Feladat. Csonka Kúp tömegét megmérni. (kép 107).

Megfejtés. A' csonka Kúpot ki kell pótolni egészre; — ekkor az egész Kúp tömegét megmérni; — ismét a' kis pótlék Kúpnak tömegét is megmérni; 's ezt az egész Kúp tömegéből kivenni: ott marad a' csonka Kúp tömege. — De hogy az egész Kúp tömegét megmérhessük: ki kell keresni annak magosságát: Huzván az AE segédvonalat, az ACE, és GCF hasonló △-ökből igy: CE : CF = AE : GF: az az, a' mint van a' csonka Kúp felső és alsó Talpai Küllőik közti külömbség, — az alsó Talp Küllőjéhez: úgy van a' csonka Kúp magossága, az egész Kúp magosságához.

A' kis AGB Kúp magosságát pedig tudjuk, ha a' GF-ből HF-et kivesszük.

§. 98. Feladat. Formátlan test tömegét megmérni.

Megfejtés. A' formátlan testet bele kell tenni valamely edénybe, p. o. hordóba, dé'sába 's a' t., melynek tömegét esmerjük. Ekkor tele kell az edényt tölteni vizzel, homokkal 's a' t. Ekkor ki kell belőle venni a' formátlan tömeget: 's a' maradék vizet meg kell mérni; a' mennyi hilya esett az egész edény tömegének: annyit tesz a' formátlan test. — Vagy ha nagy volna a' formátlan test, p. o. Szobor, 's a' t. — körülte kell csinálni valamely Párlagforma edényt, 's úgy bánni vele mínt mondatott.

§. 99. Feladat. Akármely tömeget Koczkává változtatni.

Megfejtés. Keressük ki a' tömeget a' legkissebb mértékben, p. o. Koczka ujjban. Ebből fejcsünk Koczkagyökeret, 's ez lessz a' lejendő Koczkának egy oldal-vonala.

§. 100. Feladat. A' Tömegek Felületeit megmérni.

Megfejtés. Ez a' Területméрési szabályok szerént könnyü munka p. o.

1) A' Szegoszlopok és Hengerek felülete kijön, ha a' Talp kerítését a' test egész magosságával szorozzúk, 's ehez a' talp terűleteket hozzá adjuk.

2) A' Hegyoszlopok és Kúpok felületök ki jön, ha a' Talp kerítését a' test félmagosságával szorozzuk (mert △-ök); 's ehez a' Talp kerületet hozzá adjuk.

HARMADIK CZIKKELY.

A' Tömegek Szereiről.

§. 101. A' testek tömegüket úgy nézhetni, mint olyan Szorozatot, mely ezen két Szorozókból áll: a' Talpterületből vagy Fenékből és a' test magosságából; — vagy mivel a' Talpterületet ismét két Szorozókra lehet szakasztani: tehát a' Tömegnek három Szorozói lesznek: u. m. hosszúság, — szélesség, — magosság. Látni való tehát, hogy a' testek tömegeik ezen háromféle kiterjedés egyes Szereiből öszvetett Szerben vannak egymáshoz. P. o. Felvévén két Párlapot, legyen az egyiknek a' másikhoz

hosszúsága	8 : 5	40 : 10	
szélessége	5 : 2		40 : 10
magossága	10 : 7		10 : 7
Tömeg	400 : 70		400 : 70 = 40 : 7.

Következet. Ha két testeknek fenekeik egyenlők: akkor a' Tömegek csak a' magosságok egyes Szerében; — vagy ha magosságaik egyenlők, akkor csak a' fenekök egyes Szerében vannak egymáshoz, p. o.

1) Két egyenlő magosságú Hengerek tömegei úgy vannak egymáshoz, mint a' fenekeik karika területei; és igy mint a' Középszelők, vagy Küllők Négylegei. És igy két annyi három négy annyi tömegü, ugyan olyan magosságú Hengert lehet csinálni, csak a' fenék karika területét tegyük két akkorává, oly móddal, hogy a' felvett karika Küllőjét merő Szegletre letévén, feszes oldalt húzunk, 's azzal mint Küllővel csinálunk karikát; — ez lessz két akkora területü, — 's az ezzel csinált Henger két akkora tömegü. Ennek Köllőjéhez ismét az előbbi Küllőt merőszögletre tévén, — 's feszes oldalt húzván, — az ezzel csinálható karika, 's Henger lessz három akkora 's a' t.

2) A' Középszelő Koczkája a' bele gondolt, vagy is ugyan azon magosságú és középszelőjü Henger tömegéhez úgy van, mint a' Koczka feneke a' Henger fenekéhez, (mivel magosságaik egyenlők); — és igy ugy van mint a' középszelő Négylegének udvara a' bele irt karika udvarához; — és igy mint a' középszelő a' kerület $\frac{1}{4}$ részéhez $= 14 : 11$. (lásd felljebb §. 80). — Ugyan ezt igy is megmutathatni: a' középszelő koczkája $= d^3$, a' Henger tömege $\frac{pd^2}{4}$; úgy vannak hát egymáshoz, mint $d^3 : \frac{pd^2}{4}$, — elosztva d^2-val

$$d : \frac{p}{4} = 7 : \frac{22}{4} = 14 : 11.$$

§. 102. Hasonló Tömegeknek neveztetnek azok, melyeknek hosszuságaik, szélességeik, és magosságaik egyenlő Szerben vannak egymáshoz.

Állitmány. A' hasonló Tömegek, p. o. Hasonló Szögoszlopok, Hengerek, Hegyoszlopok, Kúpok úgy vannak egymáshoz, mint akármelyik megfelelő oldaluknak koczkarangjaik, p. o. Hosszúságuk, vagy Szélességük, vagy Magosságuk Koczkarangjaik.

Megmutatás. Mert az egyenlő Szerek közzül egyiket a' másik helyett lehet tenni. Már ha egyiket valamelyiket a' másik kettő helyett is teszem; 's igy szorozom háromszor magát magával, vagy is koczka rangra emelem: abból éppen olyan szer lessz, mintha ama' három egyenlő Szerekből csináltam volna öszvetett Szert, p. o. legyen

Magosságuk	8 : 4	
Hosszuságuk	6 : 3	
Szélességük	10 : 5	
Tömegük	480 : 60	$= 48 : 6 = 8 : 1$.

Ezen két test tömege tehát úgy lessz egymáshoz, mint 8 : 1. De éppen ezen Szer jön ki, ha a' megfelelő oldalok koczka Szerét veszem: $8^3 : 4^3 = 512 : 64 = 8 : 1$

$$6^3 : 3^3 = 216 : 27 = 8 : 1$$

$$10^3 : 5^3 = 1000 : 125 = 8 : 1.$$

Következ. A' Karikák egymáshoz mind hasonlók, mint felljebb láttuk. Már a' Golyobisokat úgy nézhetni, mint karikák summáit: és igy azok is egymáshoz mind hasonlók. Tehát a' hasonló tömegek törvényei alá esnek; — ugy vannak t. i. a' Golyobisoknak tömegeik egymáshoz: mint akármely megfelelő vonaluknak, p. o. Küllőiknek vagy Középszelőiknek koczka-rangjaik.

§. 103. Állitmány. Az ugyan azon talpu és magosságú Kúp, Golyobis és Henger tömegeik úgy vannak egymáshoz, mint 1, 2, 3; az az, a' Hengernek kétharmadrésze a' Golyobis, egy harmadrésze a' Kúp. (kép 108).

Megmutatás. Az aq Egyközényben, melynek magossága két annyi mint szélessége, huzván az rq, rb és aq vonalakat, és az amt félkarikát, képzeljük ezen egész képet az at sarok körül megfordúlni; ezen fordulással származna itt ugyan azon talpu és magosságu test; t. i. egy zbxq Henger, egy Golyobis amte, és egy Kúp az axq: ezen kivül két kis Kúp, zrb és xrq, melyek ketten egyenlők az egy axq-val; mivel fenekük és a' kettőnek magossága, egyenlő az axq fenekével és magosságával. — Már az em vonallal ezen három testet két egyenlő részre osztom, — a' fél kúp lessz a' zrb.

Öszve akarnám tehát hasonlítani egymással ezen három fél testek tömegét. Ugyde ezeket ugy képzelhetem, mintha sok egymásra rakott karika szeletekből állanának. Már a' mint van az egyikből metszhető valamely karika szelet, a' másikból 's harmadikból metszhető megfelelő karika szelethez: ugy vannak a' többi karika-szeletek is egymáshoz; — ugy vannak a' karika-szeletek summái is, — vagy ugy vannak az egész testek tömegei is egymáshoz.

Mettzünk tehát mind a' háromból karika-szeletet, a' fenékkel egyközüleg az u l vonallal. Lessz a' Henger karika szeletjének Küllője $=$ c l; — a' Golyobis karika-szeletjének Küllője $=$ c s; — a' Kúp karika szeletjének Küllője $=$ c n. — Már ezen Küllőket öszverakhatjuk egy merő szögletü △-be, ha az r-től az s-ig vonalat húzunk; — t. i. r s $=$ c l, mert egy harmadikkal, az r m-el mindenik egyelnő; r s $=$ r m, (ugyan azon Golyobis Küllői); c l $=$ r m (egyközüek közt egyközüek); és igy r s $=$ c l, — tehát az r s-et úgy vehetem, mint a' Henger karika Szeletjének Küllőjét. Továbbá az r c-t vehetem a' c n helyett, vagy is a' Kúp karika-szeletjének Küllője helyett; mert r c $=$ c n (megmutatom ezt az r c n és r a b hasonló △-ökből, t. i. a r : a b $=$ c r : c n, — ugyde a r $=$ a b, és igy c r $=$ c n); — a' harmadik oldal c s maga a' Golyobis karika-szeletjének Küllője.

Már □ r s $=$ □ r c $+$ □ c s (Pythagoras Állitm.). — És a' karikák udvaraik úgy vannak egymáshoz, mint a' Küllők Négylegeik. És igy az r s-sel formált karika udvara, annyi mint az r c-vel és c s-sel formált karikák udvarai együtt; — vagy a' Henger karika-szelete, annyi, mint a' Kúp és Golyobis karika-szeletei együtt. És mivel minden szeletek ilyen Szert tartanak: tehát azoknak summáik, vagy az egész testek is igy vannak egymáshoz, t. i. a' Henger tömege annyi mint a' Kúp és Golyobis tömegei együtt. — Mivel pedig a' Kúp a' Hengernek $\frac{1}{3}$ része (lásd feljebb §. 96), innen a' Golyobis a' Hengernek $\frac{2}{3}$ része; vagy is a' háromnak tömegeik úgy vannak egymáshoz, mint 1 $=$ Kúp, 2 $=$ Golyobis, 3 $=$ Henger.

Jegyzék. Ez a' hires Archimedes Állitmánnya, ki is sirkövére Hengert és Golyobist metszetett, melyről Cicero Syracusában sirjára rá akadt.

§. 104. Következetek. 1) Feljebb láttuk, hogy az olyan Hengernek, melynek magossága egyenlő a' feneke középszelőjével; tömege $=\frac{pd^2}{4}$. Már ennek két harmadrésze lessz a' Golyobis Tömege $=\frac{2\,pd^2}{12}=\frac{pd^2}{6}$.

Következet. 2) Azt is láttuk feljebb, hogy a' Golyobis tömege olyan szorozat, melynek egyik szorozója a' Küllő egy harmad része, — másik pedig a' Golyobis felülete. Már az egyik szorozóval, $\frac{d}{6}$-el, a' szororatot $\frac{pd^2}{6}$-t elosztjuk: ki jön a' másik szorozó, t. i. a' Golyobis felülete $= pd$. — Ez tehát ki jön ha a' Golyobison formálható legnagyobb karikának Kerületét a' középszelővel szorozzuk.

Következet. 3) A' Golyobis felülete $= pd$, — a' karika udvara pedig $=\frac{pd}{4}$: és a' Golyobis felülete négy annyi, mint a' benne formálható nagy karika udvara; — vagy annyi, mint a' nagy karika udvara négyszer véve.

Következet. 4) Ha a' középszelő koczkáját öszvevetjük a' Golyobis tömegével: ez lessz a' Szer $d^3 : \frac{pd^2}{6}$, — vagy elosztván d^2-val $= d : \frac{p}{6}$; — Számokban

$$7 : \frac{22}{6} = 42 : 22, = 21 : 11.$$

Ugyvan hát a' középszelő koczkája a' Golyobis tömegéhez : $=$ $21 : 11$. — És ezen Szer segitségével a' középszelőből egyenesen ki lehet csinálni a' Golyobis tömegét: $21 : 11 = d^3 : x =$ Golyobis tömege; p. o. 6 ölnyi középszelőjü Golyobis tömegére nézve ilyen egyenszer áll: $21 : 11 = 216 : x = 113\frac{1}{7}$ koczka öl.

F Ü G G E L É K.

§. 105. Hengermérő Pálczát (Baculus Cylindrimetricus) késziteni.

Hengermérő Pálczának neveztetik az olyan szerszám, melynek segedelmével megtudjuk, hogy valamely kis Henger, hányszor van meg egy nagyobb Hengerben. Ez kétféle, t. i. Kettős és Általlos.

1) A' Kettős igy készül (kép 109). Elő kell venni egy esmert öblösségü Hengert, p. o. egy kantást, vagy egy akost 's a' t. Annak fenék-középszelőjét le kell tenni egy papirosra, p. o. a i; azután a' Pythagoras' Állitmánya segittségével, két akkora fenék-középszelőjét $=$ a 2, azután három akkoráját $=$ a 3, 's a' t. Igy egynehányszorta nagyobbét a' papirosra letévén: fa vagy vas palczára fel kell róni. Már ha ezen pálczával valamely Henger fenekének középszelőjét megmérjük: meglátjuk hányszorta nagyobb azon fenék területe, mint a' mi felvett kis Hengerünk fenék területe. És ha ezen nagy Hengernek magossága éppen akkora volna, mint a' mi kis Hengerünké: akkor amannak tömege, annyiszorta nagyobb volna a' mi kis Hengerünk tömegénél, a' hányszorta nagyobb a' fenék-területe. — De mivel ennek magossága nagyobb: tehát azt is meg kell tudni, hányszor van meg a' kissebbnek magossága a' nagyobbikéban. — E' végre a' pálcza másik oldalára a' kis Henger magosságát egynehányszor le kell tenni; 's azzal a' Henger magosságát megmérvén, ezt a' fenékmértékkel szorozni; akkor jön ki a' Henger tömege, p. o. mutatna a' fenék $=$ 5-t, a' magosság $=$ 3-t: lenne a' tömeg $=$ 15 akos vagy kantás 's a' t.

Mivel a' mi Hordoinknak középen nagyobb középszelőjök van, mint a' feneköké: tehát a' szájoknál is bedugván a' pálczát, az ottani, és a' fenék-középszelő közt középszerest kell venni, 's azt szorozni a' magossággal.

2) Az Általlos Hengermérő Pálcza igy készül (kép 110). Elő kell venni egy ittzés, kantás, vagy akós, csebres 's a' t. Hengert; de ollyat, melynek magossága éppen annyi legyen mint a' feneke középszelője. Ki kell keresni annak általlóját $= a c$-t, a' legkissebb mérrtékben p. o. vonalban, t. i. $a b^2 + b c^2 = a c^2$; és igy

$$a c = \sqrt{a b^2 + b c^2}.$$

Ezt le kell tenni egy papirosra. Már ki kell keresni két ekkora, három, — négy 's a' t. ekkora olyan Hengereknek általlójokat, melyeknek magosságuk akkora, mint a' fenekük középszelője. De miképpen? Tudjuk, hogy a' hasonló testek tömegeik ugy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő vonalaik' — p. o. az Általlóik koczka rangjai; vagy megforditva, az Általlók koczka rangjaik ugy vannak, mint a' tömegek. Ha tehát tudnám p. o. hogy egy akosnak általlója $= 25$ Hüvelyk $= a c$: kikeresném a' két akós általlóját ilyen egyenszeren: $1 : 2 = 25^3 : x^3$. és $x = \sqrt[3]{2 \times 25^3} = a\,2$, — a' három akósét igy: $1 : 3 = 25^3 : x^3$'s a' t. Igy kikeresvén egynehányét lerakom fa vagy vas pálczára; 's készen van az általlós Hengermérő Palcza; de a' melyel csak olyan Hengert lehet mérni, melynek magossága annyi, mint a' Fenék-Középszelője. Ebne ha általlólag bele dugom: megmutatja hányszorta nagyobb a' kis felvett Hengernél.

Lehet azomban ezzel olyan Hengert is mérni, melynek magossága két annyi, mint a' Fenék-Középszelője p. o. rendesen a' Hordók; a' midőn a' Hordó száján a' Fenék aljara dugatván, a' Hordó-Felének öblösségét mutatja, melyet kétszer vévén, ki jön az egész Hordó öblössége. — Vagy pedig a' pálczára fél akós Hengernek általlóját jegyzik 1 akós gyanánt, — 1 akósét 2 akós gyanánt $1\frac{1}{2}$ akósét 3 akós gyanánt 's a' t. 's igy nincs szükség a' kétszer vételre; — ha nem egyszerre megmutatná hány akós a' Hordó, ha hasas nem volna; — de az sok hibát csinál. (kép 111).

HÁROMSZÖG-MÉRÉS.

(Trigonometria).

BÉVEZETÉS.

§. 1. A' Terjedtség-Tudományban, ha valamely △-nek esmeretlen oldalát vagy szögletét ki akartuk keresni: arra nézve mindég még egy másik esmert △-re volt szükség, melyhez ez vagy hasonló, vagy egyenlő vólt légyen. Hát valjon magából ugyan azon egy △-ből, annak akármely oldalát, vagy szögletét ki lehetne é keresni? — Igen is, ki lehet. Mert minden △-ben hat rész van, t. i. három oldal, és három szöglet. Ezen hat részek közzül, ha három kiadatik: egyenszeren negyediket lehet találni. — Ezen munkálódás Háromszög-fejtésnek, (resolutio Trianguli); — a' Háromszögek ilyetén fejtéséről tanitó Tudomány pedig Háromszög-mérésnek (Trigonometria) neveztetik.

§. 2. A' △-ök vagy egyenes területen; egyenes vonalokkal. — vagy domború (hátas vagy völgyes) területen karélyok által formáltatnak, (p. o. Golyobison). — Amazok Egyenes △-öknek (Triangula plana); — ezek Karélyos △-eknek (Triangula Sphaerica) neveztetnek. Már a' Háromszög-mérés mind a' két fajtáknak fejtésökről tanit; 's a'hoz képest két fő részre oszlik; ugymint: 1) Egyenes Háromszögmérés (Trigonometria plana). — 2) Karélyos Háromszögmérés (Trigonometria Sphaerica).

I.

EGYENES HÁROMSZÖGMÉRÉS.

(Trigonometria Plana).

ELSŐ CZIKKELY.

Mire valók, 's melyek a' Szögvonalak?

(Functiones Trigonometricae).

§. 3. Az Egyenes Háromszög-mérés az a' Tudomány, mely az egyenes Háromszög' hat részei közzül kiadatván három, a' többi három részeket kikeresni tanitja.

§. 4. A' kiadandó három részek pedig nem lehetnek mind csupa Szögletek; hanem legalább is egynek oldalnak kell lenni. Mert a' △ mekkoraságát a' csupa szögletek meg nem határozzák; mivel ugyan azon háromszögletek temérdek Háromszegekben lehetnek, melyek ugyan hasonlók egymás közt; de oldalaik végtelenül külömbözők lehetnek. A' Háromszögök mekkoraságát ezek határozhatják meg: 1) vagy három oldal, 2) vagy két oldal és egy szöglet, 3) vagy egy oldal és két szöglet. — Ezek lehetnek hát a' három kiadandó részek.

§. 5. Valjon a' △-ben a' szögletek a' velök általellenes oldalokkal egyenszeresek e'? az az: valjon a' mint van egyik szöglet a' másikhoz, — úgy van e' az elsőbbel általellenes oldal, a' másikkal általellenes oldalhoz? Ha ez igy volna: a' Háromszög-mérésre semmi szükség nem volna, mert a' szögletekből az oldalokat, és viszont, könnyen ki lehetne találni arany regulán. — De ez nem igy van. Mert a' szögletökkel együtt nőnek ugyan az általellenes oldalok: de nem azon Szerben, melyben a' szögletök, p. o. Két akkora szögletnek nem két akkora oldal felel meg, — a' mit láthatni az Egyenszárú merő szögletü △-ben; a' hol egyik mellék oldal nem lehet felényi, mint a' feszes oldal, ámbár felényi szögletnek van általellenében

§. 6. Mivel tehát a' szögletek az oldalakkal nem egyenszeresek; 's ennél fogva a' szögletöket az oldalokból, vagy megforditva, kikeresni nem lehet: gondolkoztak a' Mathematicusok, hogy találhatnának olyan vonalakat, melyeknek mekkoraságuk a' szögletek mekkoraságától függene, és igy mekkoraságukat a' külömböző szögletekhez képest meg lehetne határozni; 's azomban ezen szögletek helyett szolgáló vonalak, az általellenes oldalokkal egyenszeresek lennének? Találtak is ilyen vonalakat; és azokat, mivel a' szögletek helyett szolgálnak, Helytartóknak (Functiones) vagy Szögvonalaknak nevezték.

§. 7. A' Szögvonalak e' következők: (kép 112).

1) Félhúr (Sinus), mely nem egyébb, mint a' Szöglet egyik szára végéről a' másik szárára vagy ha tompa szögletről van szó, annak megnyujtott szárára) eresztett Függöny. — Igy a' DCB<nek Félhúrja =DI, — a' DCL<nek is Félhúrja a' DI; a' honnan láthatni, hogy a' mellék-szögleteknek ugyan azon Félhúrjok van. — Mivel pedig mind egy akár szögletet mondjunk, akár azon karélyt, mely a' <-nek mértéke: tehát a' karélyhoz képpest igy határozzuk meg a' Félhúrt: a' Félhúr nem egyébb, mint a' karély, eggyik vég-pontjától eresztett Függöny azon középszelőre, mely a' karély másik végpontjára húzatik. Igy a' DB karélynak Félhúrja =DI; ugyan csak a' DL karélynak is, mely a' DB-t 180 fokra pótolja ki, Félhurja =DI; és igy az egymást 180 fokra pótoló karélyoknak ugyan azon Félhúrjok van.

§. 8. Valamely <-nek vagy karélynak Félhúrja, nem egyébb mint két annyi karély Hurjának fele. Ugyan is huzzuk ki a' DI-t a' K-ig; a' DI éppen fele a' DK-nak, és a' DB a' BDK-nak, mert a' Székpontból a' húrra függönyös vonal, a' CIB; mind a' húrt, mind a' karélyt két egyenlő részre osztja. (Lásd Terjed. Tudom. §. 33).

Jegyzék. Innen látni való a' Sinusnak helyes neve Félhúr, a' Sinus név is nem a' Diák Sinus=óból; hanem S. ins helyett van; — ez pedig röviditése ennek: Semi-Inscripta = Félhúr.

§. 9. A' Félhúrok a' szögletekkel együtt nevekednek, bárha nem egyenszeresen, egész a' merő szeglet Félhúrjáig, mely minden Félhúrok közt legnagyobb. — A' Tompa Szögletek Félhúrjai annál kissebbek, minél nagyobb a' Tompa Szöglet; t. i. Minden Tompa Szöglet Félhúrja, éppen az, a' mi a' mellék hegyes szögleté, p. o. 170 foknyi Szögleté éppen az, a' mely a' 10 foknyijé, — A' Merő-Szöglet Félhúrja = AC, éppen a' Küllő. Mivel ennél a' többi Félhúrok mind kissebbek, vagy is ennek részei: innen ezt, t. i. a' 90 foknyi < Félhurját, vagy is a' Küllőt, nevezik Fő-Félhurnak, vagy Teljes Félhúrnak (Sinus Totus). — Ha a' Telyes-Félhurt, megtennénk egynek = 1: ugy a' többi <-ek Félhurjait Részletekkel kellene kifejezni. Hogy ezt elkerüljük: gondoljuk a' telyes Félhúrt minél több apró részekből állani, p. o. 10'000,000-ból; — igy osztán a' többieket is épszámokkal fejezhetni ki.

§. 10. 2) Kereszt-Félhúrnak (Sinus versus) neveztetik a' Középszelőnek az a' része, mely a' karély alsó pontjától a' Félhúrig tart, p. o. a' BD karélyé = BI; FB-nek = BG. Ez is a' <-tel együtt nevekedik. — A' merő szöglet kereszt Félhúrja = Küllő. — A' mellék <-teknek ugyan azon Ker. Félhurjok van.

§. 11. 3) Érintőnek (Tangens) neveztetik az a' vonal, mely a' karély egyik pontjára húzott Küllőre függönyös, — a' karélyt egy pontban érinti, — és addig nyúlik, mig a' karély másik pontján a' Székpontból keresztül huzott vonal vele öszve nem ér. Igy a' BD karélynak, vagy a' BCD <-nek Érintője = BT, mely ugyan csak a' DAL karélynak, vagy DCL <-nek is Érintője. Az Érintő is a' <-tel együtt nevekedik; a' merő Szöglet Érintője pedig = ∞, véghetetlen; mert az Érintöt formálni akaró vonal, a' szöglet függönyös szárával Egyközü lévén, vele öszve soha sem ér.

§. 12. 4) Szelőnek (Secans) neveztetik az a' vonal, mely a' Székpontból a' karély felső pontján keresztül húzatván, az Érintő hosszát meghatározza. Igy a' BD karélynak, vagy DCB <-nek Szelője = CT; mely egyszer'smind a' DAL karélynak vagy DCL<-nek is Szelője. — A' Szelő is a' <-tel nevekedik; — 's a' merő <Szelője $=\infty$, — mert az Érintőjével Egyközű.

§. 13. A' mely karélyok, vagy <-tek egymást 90 fokra pótolják ki: azok egymáshoz képpest neveztetnek Pót-karélyoknak; vagy Pót-szögleteknek (angulus, vel arcus Complementalis), p. o. a' BD-nek a' DA, és viszont a' DA-nak a' BD Pót-karélya, a' DCB<-nek az ACD< és viszont az ACD<-nek a' DCB< Pót-szöglete. Mivel pedig a' Tompa szögletek itt egy érteküek azokkal a' hegyesekkel, melyek őket 180 fokra pótolják: tehát valamely szögletnek vagy karélynak Pót-szöglete, vagy Pót-karélya, nem csak az a' <, vagy karély, mely őtet 90 fokra pótolja; hanem egyszer'smind az is, mely az ő pótlékjával egyértekü. Igy p. o. a' 70 foknyi szegletnek Pót-szeglete a' 20 foknyi, és a' 160 foknyi <; — az 50 foknyinak Pót-szeglete a' 40 foknyi, és a' 140 foknyi <. Már a' Pót-szegleteknek, vagy Pót-karélyoknak szögvonalaik egymáshoz képpest kölcsönösen neveztetnek Pót-szög-vonalaknak, u. m. Pót-Félhúr (Cosinus) — Pót-keresztfélhúr (Cosinus versus), Pót-érintő (Cotangens), Pót-szelő (Cosecans), p, o. a' 30 foknyi szeglet Fél-húrja a' 60 foknyi szegletnek Pót-félhúrja; és viszont, a' 60° < Félhúrja a' 30°-nyinak Pót-félhúrja. — Egyiknek Érintője a' másikhoz képpest Pót-érintő 's a' t.

§. 14. Akármely szegletnek Pót-félhúrja ugyan tulajdonképpen az ő Pót-szegletének Fél-húrja: de a' helyett lehet venni magából a' szeglet alsó szárából, a' Székponttól a' Félhúrig eső részt, p. o. a' DCB<-nek Pót-félhúrja a' DE; de e' helyet lehet venni a' CI-t, mert DE = CI, egyközük közt egyközük.

§. 15. Ha az 1°-tól a' 90°-ig minden Szögletöknek szögvonalaik ki volnának számitva, a' szerént, hogy a' Telyes-Félhúr = 10'000,000: ekkor egyszer'smind a' Pót-szögvonalak is tudva volnának, p. o. ha tudnám a' 70° Félhurját: tudnám a' 20° Pót-félhurját is; vagy ha 45 fokig minden Szögletnek Szögvonalait és Pót-szögvonalait kikeresnénk; (úgy a' 45-ön feljül semmi újjat nem kellene keresni; — mert p. o. a' 40° Félhúrja már az 50°-nak Pót-félhűrja; és a' 40° Pót-félhúrja az 50°-nak

Fél-húrja. — Ki is keresgették ezeket a' Mathematicusok nem kevés mesterséggel (melyről mindjárt rövideden szóllani fogunk); 's rendbe öszve szedvén; 's mivel nagy számok, a' Logarithmusokat is melléjök tévén: az ezeket előterjesztő Lapokat nevezik Szögvonalak-rendezetének (Canones Functionum). — Mivel pedig a' Mathematicusok leginkább csak a' Félhúroknak; 's Pót-félhúroknak, és az Érintőknek, 's Pót-érintőknek veszik hasznokat: tehát a' Canonokban csak a' Fél-húrokat, és Érintőket, 's azoknak Logarithmusaikat szokták leginkább feljegyezni; — oly móddal, hogy két mellék Táblák közzül az egyikén lévő valamely szegletnek Pót-szeglete, a' másik Táblán, ezzel egy menetelben van; 's ámbár mindeniknek csak Fél-húrja és Érintője van feljegyezve: de mivel egyiknek Fél-húrja, a' másiknak Pót-félhúrja; — egyiknek Érintője: a' másiknak Pót-érintője igy a' Pót-szegvonalakat is egy tekintettel feltalálhatni, p. o. ha keresném a' 25° Pót-érintőjét, felkeresvén a' 25° a' másik lapon, azzal egy menetelben lévő 65° Érintője lenne a' keresett 25° Pót-érintője.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' Szögvonalak kikereséséről.

§. 16. A' 90° Fél-húrját, az az, a' Teljes-Fél-húrt felosztván 10'000,000 részekre: a' többi $<$-eknek minden Szögvonalait is, ilyen mértékben, Geometriai Szabályok szerént ki lehet keresni; az az megtudni, hogy ez vagy amaz Szögvonalban hány olyan részecske van, mint a' milyen a' Teljes-Férhúrban 10 millio van. — Lássunk például egynehány eseteket.

§. 17. Feladat. A' 30°-nyi szeglet Fél-húrját megtalálni.

Megfejtés. Mivel a' Küllőt hatszor lehet letenni a' kerületre; és igy a' Küllő a' Kerület $\frac{1}{6}$ részének, az az 60°-nak húrja: látni való, hogy a' Küllőnek fele 30°-nyi karélynak, vagy $<$-nek Fél-húrja (mert a' Fél-húr nem egyébb, mint két annyi karélynak fele); — és igy a' 30°-nyi szeglet Fél-húrja Trigonometriai mértékben $= 5'000,000$.

§. 18. Feladat. A' 45°-nyi Szeglet Fél-húrját megtalálni. (kép 113).

Megfejtés. A' 45°-nyi Szeglet Fél-húrja nem egyéb, mint a' 90°-nyi karély húrjának az FK-nak fele $= FG = GK$. Már az FK-t az FCK △-ben, Pythagoras állitmánya szerént kikereshetni igy: $FC^2 + CK^2 = FK^2$; és igy: $FK = \sqrt{FC^2 + CK^2}$. — Vagy mivel az FC is, a' CK is teljes Fél-húrok; a' teljes Fél-húrt nevezvén r-nek; lessz $FK = \sqrt{r^2 + r^2}$. Már ennek fele lessz a' 45°-nyinak Félhurja: és igy 45° Fél-hurja, (vagy a' Fél-hurt S-el fejezvén ki):

$$S\,45° = \frac{\sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{\sqrt{10'000,000^2 + 10'000,000^2}}{2}.$$

§. 19. Feladat. Valamely < Félhurja kiadatván $= AD$: megtalálni annak Pót-félhurját AE (p. o. kiadatván 40° Fél-hurja, kitalálni az 50° Fél-hurját). (kép 113).

Megfejtés. Mivel $AE = DC$; az ADC △-ben $AC^2 = DC^2 + AD^2$, — és $DC^2 = AC^2 - AD^2$; vagy CD kár $AE = \sqrt{AC^2 - AD^2}$, az az a' Teljes-Félhur Négylegéből kivétetvén a' kiadott Fél-húr Négylege: a' maradék Négyleg-gyökere lessz a' keresett Pót-félhur, — $Cos = \sqrt{r^2 - S^2}$. Ilyen móddal, mihelyt egy valamely < Félhurját tudjuk: mindjárt kikereshetjük a' Pótló-szeglet Félhurját, p. o. $S. < 50° = \sqrt{r^2 - S.\,40°^2}$

§. 20. Következet. Ha a' Pót-félhur a' Teljes Félhurból kivétetik: ott marad a' Kereszt-Félhur. $OC - DC = OD$; p. o. 40° Kereszt-félhurja $= r - S. < 50°$.

§. 21. Feladat. Kiadatván valamely Félhur, p. o. AD: ebből felényi Szegletnek Félhurját, az AI-t vagyis IH-t kikeresni. (kép 114).

Megfejtés. Az AI fele az AH, tudniillik a' kiadott Karély-Hurjának; tehát kikeresem az AH-t, az ADH △-ből igy: $AD^2 + DH^2 = AH^2$. És igy $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2}$, és az $AI = \sqrt{AD^2 + DH^2} : 2$, az az, ha a' kiadott Szeglet Fél-hurjának Négylegéhez hozzá adván a' Kereszt-Félhur

Négylegét, ezen öszvezetből □ gyökeret fejtek, 's azt kettővel elosztom: kijön a' felényi Szeglet-Félhurja; (p. o. $15^{\circ} <$ Fél-hurja $=$ S. $< 15^{\circ} = \sqrt{(S < 30^{\circ 2} + \text{Sin. ver.} < 30^{\circ 2})} : 2$. Igy:

$$S. < 35^{\circ} = \sqrt{S. < 70^{\circ 2} + S. \text{Vers.} < 70^{\circ 2} : 2}$$

§. 22. Feladat. Kiadatván valamely < Félhurja, p. o. DG$=$CH: két akkora < Fél-hurját, az EK-t megtalálni. (kép 115).

Megfejtés. Kihúzván az EC hurt; 's a' H metszés pontból huzván HL, és HF Függönyöket: most már:

1) Az EK-nak fele $=$ LK; mert $\triangle$ ELH $\backsim \triangle$ EKC; és igy EH : EC $=$ EL : EK; ugyde EH fele az EC-nek; és igy EL is fele az EK-nak; tehát a' másik fele $=$ LK. — Csak az LK-t kell hát kikeresni, — 's annak kettőzete lessz $=$ EK, az az, két akkora szöglet Félhúrja.

2) Ugyde LK $=$ HF, egyközüek közt egyközüek. És igy csak a' HF-t kell kikeresni.

3) A' HF-t kikereshetni a' BHF és BDG hasonló $\triangle$-ből, ezen egyenszeren: BD : BG $=$ BH : HF. Ugyde BD $=$ Teljes-Félhur, — a' DG $=$ Félhur; — BH $=$ Pót-félhur (a' C-t vévén a' szeglet felső pontjának, a' midőn CH a' Félhur). És igy: r : s $=$ Cos; dim. S. dupli; és innen: dim. S. dupli $= \frac{S. \times Cos}{r}$: és a' két akkora < egész Félhurja lessz $= \frac{(S. \times Cos) \times 2}{r}$. p. o. a' 35° < Félhurjából a' 70°-jét kikeresem igy:

$$S.\ 70^{\circ} = \frac{(S. < 35 \times Cos. < 35^{\circ}) \times 2}{r}$$

§. 23. Feladat. Kiadatván valamely <nek Félhurja, és Pót-félhurja: annak Érintőjét megtalálni (kép 116).

Megfejtés. A' CAD, és CTB hasonló $\triangle$-ben áll ez az egyenszer: CD : DA $=$ CB : BT. Innen BT $= \frac{CB \times DA}{CD}$, az az, az Érintő, melyet T-vel jelentünk ki, $= \frac{r \times S}{cos.}$

p. o. 30° < Érintője, $T < 20° = \frac{r \times S < 30°}{Cos. < 30°}$.

Jegyzék. Ha a' teljes Fél-húrt = 1-nek vesszük; ugy az Érintő lessz, $= \frac{1 \times S}{cos.}$, vagy $T. = \frac{S}{cos.}$.

§. 24. Feladat. Kiadatván a' Félhúr és az Érintő: a' Szelőt megtalálni. (kép 116).

Megfejtés. A' CAD és CTB hasonló △-ben áll ezen egyenszer: AD : TB = CA : CT. Innen $CT = \frac{TB \times CA}{AD}$, az az, a' Szelő, vagy $Sec. = \frac{T \times r.}{S.}$

§. 25. Feladat. Kiadatván a' Pót-félhur, a' Szelőt megtalálni. (kép 116).

Megfejtés. CD : CA = CB : CT. Innen $CT = \frac{CA \times CB}{CD}$; vagy Szelő, $Sec = \frac{r \times r}{Cos.} = \frac{r^2}{Cos.}$

§. 26. Feladat. A' Fél-hurból és Szelőből az Érintőt megtalálni. (kép 116).

Megfejtés. CA : CT = AD : TB. Innen $TB = \frac{CT \times AD}{CA}$, az az $T = \frac{Sec \times S.}{r}$

§. 27. Feladat. Az Érintőből a' Pót-érintőt megtalálni. (kép 116).

Megfejtés. △CBT ∽ △CAK, mert <B = <M, (merők); — <TCB = <MKC, (visszások), harmadik harmadikkal egyenlő. És igy áll ezen egyenszer: TB : BC = CM : MK. Innen $MK = \frac{CM \times BC}{TB.}$, az az, a' Pót-érintő:

vagy $\text{Cot.} = \frac{r \times r}{T} = \frac{r^2}{T}$. p. o. a' 60° <-Érintője = 30°-nyi <-nek Pót érintője lessz:

$$= \frac{r^2}{T < 30°}.$$

Jegyzék. Az előhordott Feladatokban előforduló Egyenszerek Négy Tagjai közzül akármelyik legyen esmeretlen: a' többi háromból ki lehet keresni. Gyakorolja magát ezekben a' Tanúló.

§. 28. Az ilyen módon készült Formulák szerént keresgették ki a' Mathematicusok a' Szögvonalakat. — Ezen Szögvonalak tehát arra valók, hogy a' Szögletek helyett őket tévén; 's az oldalokkal egyenszerbe vévén: ugyan azon △-ben magában, annak valamely esmeretlen részét, akár Szögletét, akár oldalát kikereshessük. — De azt kellene már megmutatni, hogy a' Szögvonalak a' △ oldalaival egyenszeresek.

HARMADIK CZIKKELY.

Vallyon a' Szögvonalak a' △-ök oldalaival egyenszeresek e'?

§. 29. Erre nézve lássuk a' következő Állitmányokat:

Állitmány. A' merő Szögletü △-ben, ha a' Feszes oldalt Küllő, vagy Teljes-Félhúr gyanánt vesszük; akkor mindenik mellék oldal, Fél-hurja lessz a' vele általellenes Szögletnek; a' mellette eső Szögletnek pedig Pót-félhúrja. — Ha pedig valamelyik mellék oldalt vesszük Küllő vagy Telyes Félhur gyanánt: akkor a' másik mellékoldal a' vele általellenes Szegletnek Érintője; a' mellette fekvő <-nek pedig Pót-érintője; — a' Feszes oldal pedig ugyan annak Szelője lessz. (kép 117).

Megmutatás. 1) Az AC feszes oldallal, mint Küllővel a' C Székpontból húzván az FG karélyt: látni való, hogy az AB mellék oldal a' vele általellenes C<-nek Félhurja, — a' BC pedig ugyan annak Pót-félhurja. — És ugyan csak az AC-vel mint Küllővel, az A Székpontból húzván a' DE karélyt: lessz a' CB az A<-nek Félhurja; — az AB pedig ugyan annak Pót-félhurja.

2) Ha az AB mellékoldallal, mint Küllővel KL karély húzatik: látni való, hogy a' BC mellék-oldal lessz az általellenes A szegletnek Érintője. — 'S viszont ha a' BC mellék oldallal, mint Küllővel HI karély húzatik; lessz az AB az általellenes C szegletnek Érintője; a' másik <-nek pedig Pót-érintője, mivel az ennek Pót-szegletje.

Jegyzék. Hogy ugyan azon oldal, ugyan azon szegletnek lehet Fél-hurja is, Érintője is: azon nem kell felakadni; mert mikor Félhúr, akkor a' Feszes oldal vétetik Teljes-Félhúrnak és igy nagyobb, 's annál fogva kevés részekre osztatik a' mellék-oldal; — ellenben mikor Érintő, akkor a' másik mellék-oldal vétetik Telyes Fél-húrnak, és igy ekkor apróbb, 's annál fogva több részekre osztatik a' mellék oldal; 's igy tehát ekkor Érintő.

§. 30. Látni való tehát, hogy a' merö szegletü △-ben, a' Szegleteknek Szegvonalaik magok az oldalok. És igy az oldalokat kétféle mértékben lehet venni, u. m. 1-ször Geometriai mértékben. 2-szor Trigonometriai mértékben, mint a' Szegleteknek Szegvonalait, és igy a' Teljes Fél-hur mértékével mérendőket. — Már felvévén a' △-nek két oldalát; 's mindeniket ezen két tekintetben nézvén: a' minő Szerben vannak egymáshoz egyik tekintetben vagy mértékben: éppen olyan Szerben kell lenniök egymáshoz a' másik tekintetben vagy mértékben is. — Mert általjában véve, két dolog, ha mindenik két külömböző mértékben tekintetik: a' minő Szerben van egymáshoz egyik mértékben; éppen olyan Szerben van a' másik mértékben is; p. o. két Csomó pénz, ha forint mértékben ugy van egymáshoz, mint 2 : 4 : bizonyosan garas mértékben úgy lessz, mint 40 : 80, már pedig 2 : 4 = 40 : 80. — Minthogy tehát a' Szegvonalak nem egyebek, mint éppen az oldalok; az oldalok pedig két tekintetben nézetvén, magok magokkal egyenszeresek: látnivaló, hogy a' Szegvonalak az oldalokkal egyenszeresek.

§. 31. Állitmány. Akárminő △-ben, (és igy a' merő Szegletüben szint úgy, mint a' hajlott Szegletüben); mindenik oldalnak fele, az Általellenes Szegletnek Fél-hurja. (kép 118).

Megmutatás. Akárminő △-et bele lehet karikába irni, úgy, hogy annak szegletei a' kerületre essenek. A' kerületi szegletnek pedig mértéke a' szárai közt eső karélynak fele, p. o. a' B<-nek mértéke = AE. Már az AE-nek Fél-húrja = AF, t. i. a' két annyi karélynak az AED-nek hurjának, az AD-nek fele. Mivel pedig <B = AE karély: a' mi az AE Fél-hurja, éppen az a' H<é is = AF, az az, a' B< Fél-hurja az általellenes oldalnak fele. Igy a' D<nek Fél-hurja az AB-nek fele; az A< Fél-hurja a' BD-nek fele.

Jegyzék. Ilyen esetben Teljes-Félhur mindenkor azon karikának Küllője, melybe a' △-t bele lehet irni.

§. 32. Következet. Mivel pedig a' mint vannak a' Felek egymáshoz, úgy vannak az egészek is: látni való, hogy a' mint van valamely < Fél-hurja, a' másik szeglet Félhurjához: ugy van az előbbi <-tel általellenes oldal, az utóbbi szeglettel általellenes oldalhoz. És igy akárminő △-ben a' szegvonalak az oldalokkal egyenszeresek.

NEGYEDIK CZIKKELY.

Az Egyenszárú Háromszögök' kifejtése.

(Resolutio Triangulorum Planorum).

A) A' merő Szögletü egyenes △-ök kifejtése.

§. 33. A' merő szögletü △-öket lehet azon általános szabály szerént is kifejteni, mely szerént a' Szögletek Félhurjai, egyenlők az általellenes oldalok felével; a' midőn Teljes Fél-hurnak vétetik azon karikának Küllője, melybe a' △-t bele lehet irni. E' szerént két szegletet, és két azokkal általellenes oldalt vévén fel, mint Egyenszer Tagjait: ezen négy Tagok közzül akármelyik legyen esmeretlen, azt a' többiből kikereshetni.

Jegyzék. El nem kell felejteni, hogy a' Trigonometriai egyenszerekben, mindég két oldal forog fen, két két tekintetben, t. i. Geometriai és Trigonometriai tekintetben, — az az, mint szeglet helyett szolgáló vonal. Már az egyik oldalnak mind a' két tekintetben, — a' másiknak pedig az egyik tekintetben esmeretesnek kell lenni; igy lessz három esmert, vagy kiadott tagja az Egyenszernek. Az Egyenszert ugy kell öszve rakni, hogy a' külön Szerekben utolsó tagok legyenek azok, a' melyek közzül egyiket keressük.

§. 34. Feladat. Adatván a' B< (= merő) az AC oldal, és a' C< : kikeresni az AB oldalt. (kép 119).

Megfejtés. Ezen Feladatban az AC és AB oldalok forognak fenn. Az AC ki van adva két tekintetben, t. i. Geometrice, mert meg van mondva hány öl, p. o. = 10; és Trigonometrice, mert a' B< tudva van, t. i. 90°, — az AC-nek fele pedig ennek Fél-hurja. Továbbá az AB ki van adva Trigonometrice, mert a' C < ki van adva p. o. = 40°, már pedig az AB-nek fele annak Fél-hurja. Keressük pedig az AB-t Geometrice. Most tehát mindenik Szerben az utólsó tag Geometriai tekintetben lessz; az első pedig Trigonometriaiban, vagy pedig az első Szer mindenik tagja lessz Trigonometriai, az utolsó Szernek mindenik tagja pedig Geometriai. — E' lessz tehát az egyenszer: a' mint van az AC-nek fele Trigonometrice, az az, a' B< Fél-hurja, az egész AC-hez Geometrice: ugy van az AB-nek fele Trigonometrice, az az, a' C<-nek Fél-hurja; az egész AB-hez Geometrice; — és igy: S. <B : AC = S. < C : AB.

vagy: S.<B : S.<C = AC : AB.

és igy: $AB = \frac{S. < C \times AC}{S. < B.}$

vagy: $AB = S. < 40^\circ \times AC.$

r.

§. 35. Feladat. Adatván a' B<; az AC oldal, és az AB oldal: keresni kell a' C<t. (kép 119).

Megfejtés: Itt a' Geometriai tekintetek járnak elől, a' Trigonometriaiak hátúl, igy:

AC : S <B = AB : S < C.

vagy: AC : AB = S<B : S< C

Innen: $S. < C = \frac{AB \times S < B.}{AC.}$

Ekkor a' mely szám kijön : azt a' Fél-húrok rendoszlopában felkeresvén; megnézzük hány foknyi szeglet felel meg neki ! 's az lessz a' keresett C szeglet.

§. 36. De ezen minden $\triangle$-re illő kifejtés módján kivül, van a' merő szögletü $\triangle$-ök kifejtésének tulajdon módja is, mely szerént valamelyik oldalt Teljes-Félhur gyanánt vévén, a' többi vagy Félhúr, vagy Érintő lessz. (lásd §. 29). Erre nézve lássunk egynehány Feladatokat.

§. 37. **Feladat.** A' merő Szögletü $\triangle$-ben, adatván az AC feszes oldal, és valamelyik mellék-oldal, vagy AB, vagy BC, az A és C Szögleteket kikeresni. (kép 119).

Megfejtés. Az AC feszes oldalt felvévén Teljes-Félhur gyanánt: ezek lesznek az egyenszerek:

a' $C<$-re : $AC : r = AB : S<C$.

innen: $S<C = \dfrac{r \cdot AB}{AC}$

az $A<$-re $AC : r = BC : S<A$

innen: $S<A = \dfrac{r \times BC}{AC}$. Vagy Pót-félhurokkal a'

$C<$-re: $AC : r = BC : Cos<C$.

$$\text{innen:} \begin{cases} Cos<A = \dfrac{r \times AB}{AC} \\ Cos< = \dfrac{r \times BC}{AC} \end{cases}$$

p. o. legyen $AC = 10$ -öl, láb 's a' t. $AB = 6$, $BC = 8$, lessz $Cos<A = \dfrac{10\,000,000 \times 6}{10} = 6\,000,000$.

Ezen 6·000,000,-t kikeresvén a' Fél-hurok között, megfelel neki körül belől 37°-nyi Szöglet; és igy a' 6·000,000 Pót-félhurja 53°-nyinak; — tehát az $A< = 53^{\circ}$. — És $Cos<C = \dfrac{r \times BC}{A} = \dfrac{10\,000,000 \times 8}{10} = 8\,000,000$, melynek mint Sinusnak megfelel 53°, mint Cosinusnak $= 37^{\circ}$, és igy $<C = 37^{\circ}$.

§. 38: Adatván a' két mellék oldal $AB = 6$, és $BC = 8$: az A és C Szögleteket kikeresni. — (kép 119).

Megfejtés. 1) Ha BC lessz $= r$: ugy ilyen egyenszerek lesznek: $BC : r = AB : T. < C$
és $BC : r = AB : Cot. < A$.

$$\text{p. o.} \quad 8 : 10{\cdot}000{,}000 = 6 : \begin{cases} Cot < A \\ T < C \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} Cot < A \\ T < C \end{matrix}\right\} = \frac{10{\cdot}000{,}000 \times 6}{8} = 7{\cdot}500{,}000. \text{ ezen —}$$

7·500,000-nek mint Tangensnek felel meg 37°; és mint Cotangensnek 53°. Tehát $< A = 53°$, $< C = 37°$.

2) Ha AB lessz $= r$: úgy ilyen egyenszerek lesznek:
$AB : r = BC : T < A$
és $AB : r = BC : Cot < C$

$$\text{innen;} \left.\begin{matrix} T < A \\ Cot. < C \end{matrix}\right\} = \frac{r \times BC}{AB} = \frac{10{\cdot}000{,}000 \times 8}{6} = 13{\cdot}333{,}333.$$

Ennek, mint Tangensnek megfelel $= 53°$, mint Cotangensnek $= 37°$. És igy $< A = 53° < C = 37°$.

§. 39. Feladat. Adatván minden Szögletek ($A = 53°$; $C = 37°$), és egyik mellék-oldal kikeresni a' másik mellékoldalt. (kép 119).

Megfejtés. 1) Adatván a' $BC = 8°$: azt tesszük Telyes-Fél-hurnak; 's mivel most a' BA-t Geometriai tekintetben keressük: lessz ilyen egyenszer:

$$r : BC = \begin{Bmatrix} T < C \\ Cot < A \end{Bmatrix} : AB.$$

$$\text{innen } AB = \frac{BC \times T < C}{r} = \frac{8 \times T < 37°}{r}$$

$$AB = \frac{8 \times 7'535{,}540}{10\,000{,}000} = \frac{60'284{,}320}{10{\cdot}000{,}000} = 6.$$

és igy: $AB = 6$.

2) Adatván az $AB = 6$, ezt tesszük $= r$; 's lessz ilyen egyenszer a' BC-re:

$$r : AB = \left\{ \begin{matrix} T < A \\ Cot < C \end{matrix} \right\} : BC.$$

$$\text{innen; } BC = \frac{T < 53^\circ \times AB}{r} = \frac{T < 53^\circ \times 6}{10\cdot000{,}000}$$

$$BC = \frac{13\cdot763{,}819 \times 6}{10\cdot000{,}000} = \frac{82\cdot582{,}914}{10\cdot000{,}000} = 8.$$

És igy BC = 8.

Jegyzék. Ilyen móddal lehetne mérni az A-nak a' B-től, vagy B-nek a' C-től való távolságát, ha az egyikhez járulni nem lehet.

§. 40. Feladat. Adatván a' Hegyes Szögletek, és valamelyik mellék-oldal: kikeresni a' feszes oldalt. (kép 119).

Megfejtés. A' feszes oldalt vévén teljes Fél-hurnak; ezt már esmerjük Trigonometrice; — keressük Geometrice.

1) Adatván az A< és BC oldal
igy: S<A : BC = r : AC.
2) Adatván az A<, és AB oldal
igy: CosA< : AB = r : AC.
3) Adatván a' C< és AB oldal
igy: S<C : AB = r : AC.
4) Adatván a' C<, és BC oldal
igy: Cos<C : BC = r : AC.

Jegyzék. A' két mellék-oldalból a' feszes oldalt; vagy a' feszes oldalból és egyik mellék-oldalból, a' másik mellék-oldalt kikeresni legkönnyebb a' Pythagoras' Állitmánya szerént.

B) Hajlott szegletü △-ök Kifejtése.

§. 41. A' hajlott szögletü △-öket csak azon Állitmány szerént lehet kifejteni, mely szerént mindenik szeglet Fél-hurja, az általellenes oldalnak fele. Itt legkönnyebbek azon esetek, melyekben általellenes oldalok és szögletek jönnek elő az egyenszerben, p. o.

§. 42. Feladat. Adatván két szöglet és az egyikkel általellenes oldal a' másikkal általellenes oldalt kikeresni. (kép 120).

Megfejtés. 1) Adatik a' B<, és C<, és az AC oldal; kerestetik az AB oldal igy:

$$S{<}B : AC = S{<}C : AB.$$

vagy: $S{<}B : S{<}C = AC : AB.$

innen: $AB = \dfrac{S{<}C \times AC}{S{<}B}$

2) Adatik <B, <C, és AB oldal: kerestetik AC oldal igy:

$$S{<}C : AB = S{<}B : AC$$

innen: $AC = \dfrac{AB \times S{<}B.}{AC}$

Jegyzék. Igy lehet megmérni két pontnak, az A-nak és B-nek, ha csak az A-hoz lehet járulni, egymástóli távolságukat. T. i. elindulván az A-tól bizonyos szöglet alatt, jön az ember tetszése szerént, a' meddig akar, p. o. a' C-ig; onnan nézvén az A és B felé, megméri a' C<-t; szinte megméri az AC oldalt: ekkor tudván a' B<-t, az AC oldalt, és a' C<-t: keresi az AB oldalt igy:

$$S{<}B : AC = S{<}C : AB.$$

§. 43. Feladat: Adatván két oldal, és az egyikkel általellenes Szöglet: keresni a' másikkal általellenes oldalt. kép 120).

Megfejtés. 1) Az AB, AC, és C<-ből a' B<-t igy: $AB : AC = S{<}C : S{<}B.$

$$S{<}B = \frac{AC \times S{<}C.}{AB}$$

2) AB, AC, és B<-ből, a' C<-t igy:

$$AC : AB = S{<}B : S{<}C$$

$$S{<}C = \frac{AB \times S{<}B.}{AC}$$

§. 44. Feladat. A' Tompa Szögletü △-ben adatván a' Szegletek és a' BC talp: a' △ függő nagyságát = AD kikeresni. (kép 121).

Megfejtés. 1) Ki kell keresni először az AC oldalt igy: $S{<}A : BC = S{<}B : AC$

innen: $AC = \dfrac{BC \times S{<}C.}{S{<}A;}$

2) Most által menvén az ACD $\triangle$ - be: itt az AD - t kitalálni igy:

$$S\angle D : AC = S\angle t : AD$$

vagy: $r : AC = S\angle t : AD$

innen: $AD = \frac{AC \times S\angle t}{r}$

vagy AC helyett: $= \frac{S\angle B \times BC}{S\angle A}$, $\angle t$ helyett $= 180 - v$ - t

tévén, lessz: $AD = (\frac{S\angle B \times BC}{S\angle A} \times S\angle 180^\circ - v) : r.$

Jegyzék. Igy lehet megmérni Trigonometrice az olyan magosságot, melyhez járulni nem lehet

§. 45. A' hegyes szegletü $\triangle$-ökben adatván a' $\angle$-ek, és egy oldal, p. o. AB; vagy BC: a' Függő magosságot megtalálni. (kép 122).

Megfejtés. A' Függő-magosság felosztja a' $\triangle$-t két merő Szegletü $\triangle$-re. Már az ABD $\triangle$-ben áll ezen egyenszer:

$$r : AB = S\angle B : AD.$$

innen: $AD = \frac{AB \times S\angle B}{r}$. — vagy mivel

$$S\angle A : BC = S\angle C : AB.$$

és $AB = \frac{BC \times S\angle C}{S\angle A}$. — ezt az AB helyett tévén,

lessz: $AD = (\frac{BC \times S\angle C \times S\angle B}{S\angle A}) : r.$

Igy a' Talpból megtudjuk a' magosságot.

Jegyzék. Az eddig előadattakból már könnyen által látni, miként lehet az embernek valamely Tábla földet Trigonometrice felmérni, t. i. $\triangle$-ökre osztván azt; 's a' $\triangle$-ök Szögleteit, és oldalait, Függö-magosságait kikeresvén. — Sőt miként lehet szinte egy álló helyéből, nem csak valamely messze eső Tárgynak ő tőlle lévő távolságát; — hanem körülte nagy darab Helynek területét is felmérni; feltévén, hogy a'hoz való Eszközei, p. o. jó messze-látó Csöve, Astrolabiuma, Theodolitja 's a' t. volnának. — Ezen mesterséget egyszerüen igy képzelhetni: Felmenvén valamely Toronyba; annak ablakában egy kis hosszaságot, a' mennyit lehetne pontosan megmérnek, — annak mind két végénél (kép 123) b, c, Astrolabium mellett néző Cső segitségével néznék a' megmérendő tárgy = A felé; ekkor a' b, és c, Szögleteket tudván, tudnám az A $\angle$ - t is. — Igy a' bc oldalból és a' Szögletekből kikereshetném akár Ab, akár Ac oldalt igy: $S < A : bc = S < b : Ac$. — Igy az A-nak a' c-töli távolságát megtudnám. — Ekkor felvennék másik tárgyat az E-t; éppen ilyen módon megtudnám az Ec távolságot is. Már ekkor az AEc △-ben esmervén két oldalt Ac és Ec, és a' közbe eső Szögletet: kérdés, nem találhatnám é ki az ezzel általellenes AE oldalt? — Mindjárt meglátjuk a' következő §-ban, hogy kitalálhatjuk; az az, megtudhatjuk az A-nak E-töli távolságát. — Igy több ilyen pontoknak is, mind tőllünk, mind egymástoli távolságukat megmérvén, egész egy nagy Sokszegüt formálhatunk magunk körül; melynek tudván az egész Kerítését; és a' benne formálható △-ök minden oldalait: annak területét felmérni igen könnyü. (Lásd lejjebb a' területekről).

§. 46. Feladat. Adatván két oldal AB, BC és a' közben eső Szöglet B: a' harmadik általellenes oldalt AC megtalálni. (kép 12.).

Megfejtés. Függönyt eresztvén az A tetőből $= AD$, ez felosztja az ABC △-t két merőszögletü △-ökre. — Most az ABD △-ben ki kell keresni először is az AD Függönyt igy:

$$r : AB = S < B : AD$$

$$AD = \frac{AB \times S < B}{r}$$

Továbbá mivel az x Szöglet is tudva van ($= 90^\circ - B = x$): kikereshetjük a' BD oldalt, igy:

$$r : AB = S < 90^\circ - B : BD.$$

$$BD = \frac{AB \times S < 90^\circ - B}{r}$$

Ezen BD-t kivónván a' BC-ből: ott marad a' DC. És igy: $DC = BC - \frac{AB \times S < 90^\circ - B}{r}$

Már által menvén az ADC △-be; mivel ott a' két mellékoldalt esmerjük: kicsinálhatjuk az AC Feszes oldalt igy: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$. — Vagy az AB helyett is; a' DC helyett is tévén azoknak értéköket, lessz a' keresett

$$AC = \sqrt{\left(\frac{AB \times S < B}{r}\right)^2 + \left(BC - \frac{AB \times S < 90^\circ - B}{r}\right)^2}$$

p. o. legyen $AB = 4$, $BC = 7$, $< B = 50^\circ$ (Sinusa $= 7{\cdot}660{,}444$), $< x = 40^\circ$ (Sinusa $= 6\,427{,}876$)

lessz: $AC = \sqrt{\frac{4 \times 7'660,444^2}{10\,000\,000} + \left(7 - \frac{4 \times 6'427.876}{10'000,000}\right)^2}$

$= \sqrt{3^2 + (7-2,5)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4,5^2}$

$= \sqrt{9 + 16,25}$

$= \sqrt{25,25} = 5,5.$

lessz az AC oldal $= 5,5$.

Következet. Ha már a' harmadik oldalt megtaláltuk; ebből a' Szögleteket is ki lehet keresni:

$AC : S{<}B = AB : S{<}C$
$AC : S{<}B = BC : S{<}A.$

§. 47. Feladat. Az ABC$\triangle$-ben adatván két oldal AB és AC, és a' közbe eső n$<$: a' többi Szögleteket kikeresni. (kép 125).

Megfejtés. Esmervén az n$<$-t, tudjuk a' másik kettő summáját is ($o + v = 180 = n$). Azt is tanultuk a' Szám-Tudományban (lásd 86. l.) hogy ha fél summához fél külömbség adatik: ki jön a' nagyobbik; — és ha fél summából fél külömbség kivétetik: kijön a' kisebbik. Ugyde a' Félkülömbséget nem tudjuk: ezt kellene hát kikeresni. — Kikeressük igy: a' mint van a' két adott oldalok summája azoknak külömbségökhöz: ugy van a' két esmeretlen Szögletek fél summájának Érintője, ugyan azon Szögletek félkülömbségének Érintőjéhez:

$$AC + AB : AC - AB = T\left(\frac{<o + <v}{2}\right) : T\left(\frac{<o - <v}{2}\right)$$

innen a' Félkülömbség Érintője;

vagy: $$T\left(\frac{<o - <v}{2}\right) = \frac{(AC - AB) \times T\left(\frac{<o + <v}{2}\right)}{AC + AB.}$$

Megmutatás. A' $\triangle$ nagyobbik adott oldalával az AC-vel mint Küllővel karikát csinálván: húzzuk az AE, BD, DC segédvonalakat: ekkor $AE = AC = AD$, mert Küllők. És a' $BD = AD - AB$ vagy $AC - AB$, és igy BD a' két adott oldal közti külömbség. — Továbbá:

$\angle x = \angle o + \angle v$, mert a' $\triangle$ megnyujtott oldalával formáltatik; — és igy $\angle x$ jelenti a' két keresendő Szögletek summáját. Azomban $\angle x = 2y$, vagy: $y = \frac{x}{2}$, mert az y Kerületi, x pedig Székponti ugyan azon karélyra eső szöglet; és igy $y =$ a' két keresendő szögletek fél summája. — Továbbá: $\angle o = \angle y + \angle z$, mert a' $\angle o$ a' $\triangle$ megnyitott oldalával formáltatik; és igy a' $\angle z$, a' $\angle y$-t annyira pótolja ki, hogy $\angle o$ legyen belőle; vagy is $\angle z$ a' fél summát annyira pótolja, hogy a' nagyobbik keresett legyen belőle; — és igy $\angle z$ nem lehet egyébb, mint fél külömbség; mert a' mi a' fél summához adódván kicsinálja a' nagyobbikat; az $=$ fél külömbség. —

Most már huzván az $y\angle$-nek a' D-ből, mint Székpontból mérő karélyát $= CF$, és Érintőjét $= CE$; szinte a' $z\angle$-nek is a' C Székpontból karélyát $= DK$, és Érintőjét $= DG$: formáltatnak itt két hasonló $\triangle$-ök, t. i. $\triangle BEC \backsim \triangle BGD$, mert $\angle o = \angle s$, hegyellenesek, — $\angle BCE = \angle CDG$ merők, — harmadik $=$ harmadik. És illy áll ezen egyenszer:

$$BE : BD = EC : DG.$$

Ugyde $BE = BA + AE = BA + AC =$ az adott oldalok summája; — $BD = AD - AB$, vagy $BD = AC - AB$, az adott oldalok közti külömbség; — $EC = \angle y$ Érintője, vagy is a' keresett szögletek fél summájának Érintője; — $DG = \angle z$ Érintője, vagy is a' keresett szegletek fél külömbségének Érintője. — És igy:

$$AC + AB : AC - AB = T\left(\frac{\angle o + \angle v}{2}\right) : T\left(\frac{\angle o - \angle v}{2}\right)$$

$$\text{és } T\left(\frac{\angle o - \angle v}{2}\right) = \frac{(AC - AB) \times T(\angle o + v) : 2}{AC + AB.}$$

p. o. legyen $AB = 3$, $AC = 5$, $\angle n = 100$. lessz a' keresett $\angle$-ek summája $= 80$, fél summája $= 40$. Keressük a' fél külömbség Érintőjét igy:

$$\text{Félkül. Érint.} = \frac{5 - 3 \times T(\angle 80 : 2)}{5 + 3.}$$

$$= \frac{2 \times (56{\cdot}712{,}818 : 2)}{8.}$$

$$= \frac{2 \times 28'356,409}{8} = \frac{56'712,818}{8} = 7089102 = 4^\circ \text{ Szegl. Érint.}$$

És igy Félkül. $= 4^\circ$. Innen:

$< o = 40 + 4 = 44$; és $< v = 40 - 4 = 36$.

§. 48. Következet. Megtalálván a' Szögleteket: már a' harmadik oldalt azokból könnyü kikeresni.

§. 49. Következet. Ha tehát a' △-ben kiadatik két oldal és a' közbe eső szöglet: annak esmeretlen részeit kétképpen lehet kikeresni; t. i. vagy elébb a' harmadik oldalt (lásd §. 46), 's abból a' szögleteket, vagy előbb a' szögleteket 's azokból a' harmadik oldalt (lásd §. 47).

§. 50. Feladat. Adatván a' △-ben három oldal: kikeresni a' Szögleteket. (kép 126).

Leeresztvén a' BD függönyt, ez által az ABC △ feloszlik két merő szögletü △-re. Most már az ABD △ ben esmerjük az AB-t mind a' két tekintetben; de több oldalt egyik tekintetben se esmerünk. Kikeressük tehát az AD-t Geometrice: azért, hogy majd belőle az o <-t kikereshessük. Azomban ha az AD-t megtudjuk, tudni fogjuk a' CD-t is, mert DC = AC — AD; 's a' DC által kikereshetjük az x <-t is; pedig $< o + < x = < ABC$'s a' t. — Hogy keressük hát ki az AD-t? — Kétféleképpen:

1) A' legkissebb oldallal BC-vel, mint Küllővel karikát irván, 's az AB-t megnyujtván E-ig, lessz AE = AB + BC, és AF = AB — BC = az AB és BC közti külömbség. Már ha az AG darab vonalt esmerném: azt ki venném AC-ből, — ott maradna GC; annak fele éppen GD (lásd Geometr. §. 63). és igy GC-nek fele + AG = AD. — Hogy találjuk hát meg AG-t? Igy:

$$AC : AE = AF : AG.$$

vagy $AC : AB + BC = AB - BC : AG.$

innen: $AG = \frac{AB + BC \times AB - BC}{AC}$

vagy AG = két oldal summája, szorozva ugyan azok külömbségével elosztva a' harmadik oldallal.

p. o. legyen $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 5$
lessz: $AG = \frac{12 \times 2}{8} = \frac{24}{8} = 3.$

Már $AG = 3$-t kivévén $AC = 8$-ból lessz $GC = 5$.
és $GD = 2\frac{1}{2}$ — és $AG + GD = AD = 3 + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$
Innen $<o$-t kikeressük igy: $AB : AD = r : S < o$.
innen $S < o = \frac{AD \times r}{AB.}$

2) Az AD-t kikereshetjük igy is: (kép 127).
legyen: $AB = a$
$BC = b$
$AC = c$
$AD = x$
$DC = c - x$
$BD = y$

Már a' Pythagoras Állitmánya szerint
$a^2 = y^2 + x^2$
kivévén: $b^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$
$\quad - \quad - \quad - \quad + \quad -$

lessz $= a^2 - b^2 = 2cx - c^2$
és $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$

vagy: $AD = \frac{AB^2 - BC^2 + AC^2}{2\,AC.}$

$AD = \frac{7^2 - 5^2 + 8^2}{16} = \frac{88}{16} = 5\frac{1}{2}.$

Igy megtalálván az $x = AD$-t, kikeressük az $o <$-t
igy: $a : x = r : S < o$
vagy: $a : \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} = r : S < o$

Innen: $S < o = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \times r\right) : a$

Hasonlóul a' BDC $\triangle$-ben a' $<p$-t megtaláljuk

igy: $b : c - x = r : S\angle p$
vagy; $b : \frac{c - a^2 + c^2 - b^2}{2c} = r : S\angle p$.

innen: $s\angle p = \left(\frac{c - a^2 + c^2 - b^2}{2c} \times r\right) : b$.

ÖTÖDIK CZIKKELY.

Az Egyenes szárú △-ök Udvaraik kikeresése.

§. 51. Feladat. A' merő szögletü △-ben adatván egyik mellék oldal AC, és a' mellette eső szöglet C: a' △ udvarát kikeresni, (kép 119).

Megfejtés. A' △ udvara kijön, ha a' talpot fél magossággal, vagy fél talpot egész magossággal szorozzuk. A' merő szögletü △-ben pedig, ha az egyik mellék oldal = talp, úgy a' másik = magosság. Kikeresem hát az AB magosságot igy:

$$r : AC = T\angle C : AB.$$

innen AB vagy magosság $= \frac{AC \times T\angle C}{r}$

innen a' △ udvara lessz $= \frac{AC}{2} \times \frac{AC \times T\angle C}{r}$

§. 52. Feladat. Az ABC tompa szögletü △ udvarát kikeresni, adatván a' BC talp és a' szögletek (kép 121).

Megfejtés. Mivel az AD magosság kifejezete (§. 44). ez: $AD = \left(\frac{S\angle B \times BC}{S\angle A} \times S\angle 180 - v\right) : r$. ezen magosság felét $= \left(\frac{S\angle B \times BC}{S\angle A} \times S\angle 180^\circ - v\right) : 2r$

Szorozzuk a' BC talpal: 's lessz a' △ udvara $= \left(\frac{S<B \times BC}{S<A} \times S<180° - v\right) : 2r \times BC$

§. 53. Feladat. A' hegyes szögletű △-ben adatván a' talp $= BC$, és a' szögletek, annak udvarát kikeresni (kép 122).

Megfejtés. A' függő magosság kifejezete (§. 45). ez: $AD = \frac{AB \times S<B}{r}$. Ugyde az AB-t a' BC-ből kifejezhetni igy: $S<A : S<C = BC : AB$.

innen $AB = \frac{S<C \times BC}{S<A}$. Már az AB helyett ezen értéket tévén, lessz:

AD vagy magosság $= \left(\frac{S<C \times BC}{S<A} \times S<B\right) : r$

ennek fele $= \left(\frac{S<C \times BC}{S<A} \times S<B\right) : 2r$

Ezen fél magosságot szorozván az egész talpal: lessz a' △-udvara $= \left(\frac{S<C \times BC}{S<A} \times S<B\right) : 2r \times BC$.

§. 54. Mivel akár minő △-nek oldalai, az általellenes szögleteknek kettős Fél-hurjai: innen látni való, hogy ha az oldalokat az általellenes szögletek Fél-hurjaival elosztjuk: azok egymással mind egyenlők lesznek, mert mindeniknek hányadosa $= 2$, vagy ha a' szögletek Fél-hurjait, az általellenes oldalokkal elosztjuk, azok is egymással mind egyenlők lesznek, mert mindeniknek hányadosa $= \frac{1}{2}$; p. o. (kép 119, 120).

$$\frac{AB}{S<C} = 2, \text{ és } \frac{AC}{S<B} = 2, \text{ és } \frac{BC}{S<A} = 2.$$

És igy: $\frac{AB}{S<C} = \frac{AC}{S<B} = \frac{BC}{S<A}$; és

$$\frac{S\angle C}{AB}=\tfrac{1}{2},\quad \frac{S\angle B}{AC}=\tfrac{1}{2},\quad \frac{S\angle A}{BC}=\tfrac{1}{2}.$$

És igy; $\dfrac{S\angle C}{AB}=\dfrac{S\angle B}{AC}=\dfrac{S\angle A}{BC}$.

§. 55. Ezen tekintet szerént Egyenletek által, a' $\triangle$-nek mind oldalait, mind szögleteit, mindj udvarát ki lehet keresni; p. o.

I. 1) $\dfrac{AB}{S\angle C}=\dfrac{AC}{S\angle B}$, és igy $AB=\dfrac{AC}{S\angle B}\times S\angle C$.

viszont: $AC=\dfrac{AB}{S\angle C}\times S\angle B$.

2) $\dfrac{S\angle C}{AB}=\dfrac{S\angle B}{AC}$, és igy $S\angle C=\dfrac{S\angle B}{AC}\times AB$.

és $S\angle B=\dfrac{S\angle C}{AB}\times AC$.

II. 1) $\dfrac{AB}{S\angle C}=\dfrac{BC}{S\angle A}$, és igy $AB=\dfrac{BC}{S\angle A}\times S\angle C$

és $BC=\dfrac{AB}{S\angle C}\times S\angle A$.

2) $\dfrac{S\angle C}{AB}=\dfrac{S\angle A}{BC}$, és igy $S\angle C=\dfrac{S\angle A}{BC}\times AB$.

és $S\angle A=\dfrac{S\angle C}{AB}\times BC$.

III. 1) $\dfrac{AC}{S\angle B}=\dfrac{BC}{S\angle A}$, és igy $AC=\dfrac{BC}{S\angle A}\times S\angle B$.

és $BC=\dfrac{AC}{S\angle B}\times S\angle A$.

2) $\dfrac{S\angle B}{AC}=\dfrac{S\angle A}{BC}$, és igy $S\angle B=\dfrac{S\angle A}{BC}\times AC$,

és $S\angle A=\dfrac{S\angle B}{AC}\times BC$.

§. 56. A' mi a' △ udvarát illeti:

1) A' merő szegletü △-re nézve: adatván a' BC talp, és a' szegletek; lessz az AB magasság $= \frac{BC}{S < A} \times S < C$; — ezt szorozván a' BC talp felével, lessz az udvar:

$$= \frac{BC}{2} \times \left(\frac{BC}{S < A} \times S < C \right).$$

2) A' hajlott szegletü △-ből lehet két merő szegletű △-et csinálni leeresztett függönnyel; 's azoknak udvarait ekképpen kikeresvén; öszve kell adni.

F Ü G G E L É K.

§. 57. Feladat. Kikeresni minő szerben van körül-belől a' Közép-szelő a' kerülethez. (kép 128).

Megfejtés. 1) Tegyük fel, hogy az ACD <, vagy AD karély = egy percznyi. Ennek Fél húrja AB, mely is = 2909 (midőn a' Teljes-Fél-hur = 10·000,000).

2) Mivel az egy percznyi karély még nagy karikában is igen kicsiny: tehát a' közt, és az ő Fél-hurja közt igen kicsiny, 's úgy szóilvan semmi a' külömbség. És igy szembetünő hiba nélkül azt mondhatjuk, hogy az egy percznyi karély is Trigonometriai mértékkel mérve = 2909.

3) Már egy foknyi karély 60-szorta nagyobb egy perczynyinél, és igy = 2909 × 60 = 174,540.

4) Mivel pedig az egész kerületben van 360 fok: tehát lessz az egész kerület = 174,540 × 360 = 62·834,400.

5) Már a' küllő mint Teljes-Fél-hur = 10·000,000 lévén: lessz a' középszelő kétannyi = 20 millio.

6) Ugy van tehát a' közép-szelő a' kerülethez, mint 20·000,000 : 62·834,400-hoz. Vagy a' Szer mind két tagját elosztván 10,000-el, az az: mindeniknek végéről öt jegyet elhagyván: 200 : 628, — vagy 2-vel elosztván: 100 : 314. E. K. Cs. és M.

II.

KARÉLYOS HÁROMSZÖGMÉRÉS.

(Trigonometria Sphaerica).

ELSŐ CZIKKELY.

Karikák, — Tengely-Sarkok, — Karélyos-Szöglet, — Karélyos Háromszög.

§. 1. A' Golyóbis felületén lehet húzni kissebb nagyobb Karikákat. Az ollyan Karikákat, mellyeknek Székpontjok a' Golyóbis Székpontjával éppen öszve esik, nevezik Nagy Karikáknak (Circuli Maximi vel Maiores). Ezek tehát a' Golyobist két egyenlő részekre, Félgolyobisokra (Hemisphaerium) osztják. — Ellenben az olyan Karikákat, mellyeknek Székpontjok a' Golyóbis Székpontjával nem esik öszve, nevezik Kissebb, vagy Kis Karikáknak (Circuli Minores). Ezek tehát a' Golyóbist két nem egyenlő részekre osztják.

§. 2. Vegyünk fel akármely Nagy Karikát, és képzeljük azt úgy, mint egész Karika-területet (kép 129). p. o. D C N O, már képzeljünk ennek Székpontján a' G-n függönyösen keresztül menni egy egyenes vonalat =F x: ez az egyenes vonal, melly egyszer'smind a' Golyóbis Székpontján is keresztül megy, neveztetik a' Karika, vagy a' Golyóbis Tengelyének (Axis), mivel ha ennek két végét megfognánk, vagy megtámasztanánk, tehát ezen F x vonal körűl a' Karikát, vagy az egész Golyóbist forgatni lehetne. — Illyen Tengelyeket a' Golyóbison számtalanokat lehet képzelni; valamint ezeknek megfelelő Nagy Karikákat is.

§. 3. A' Tengelynek két végpontjai neveztetnek Tengely-végeknek, vagy Sarkoknak (Polus), p. o. F és x, — D és N. — Sarkokat is tehát annyit lehet a' Golyóbison képzelni, a' hány nagy Karikákat, — és igy számtalanokat.

§. 4. Következet. Mivel a' Tengely a' Karika lapjára függönyös: tehát a' két Tengely-végtől, vagy a' Sarkoktól a' Karika Kerületének minden pontjai egyenlő távolságra, és igy 90 foknyira vannak.

§. 5. Mivel a' Sarkok a' Nagy Karika Kerületének minden pontjaitól egyenlő távolságra vannak: tehát ha valamely Karikának sarkain egy másik Karika keresztül megy, ezen Karika amannak se egyik, se másik oldalára nem dűl; vagy ezen Karikák egymást függönyösön, és igy merő szegletek alatt metszik. — És akármely Karély, ha egy másik Karélyra úgy áll, hogy egyszer'smind annak sarkán megy keresztül, vagy sarka felé van irányozva: az erre függönyös. — És viszont egymásra függönyös Karélyok azok, mellyek egymásnak sarkain mennek keresztül, — vagy a' sarkok felé vannak irányozva, p. o. a' DC környegyedre függönyösök az FD, FA Környegyedek, mert a' DC-nek sarkától az F-től jönnek reá.

§. 6. Ha két nagy Karikák egymást metszik, azok formálnak Karélyos szegletet (Angulus Sphaericus). A' Karélyos szeglet tehát két Nagy Karika-Karélynak egymásra hajlása, p. o. EFB, ACB.

§. 7. Mi a' Karélyos-szegletnek mértéke? — Minden szegletnek mértéke az a' szárai közzé eső Karély, melly a' szegletnek hegyiből, mint Székpontból kanyarittatik. Már p. o. az EFB$<$-nek hegyiből az F-ből, mint Székpontból, ha azt az FG vonalon leljebb, leljebb szállani gondolom, több nagyobb nagyobb egyközű Karikákat csinalhatnék: mellyeknek az EFB$<$szárai közzé eső Karélyai, azon szegletnek mértékei lennének. De mind ezen formálható egyközű Karikák közt legnagyobb az a' Nagy Karika DCNO, mely akkor formáltatnék, ha az F a' G-be az az a' Golyóbis Székpontjára leszállana; és a' mely nagy Karikának az F éppen sarka. Tehát mivel a' kissebb Karikákkal nem örömest élünk: a' Karélyos-szeglet mértékéül rendesen azon nagy Karikának a' szeglet szárai közzé eső Karélyját veszszük fel, mellynek sarka a' szeglet hegyi, — vagy is a' mely nagy Karika a' szeglet hegyitől 90 foknyira = Környegyednyire esik. — Igy az EFB $<$-nek mértéke = DA; — az ACB$<$-nek = DE; — az ABC$<$-nek = fe.

Jegyzék. Mind ezeket, mind a' következőket könnyebb felvenni, ha az ember azon Karikákat 's Karélyokat, mellyeket a' 129-dik kép mutat, kemény papirosból kimetszvén, olly móddal, mint a' kép mutatja, öszve rakja. — (Erről többet szóval).

§. 8. Ha három nagy Karikák egymást metszik: azoknak szegletre öszve menő Karélyaik által formáltatik a' Karélyos Háromszeg (Triangulum Sphaericum). — A' Karélyos △ tehát, három Nagy-Karika-Karélyok által bezárt tér, a' Golyóbis felületén = A' Karélyos △ is vagy merő szegletü, vagy hajlott szegletü.

§. 9. A' Karélyos △-ekről nem igaz az, a' mi az egyenes △-ekről, hogy a' három szeglet együtt 180 fokot tenne, mert a' mint a' képen láthatni, három környegyed is formálhat Karélyos △-et; a' midőn mind a' 3 szeglet merő lessz, és igy = 270°. — És igy itt ha két szegletet esmerünk; még azért a' harmadikat nem esmerjük.

§. 10. Minthogy a' Karélyos △-ek' oldalai mind meg annyi Karélyok: innen a' Karélyos Háromszeg mérésben nem csak a' szegletek helyett, hanem az oldalok helyett is azoknak szegvonalait, t. i. Fél-hurjait, Érintőit: Pót-félhurjait 's Pót-érintőit fogjuk használni.

MÁSODIK CZIKKELY.

Merőszegletü Karélyos Háromszegek kifejtése.

§. 11. Állitmány. Ha a' DC környegyedre (kép 129) függönyösön álittatik két környegyed FD és FA; ezeket pedig ré'sut metszi a' CE környegyed; formáltatnak ezek által több △-ek; — azok közzül vegyünk fel most kettőt, a' DEC-t és ABC-t: mellyek merő szegletüek, — a' D és A-nál. — Már ezen két △ minden oldalainak huzzunk Fél-hurjait, — a' DC Fél-hurja = DG (Küllő) az EC-jé = EG (Küllő), az ED-jé = EI. Ezen Fél-hurokból formáltatott egy egyenes △ EIG, mellynek két oldala az EG és EI ép Fél-hur, — a' 3-dik pedig az IG csonka Fél-hur. — Hasonlóul az ABC karélyos △ oldalainak Fél-hurjai ezek: az AB-jé = BK, a' BC-jé = BH, az AC-jé = AZ. Ha itt a' BK és BH Félhúrokat öszve kötjük KH vonallal, melly az AZ-nél kissebb, de vele egyközű: itt is elő áll egy egyenes △ BKH, melynek két oldala a' BK és BH félhúrok, a' 3-dik pedig KH csonka Fél-húr (az az, rövidebb mint az AC Fél-hurja). —

Már azt állitom: hogy ezen két egyenes △-ek t. i. EIG és BKH hasonlók.

Megmutatás. Ha két △-nek megfelelő oldalai egymással mind egyközűek: azoknak szegleteik kétség kivül mind = lők. Már az EIG és BKH △-ek' megfelelő oldalaik egyközűek, t. i. 1) EI egyközű a' BK-val, mert ugyan azon Karika-lapra mind kettő függönyös. 2) EG a' BH-val egyközű, mert ugyan azon tengelyre mind kettő függönyös. — 3) IG a' KH-val egyközű, mert ugyan azon tengelyre mind kettő függönyös. És igy △ EIG ∽ △ BKH. E. K. M.

§. 12. Következet. És igy az EIG és BKH hasonló △-ekken áll ezen egyenszer:

$$EG : BH = EI : BK$$

(mellyben csak azon oldalok jönnek elő, mellyek ép Fél-hurok); az az, a' mint van a' nagyobbik △ feszes oldalának az EC-nek Fél-hurja, — a' kissebbik △ feszes oldalának a' BC-nek Fél-hurjához; úgy van a' nagyobbik △ egyik mellék-oldalának az ED-nek Fél-hurja, — a' kissebbik △ megfelelő mellék-oldalának a' BH-nak Fél-hurjához.

§. 13. Következet. Azomban mivel az EG Teljes-Fél-hur, és igy akármely merő szegletnek Fél-hurja; — az ED Karély pedig a' C szegletnek mértéke, és igy az EI nem csak az ED Karélynak, hanem a' C<-nek is Fél-hurja: innen ezen egyenszert:

$$EG : BH = EI : BK$$

igy is mondhatom:

$$r : BH = S.{<}C : BK,$$

az az: $S{<}A : S.BC = S{<}C : S.BA$

az az, a' mint van az A < Fél-hurja a' vele általellenes DC oldal Fél-hurjához: úgy van a' C< Fél-hurja a' vele általellenes BA oldal Fél-hurjához; — vagy a' mint van a' Teljes-Fél-hur; a' feszes oldal Fél-hurjához: úgy van az egyik hegyes szeglet Fél-hurja, a' vele általellenes mellék oldal Fél-hurjához.

§ 14. Következet. Innen látni való, hogy a' merő <-ű Karélyos Háromszegekre nézve is áll az a' szabály, melyet az Egyenes <-ekre nézve láttunk: hogy a' szegletek Fél-hurjai az általellenes oldalok Fél-hurjaival egyenszeresek.

§. 15. A' merő szegletű △-ek kifejtésére nézve Hat alap egyenszert fogunk formálni, mellynek változtatásai által minden előjöhető eseteket meg lehet fejteni.

Első Alap Egyenszer, mellyet legközelebb formálánk ez: r : S. Hyp. = S < acuti : S. Cath. opp. Ebben elő fordúl a' Feszes-oldal, — egyik hegyes szeglet, — és az azzal általellenes mellékoldal. Már ezek közzűl akár mellyiket kellessék kikeresni: úgy kell változtatni az egyenszert: hogy a' keresendő, utolsó tag legyen, p. o.

a) Adatván BC feszes-oldal, és C<: kikeresem az AB mellék-oldalt igy:

$$r : S.BC = S.{<}C : S\,AB$$

$$\text{innen: } S.AB = \frac{S.BC \times S{<}C}{r}$$

b) Adatván BC feszes-oldal, és AB mellék-oldal; a' C<-t kikeresem igy:

$$S.BC : r = S.AB : S{<}C$$

$$\text{innen: } S{<}C = \frac{r \times S\,AB}{S.BC}$$

c) Adatván BC feszes-oldal és B<: az AC oldalt kikeresem igy:

$$r : S.BC = S{<}B : S.AC$$

d) Adatván BC és AC oldalok: a' B<-t kikeresem igy:

$$S.BC : r = S.AC : S{<}B.$$

e) Adatván C< és BA oldal vagy B<, és AC oldal a' BC feszes-oldalt kikeresem igy:

$$S{<}C : S.BA = r : S.BC$$

$$\text{és } S{<}B : S.AC = r : S.BC$$

§. 16. Második Alap egyenszer formálása.

Az ABF △-nek minden oldalai nem egyebek mint az ABC △ oldalainak 's egyik szegletének (t. i. annak mértékének) pótkarélyai t. i. az FB feszes-oldal az AB-nek pótlékja; és igy a' mi az AB-nek Fél-hurja: az az FB-nek Pót-félhurja. — Az EB a' BC-nek pótlékja: és igy a' mi a' BC-nek Fél-hurja, az az EB-nek Pót félhúrja; — az EF a' DE-nek, vagy a' C< mértékének pótlékja: és igy a' mi a'

$C\angle$-nek Félhurja: az az EF-nek Pót-félhurja. — Már az első alap egyenszerben előforduló félhúrokat, használjuk ezen Pót-félhurok formájában az EFB $\triangle$-ben: igy

$$r : \left(\frac{S.\,BC}{Cos.\,EB}\right) = \left(\frac{S\angle C}{Cos.\,EF}\right) : \left(\frac{S.\,AB}{Cos.\,BF}\right)$$

's elő áll a' második alapegyenszer, melly igy van:

$$r : Cos.\,EB = Cos.\,EF : Cos.\,BF.$$

Ebben elő fordúl a' két mellék-oldal, és a' feszes oldal; mellyek közzül akár mellyiket, kiadatván a' másik kettő, ki lehet keresni p. o.

a) A' feszes-oldal BF kikeresésére szolgál maga az Alapegyenszer.

b) Az EB oldalt, a' másik két oldalból kikeresem igy:

$$Cos.\,EF : Cos.\,BF = r : Cos.\,EB.$$

c) Az EF oldalt a' másik kettőből igy:

$$Cos.\,EB : r = Cos.\,BF : Cos.\,EF.$$

§. 17. Harmadik alap egyenszer formálása.

Van a' képen egy kis merő szegletü $\triangle$ Cde: az első alap egyenszer erre alkalmazva igy lessz:

$$r : S.\,Cd = S\angle C : S.\,de$$

Úgyde Cd = DA (mert az AC mind a' kettőt Környegyedre pótolja); a' DA pedig az $F\angle$-nek mértéke: és igy a' mi a' Cd-nek Fél-hurja, az az $F\angle$-nek is Fél-hurja. — A' $C\angle$ = DE; a' DE-nek pedig pótlékja EF, és igy a' mi a' $C\angle$-nek Fél-hurja, az az EF-nek Pót-félhurja. — A' de-nek pótlékja az ef, az ef pedig a' $B\angle$-nek mértéke; és igy a' mi a' de-nek Fél-hurja, az a' $B\angle$-nek Pót-félhurja. Igy tehát a' Cde $\triangle$-ből az első alap egyenszert általvivén az EFB $\triangle$-be, lessz igy:

$$r : \left(\frac{S.\,Cd}{S.\angle F}\right) = \left(\frac{S\angle C}{Cos.\,EF}\right) : \left(\frac{S.\,de}{Cos.\angle B}\right)$$

's elő áll a' 3-dik alap egyenszer igy:

$$r : S\angle F = Cos.\,EF : Cos.\angle B.$$

mellyben előfordúl, egy hajlott szeglet, — 's a' mellette fekvő mellék-oldal, — és az azzal általellenes hajlott szeglet; — és igy lehetne igy is:

$$r : S.\angle B = \text{Cos. } EB : \text{Cos.} \angle F$$

mellyben előforduló tagokat egymásból ki lehet keresni, p. o.

a) Adatván az F $\angle$, és EF oldal a' B $\angle$-t igy:

$$r : S \angle F = \text{Cos. } EF : \text{Cos.} \angle B.$$

b) Adatván EF oldal és B $\angle$: kikeresem az F $\angle$-t igy:

$$\text{Cos. } EF : \text{Cos.} \angle B = r : S \angle F.$$

c) Adatván a' B $\angle$ és EB oldal: az F $\angle$-t igy:

$$r : S \angle B = \text{Cos. } EB : \text{Cos.} \angle F.$$

d) Adatván F $\angle$ és EB oldal: a' B $\angle$-t igy:

$$\text{Cos. } EB : \text{Cos.} \angle F = r : S \angle B.$$

e) Adatván a' két hajlott szegletek F és B: akármelyik mellék-oldalt kikeresem igy:

$$S \angle F : r = \text{Cos.} \angle B : \text{Cos. } EF.$$

$$S \angle B : r = \text{Cos.} \angle F : \text{Cos. } EB.$$

§. 18. Negyedik alap egyenszer formálása.

Az első Állitmányunkban (§. 11.) midőn az EDC és BAC Karélyos $\triangle$-ek oldalaiknak Félhúrjai által formált egyenes $\triangle$-ekben egyenszert formáltunk: két oldalnak u. m. a' DC-nek és AC-nek Fél-hurjai kimaradtak. Most már vegyük hasznokat ezeknek is olly móddal, hogy az ED Karélynak huzzunk érintőjét $=$ LD, 's áll elő itt ismét egy merő $\angle$ű egyenes $\triangle =$ LGD. — A' BKH $\triangle$-et pedig gondoljuk kijjebb jönni egyközűleg, úgy hogy a' K pont essék az A-ra, a' H a' Z re — 's ekkor a' BA Karélynak is húzzunk érintőjét $=$ MA, — 's itt is elő áll ismét egy merő szegletű egyenes $\triangle =$ MAZ. És ezen két $\triangle$-ek ismét hasonlók, mivel az előbbiekkel most egyközü vonalakat húztunk. Áll tehát ezekben illyen egyenszer:

$$DG : AZ = DL : AM.$$

az az: $r : S. AC = T. ED : T. AB$

vagy; $r : S. AC = T. \angle C : T. AB.$

's imé ez lessz a' negyedik alap egyenszer, melly tehát általánosan igy van:

$$r : S. \text{ Cath} = T \angle \text{adj.} : T. \text{ Cath. oppos.}$$

Ebben előfordulnak 1) egyik mellék-oldal; 2) a' mellette lévő szeglet; 3) az ezzel általellenes mellék-oldal; — mellyek közzül akármelyiket a' másik kettőből ki lehet keresni, p. o.

a) Adatván AC oldal és C<: az AB oldalt igy:

$$r : S.AC = T\!<\!C : T.AB$$

b) Adatván AB oldal és B<: az AC oldalt igy:

$$r : S.AB = T\!<\!B : T.AC$$

c) Adatván AB és AC, a' B<-t igy:

$$S.AB : r = T.AC : T\!<\!B$$

d) Adatván AB és AC: a' C<-t igy:

$$S.AC : r = T.AB : T\!<\!C$$

(több példákat csinálјanak a' Tanúlók).

§. 19. Ötödik alap egyenszer formálása.

Ha ismét pótlékokkal élünk, és a' negyedik alap egyenszert EFB △-re alkalmazzuk, mivel az AC-nek pótlékja az AD, — ez pedig az F<-nek mértéke, tehát igy lessz:

$$r : \left(\begin{matrix}S.\,AC\\ Cos.\!<\!F\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}T.\!<\!C\\ Cot.\,EF\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}T.\,AB\\ Cot.\,BF\end{matrix}\right)$$

's imé elő áll az 5-dik alap egyenszer igy:

$$r : Cos.\!<\!obl = Cot.\ Cath.\ adjac. : Cot.\ Hypot.$$

mellyben előfordúlnak 1) egyik hajlott szeglet; 2) a' mellette eső mellék oldal; 3) feszes oldal. És igy mondhatom igy is: $r : Cos. < B = Cot. EB : Cot. BF.$

(az előforduló tagok kikeresésére csinálјanak egyenszereket a' Tanulók).

Jegyzék. Minél nagyobb az Érintő: annál kissebb a' Pót-érintő, ('s igy a' több Szegvonalak is), és igy két Karélynak Érintői azoknak Pótérintőinek viszás szerében vannak, p. o.

$$Cot.\ EB : Cot.\ BF = T.\ BF : T.\ EB.$$

És igy ezen alap egyenszer igy is lehetne:

$$r : Cos. < B = T.\ BF : T.\ EB.$$

§. 20. Hatodik alap egyenszer formálása.

Ha az 5-dik alap egyenszert a' Cde △-re alkalmazzuk: ott igy lessz:

$$r : Cos. \angle d = Cot. de : Cot. Cd.$$

Már éljünk pótlékokkal. T. i. a' d$\angle$ mértéke $=$ Af, ez pedig $=$ BF (mert a' BA mindeniket Körnegyedre pótolja). — A' de-nek pótlékja $=$ ef, ez pedig a' B$\angle$ mértéke; — és igy a' mi a' de-nek Pót-érintője, az a' B$\angle$-nek Érintője. Végre Cd $=$ DA, $=$ az F$\angle$ mértéke: és igy pótlékokat tévén lessz:

$$: r \begin{pmatrix} Cos. \angle d \\ Cos. BF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cot. de \\ T. \angle B \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} Cot. Cd \\ Cot. \angle F \end{pmatrix}$$

's elő áll a' 6-dik alap egyenszer igy:

$$r : Cos. Hypot. = T. \angle obl. : Cot. \angle alter. obl.$$

mellyben elő fordúl a' feszes oldal, és a' két hajlott szegletek; — 's azok közzül akármelyiket, kettő kiadatván, ki lehet keresni.

HARMADIK CZIKKELY.

A' Hajlott szegletű Karélyos $\triangle$-ök kifejtése.

§. 21. **Álitmány.** A' hajlott $\angle$-ű Karélyos $\triangle$-ekben is igaz az, a' mi még eddig minden $\triangle$-ekről igaz volt, hogy a' $\angle$-ek' Fél-hurjai az általellenes oldalok Fél-húrjaival egyenszeresek. (kép 130).

Megmutatás. Az abc $\triangle$ a' bd függönnyel két merő $\angle$-ű $\triangle$-re felosztatván, ezekben illyen egyenszerek állanak:

$$d : ab = a : bd$$
$$d : bc = c : bd$$

ezeket Egyenletbe tévén lessz:

$$d \times bd = c \times bc$$
$$d \times bd = a \times ab$$

's innen: $c \times bc = a \times ab$

Ezen Egyenletből pedig Egyenszert csinálván, lessz:

$$c : ab = a : bc$$

az az: $S \angle c : S. ab = S \angle a : S. bc.$

E' szerént az általellenes $<$-eket és oldalokat egymásból ki lehet fejteni. — P. o. Adatván két oldalok ab és bc, és az egyikkel általellenes $<$a : a' c$<$-t kikeresem igy:

$$S.\,bc : S.\,ab = S<a : S<c$$

§. 22. **Feladat.** Adatván az a$<$ és a' melette lévő oldalok ab és ac, kikeresni a' 3-ik oldalt.

Megfejtés. 1) bd függönnyel oszszuk fel a' $\triangle$-et két merő $<$-ü $\triangle$-re.

2) Keressük ki a' bd függönyt az első alap egyenszeren

$$r : S.\,ab = S<a : S.\,bd$$

3) Keressük ki az ad oldalt a' második alap egyenszeren igy: $Cos.\,bd : Cos.\,ab = r : Cos.\,ad$

4) Már a' bdc $\triangle$-ben esmerjük a' bd-t és dc-t (mert $dc = ac - ad$) kikeressük a' bc feszes oldalt a' második alap egyenszeren:

$$r : Cos.\,bd = Cos.\,dc : Cos.\,bc.$$

a' $<$-ket pedig mind kikereshetjük az első alap egyenszeren, p. o. $S.\,bc : r = S.\,bd : S<c$'s a' t.

§. 23. **Adatván két szeglet b és c, és a' köztök eső cb oldal: kikeresni a' többbi oldalokat és szegleteket.**

Megfejtés. 1) Ismét bd függönnyel merő $<$-ű $\triangle$-ket formalunk.

2) Kikeressük a' bd függönyt az első alap egyenszeren:

$$r : S.\,bc = S<c : S.\,bd$$

3) Kikeressük a' dc oldalt is a' második alap egyenszeren:

$$Cos.\,bc : Cos.\,bd = r : Cos.\,dc$$

4) Kikeressük a' b$<$-t az első alap egyenszeren:

$$S.\,bc : r = S.\,dc : S<b$$

5) Ekkor az abc $\triangle$-ben mivel esmerjük a' b$<$-tet, (t. i. abc — dbc) és a' bd oldalt: kikeressük az ad oldalt a' negyedik alap egyenszeren:

$$r : S.\,bd = T<b : T.\,ad. \text{ —}$$

Az ab oldalt pedig akár az első, akár a' második alapegyenszeren, szinte az a $<$-t akár az elsőn, akár a' negyediken.

Szembetünőbb hibák igazitása Első Részben.

Lapon	Sorban Felül	Sorban Alól	Hiba.	Igazitás.
6	—	8-7	mérésnek - - - -	mérendőnek
8	—	7	Tételt - - - - - -	Tétel
13	3	—	ki annyi - - - - - -	ki : annyi
15	11		's a' t. az egész oszloprendje hibás	

Milliosok	Ezresek	Egyszeresek
EzerBilliosok	Billiosok	Ezer Millios.

Lapon	Sorban Felül	Sorban Alól	Hiba.	Igazitás.
17	22	—	mellé - - - - - -	alá
21	4	—	kereset - - - - -	keresett.
25	—	6	császári - - - - - -	császár-
29	—	2	$a \times b$ - - - - - - -	$a + b$
30	6	—	$3a + b + c$ - - -	$3a + b + c$
35	—	5	$\times 10 a^{2n-5}$'s a' t. - -	$+ 10 a^{2n-5}$'s a' t.
41	—	17	$\frac{4}{3}$ - - - - - - -	$\frac{4}{5}$
42	—	7	— 8 - - - - - -	2
43	7	—	Számláló jut - - -	Számlálójút.
46	—	16	$\frac{2}{8}\frac{4}{7}\frac{1}{3}$ - - - - -	$\frac{2}{2}\frac{4}{7}\frac{1}{2}$
47	13	—	$\frac{8}{9}$, $\frac{90}{133}$ - - - -	$\frac{8}{9} = \frac{90}{133}$
—	—	6	— $\frac{137}{60}$ - - - -	$\frac{133}{60}$
—	—	3	— 60 | 137 | $= 2 + \frac{17}{60}$	60 | 133 | $= 2 + \frac{13}{60}$
48	2	—	$\frac{14}{30}$ - - - - - -	$\frac{8}{30}$
—	3	—	— $\frac{29}{30}$ helyett három izben	$\frac{23}{30}$
—	—	—	$\frac{9}{30}$ - - - - - - -	$\frac{3}{30}$
—	—	—	$\frac{169}{30}$ - - - - -	$\frac{163}{30}$
—	4	—	$\frac{9}{30}$ - - - - - - -	$\frac{3}{30}$
49	—	7	105 - - - - - - -	10.
51	—	8	Jegyben - - - - - -	Rendben.
—	—	7	egynél - - - - - -	az előtte valónál
—	—	—	és igy tized-részt - -	és igy az egyes oszlop után tizedrészt.
53	10	—	egyet $\frac{3}{4}$ből - - - -	egyet ; — igy $\frac{3}{4}$ből
56	—	6	— 45 - - - - - -	25
57	—	15	— 378 - - - - -	318
58	—	9	— $\frac{2}{5}$ - - - - - -	$\frac{2}{3}$
61	—	13	$(e + 2f + ab^2$ - -	$(e + 2f + ab)^2$

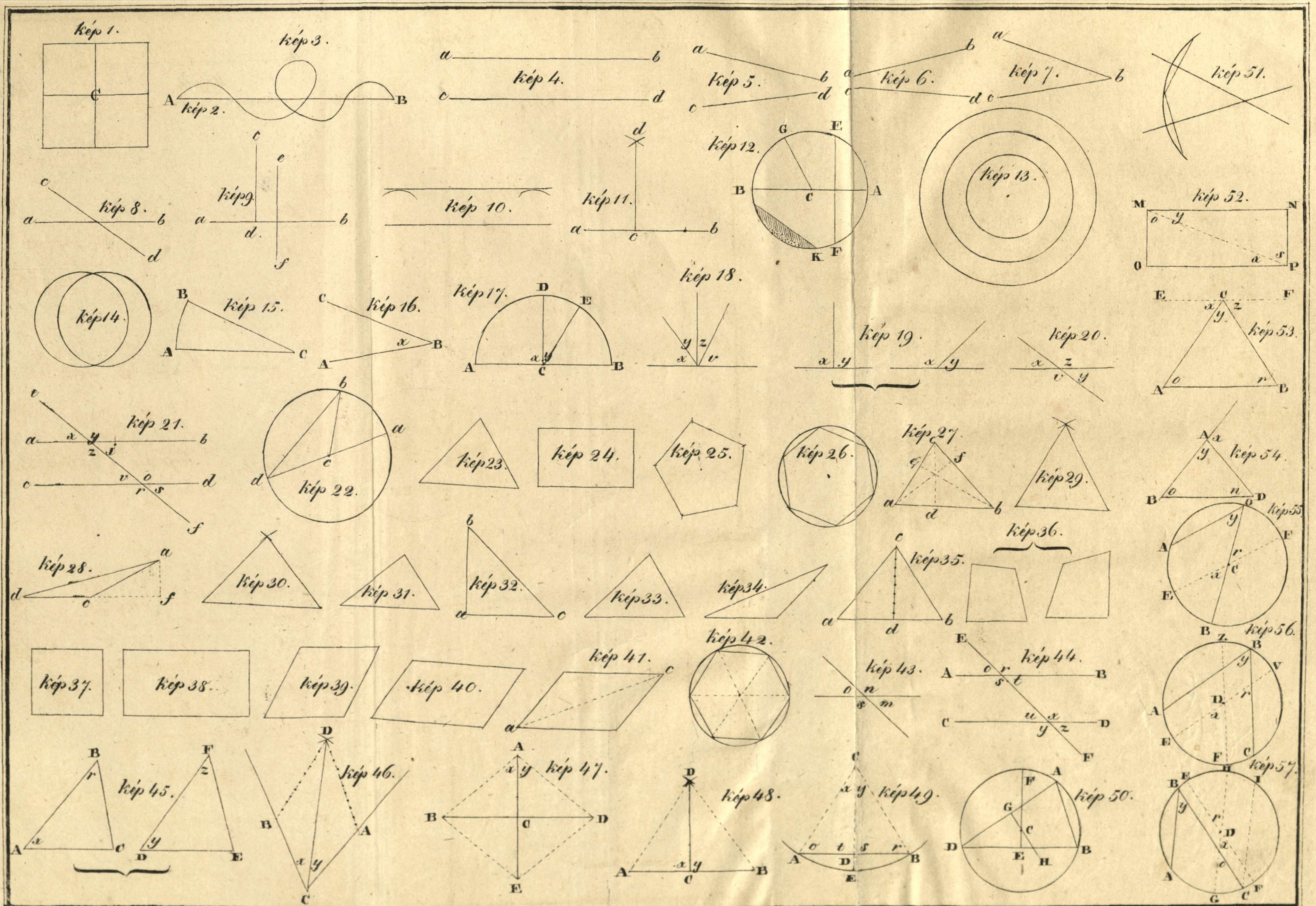
Lapon	Sorban Felül	Sorban Alól	Hiba.	Igazitás.
61	—	12	$2ef + f^2 + \dots + 2fab$	$4ef + 4f^2 \dots + 4fab$
62	9	—	$\frac{1}{3}a^4 b + {}_{1}{}^{5}{}_{4}{}^{4}{}_{2}\, b^2 a^2$	$+ a^4 b + \frac{5}{4}\frac{4}{8} b^2 a^2.$
—	16	—	$3y^2 z\, 3b^2 a$	$3y^2 z.$ — És : $3b^2 a$
65	—	11	1^2 | 96	12 | 96.
67	18	—	$\sqrt{}.15$ | 00 | 00 .. és || $\sqrt{}.19$ | 45 | 00 | 00 | 00	igy $\sqrt{15}$, | °° | °°, és $\sqrt{19}$ | 45, | °° | °° | °°.
70	2	—	$\underbrace{21}_{a}\frac{2}{6}$	$\underbrace{212}_{a.\,b.}$
—	14	—	303	203
72	—	10	$\frac{c\,d}{a}$	$\frac{c - d}{a.}$
74	15	—	ax	$+ ax.$
77	5	—	Feladat két	Feladat. — Két
—	—	12	Feladat a'	Feladat. — A'
78	1	—	$6\,x$	$6x$
—	16	—	$10\,x$	$10x.$
79	10	—	fejtésére	fejezésére.
80	16	—	ba	6a.
82	1	—	$x\,\frac{x}{17}$	$x : \frac{x}{17.}$
83	—	18	$20\,x$	$20;\ x$
84	5	—	hét	két.
85	6	—	248	284
86	6	—	Tizet	Fizet.
—	8	—	$\frac{12\,x}{100}$	$\frac{12\,x}{100}$
87	2	—	5 mind a' három izben	s.
—	6	—	esmeretlenűl	esmeretlenű
—	17	—	$\frac{a}{3} - 5y$	$\frac{a - 5y}{3}$
87	19	—	$\frac{b}{10} + 2y$	$\frac{b + 2y}{10}$
—	—	2	$b\left(\frac{a + y}{3}\right) - 3y = 6$	$6\left(\frac{a + y}{3}\right) - 3y = b.$
88	11	—	$-4x$	$\pm 4x.$
—	18	—	26	2b
—	21	—	$6\,x$	$6\,y$
—	22	—	$-b$	$\pm b.$

Lapon	Felül	Alól	Hiba.	Igazitás.
	Sorban			
90	18	—	o x y - - - - -	$o \times y$
91	—	14	rangozók - - - -	rangozott.
92	1	—	$\frac{2ax}{2x}$ - - - - - - -	2 a x
—	—	4	$225 + - 125$ - - -	$225 = - 125$
93	11	—	$\frac{a}{2x} - 4$ - - - - -	$\frac{a}{2x-4}$
—	—	3	hanem - - - - -	ha nem
94	6	—	hét - - - - - -	két
95	—	3	$y = 20 - y - z$ - -	$x = 20 - y - z$.
96	—	1	4 er - - - - - - -	4-et.
97	—	15	8 : 10 - - - - - -	8 — 10
99	—	3	$ab - ab$ - - - -	$b - b$
100	2	—	$ab : abq$ - - - -	$b : bq$.
—	3	—	$ab : \frac{ab}{q}$ - - - - -	$b : \frac{b}{q}$.
—	—	7	a b - - - - - - -	b.
101	2	—	1. ki kell törülni.	
—	10	—	a b - - - - - - -	b.
—	—	5	akármely Egyenleté -	akármely Egyenletet
102	—	13	$a \times ab$ - - - - -	$a \times b$.
—	—	9, 7	Egyenlő Szerek - -	Egyen-szerek.
103	1	—	b - - - - - - -	6.
—	10	—	$3 + 6 : 3$ - - - -	$3 + 6 : 6$
—	—	1	vagy hátúl ejtve 's a' t.	ezen egész sort ki kell törülni.
104	1	—	$5 - 7 = x - 10$ - -	ki kell törülni.
—	4	—	$x : 6$ - - - - - -	$x : 16$
—	7	—	Középszert - - - -	Középszerest.
107	4	—	4500 - - - - - -	4500 = Summa.
—	10	—	Cbligationis - - -	Alligationis.
108	—	5	25 - - - - - - -	2 S.
109	4	—	tagjával - - - - - -	rangjával.
—	—	16	Szer - - add hozzá	Summájának.
110	11	—	$a - S + uq - Sq$ - -	$a = S + uq - Sq$.
—	—	10	$S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1}$ -	$S = \frac{(aq^{n-1} \times q) - a}{q-1}$

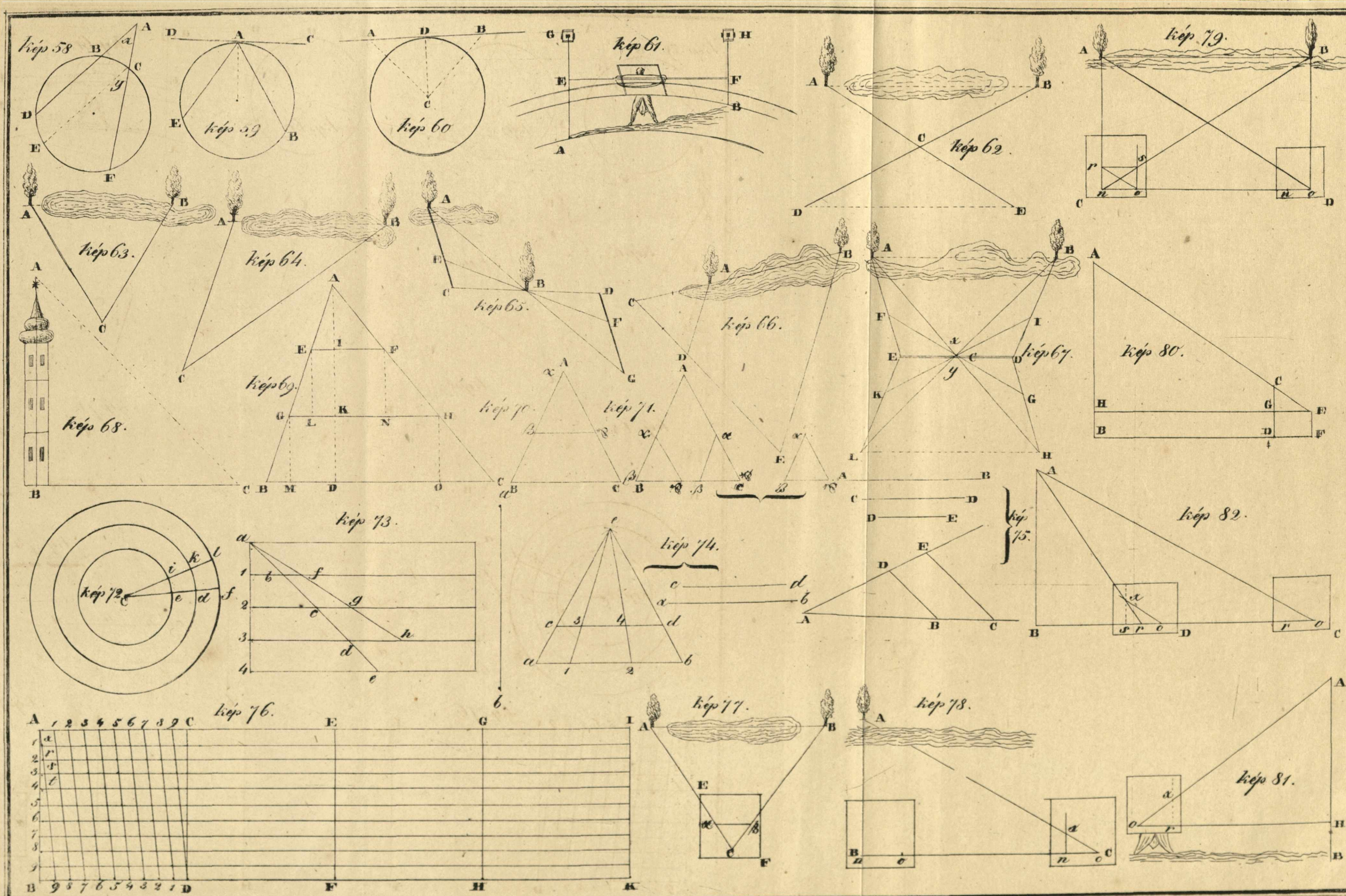
Lapon	Sorban Felűl	Sorban Alúl	Hiba.	Igazitás.
110	—	5	$S=\frac{aq^{n-1}\times q-a}{q-1}$	$S=\frac{(aq^{n-1}\times q)-a}{q-1}$
—	—	1	$S=2\times3^5\times3-2$	$S=\frac{(2\times3^5\times3)-2}{2}$
112	—	5	mintha	mert ha
113	—	20	1 és 100	1 és 10.
115	1	—	és a' 20-ét	és a' 2-jét.
—	—	15	$15=5^2$	$15=5\times3$
—	—	7	Több	Főbb
116	3, és 4	—	a' 324-nek és 26-nak Logarithmusait öszve kell adni, 's lessz $=3,9255183$, — azután jön ez: ennek a' Logarithmusnak 's a' t.	

Második Részben.

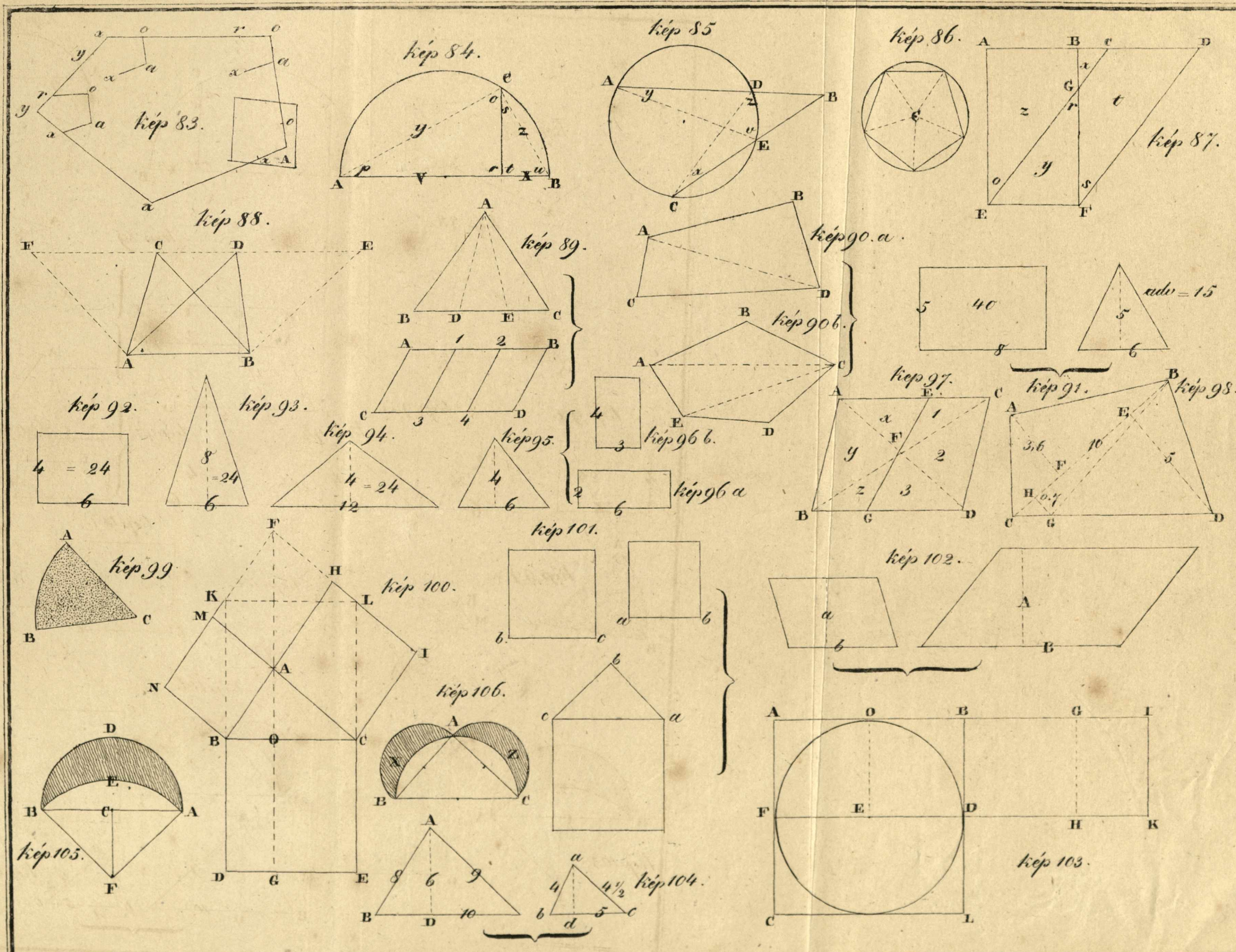
16	—	19	x = x	x = y.
19	20	—	száraival	szárával.
31	2	—	$\frac{8}{10}$	$\frac{5}{10}$
32	12	—	kis mérték	kis mértékben
36	21, 23	—	§. 61	§. 62.
44	—	15	C	c
55	—	15	ötszegűre	öt háromszegűre
56	17	—	feljebb	leljebb §. 104.
70	—	1	élhnrja	Félhurja
71	—	17	kár	akár
75	—	9	má	már.



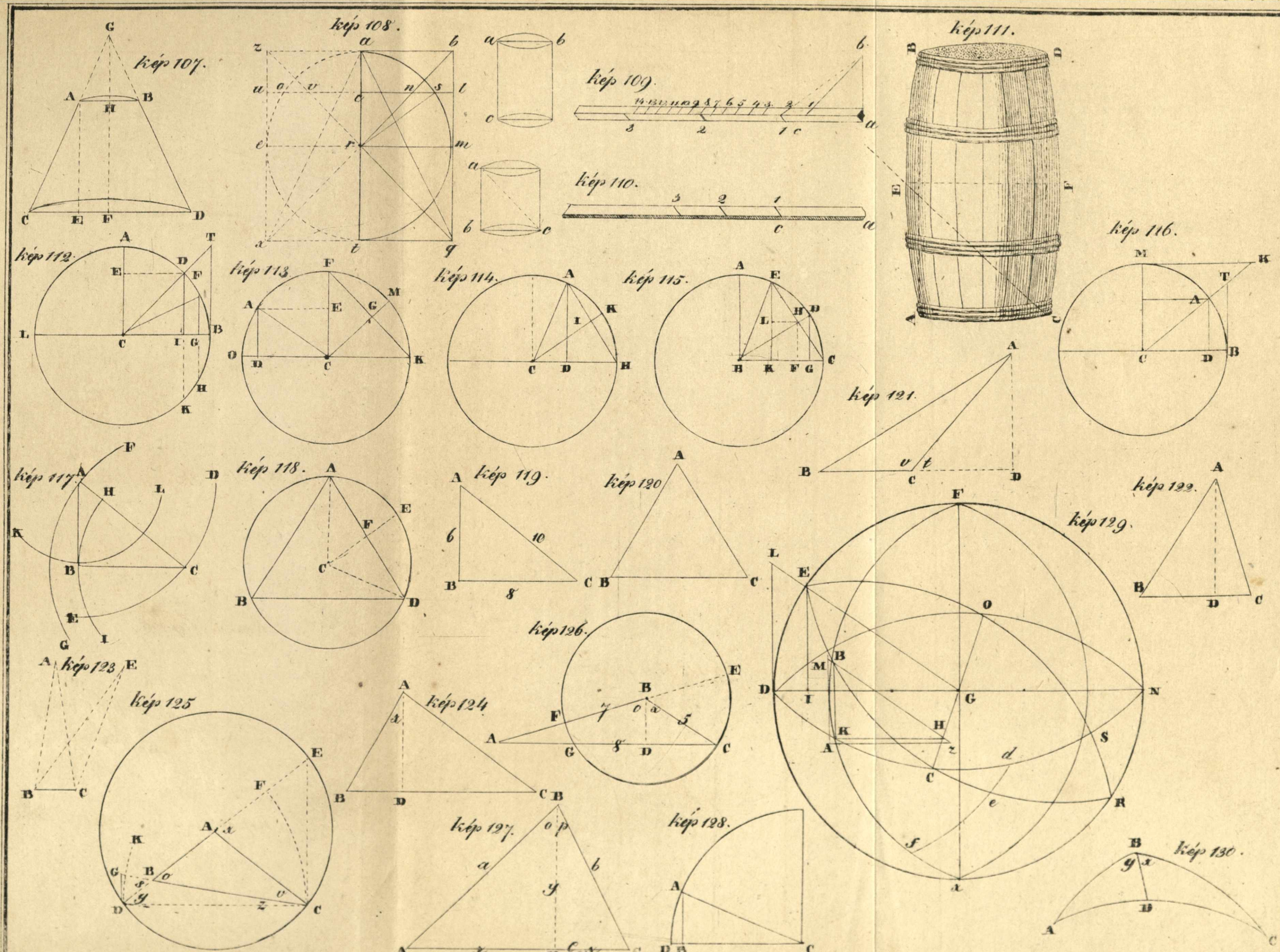
Metszé 's nyomtatta Höschl J.



Metszé 's nyomtatta Höscht J.



Metszé 's nyomtatta Höschl J.



Mészé's nyomtatta Höschl J.