92
1902

2748

Katona József Könyvtár
Kecskemét
D51000299878

ELEMI MÉRTAN.

MÁSODIK RÉSZ

TÉRTAN.

ÍRTA

TATAI ANDRÁS

A' KECSKEMÉTI REF. FŐISKOLÁBAN MÉR- ÉS TERMÉSZETTAN' NY. R. PROFESSORA.

(Hét idomtáblákkal.)

PESTEN.

NYOMATOTT LANDERER ÉS HECKENASTNÁL.

1844.

KECSKEMÉTI
LAPOS
Könyvtára

SZILÁDY

Előszó.

„Elemi mértanom“ második részében a' *tértant*, *háromszögtant*, és *kúpszelettant* együtt adni vala szándékom; 's hogy ezek' megjelenése az első rész után két évig halada, leginkább ez szülé. Azonban nyomtatás közben jöttem azon gondolatra, hogy ezen egy részből kettőt csináljak, — miszerint imez előbb megjelent második rész csupán a' *tértant*, — a' már sajtó alatt levő, 's minélelőbb megjelenendő harmadik rész pedig a' *háromszög-* és *kúpszelettant* foglalja magában; melly különválasztás a' könyv' könnyebben szerezhetése' tekintetéből is czélszerűnek látszik.

Kútfejeim valának, a' magyar mértani munkákon kivül: Vega (*Vorlesungen über die Mathematik*), — Littrow (*Anfangsgründe der gesammten Mathematik*), — Lacroix (*Élémens de*

Géométrie),—Cirodde *(Leçons de géométrie)*,— 's a' tér- és háromszögtanban főként: *Cours de mathématiques a l'usage de la marine, Tome second*, — *Géométrie et Trigonométrie*, par M. J. N. Nicollet; — a' kúpszelettanban pedig: *Elementar-Unterricht in der reinen und angewandten Mathematik* 'sat. von S. Sachs.

Mivel a' legnagyobb gond mellett is benmaradható sajtóhibák, ha ki nem javíthatók, a' mértani könyvet szinte használhatlanná teszik: ne ütközzék meg az olvasó abban, hogy itt a' *javítandóknak* jó nagy számát találja, mert én nagy gonddal kivántam minden — főként értelemzavaró — hibákat kijegyezni, — vajha egy se kerülte légyen el figyelmemet; — 's ezeknek elöleges kijavítására mindenkit, ki e' munkát használni kivánja, bizodalommal kérek.

Kecskemét, Aug. 26-dikán 1844.

SZERZŐ.

Előismeretek.

1. §.

Ha a' *mennyik* körül nem csak a' részek' sokaságát tekintjük — mint a' *számtanban* —; hanem egyszersmind a *tért* is, mellyet azon részek együttvéve elfoglalnak, még pedig azon térnek mind *nagyságát*, mind *idomát*, melly utóbbi a' részek' egymásiránti helyzetétől föltételeztetik: ezen tekintetben nevezzük a' mennyiket *folytonosoknak*, 's a' tiszta mértan' azon részét, melly ezekről tanit, *tértan*-nak (geometria).

A' folytonos mennyiket, mint érzékeink alá eső anyagokat, *testek*nek, — mint az anyagtól különválva képzelt üres, határozott nagyságú 's idomu téreket, *ürtestek*nek, vagy *tömegek*nek, — 's ezeknek térfoglalatát *terjedet*nek nevezzük. Az *ürtest'* vagy *tömeg' terjedete* a' *tiszta tértan*nak tárgya.

2. §.

A' tömeg' terjedetének 3 fő iránya van: *hosszuság*, *szélesség*, *vastagság* (vagy mélység, vagy magasság).— *Hosszuság*nak nevezetik a' tömegnek valamerre irányzott egyszerü terjedete; *szélesség*nek a' hosszuságot keresztül metszö irányú terjedet; *vastagság*nak a' két előbbit együtt véve keresztül metszö irányú terjedet. —

Az egyszerü terjedet, mellyben csupán a' hosszuság tekintetik, minden szélesség és vastagság nélkül, neveztetik *vonal*nak (linea). — A' vonal' kezdete és végzete, vagy többek' választéka neveztetik *pont*nak (punctum), — melly tehát terjedet nélküli, 's igy részekre sem osztható. — A' vonal, mint véges és határozott terjedet, két pontoknak egymástóli távolsága.

A' hosszuság és szélesség együtt képezik a' *terület*' (superficies) fogalmát. A' terület tehát olly összetett terjedet, mellyben van hosszuság és szélesség, — de vastagság nincs; vagy ollyan terjedet, mellyben a' hosszuság szélességgel is bir. A' terület, mint véges és határozott terjedet, vonalak által határoztatik; 's nem egyéb, mint vonalak által minden felöl bezárt tér.

A' hosszuság, szélesség és vastagság együtt képezik a' *tömeg*' fogalmát. A' tömeg tehát ollyan terjedet, mellyben a' hosszuság és szélesség, vagyis a' terület, vastagsággal vagy magassággal is bir. — A' tömeg, mint véges és határozott terjedet, területek által határoztatik, — 's nem egyéb, mint területek által mindenfelöl bezárt tér. —

Jegyzék. A' terjedet származását igy képzelhetni:

a) Ha a' pont elindúl, 's nyomokat hagy maga után: ott származik *vonal*.

b) Ha a' vonal egy másik keresztbe fekvő vonalnak minden pontjára önmaga mellé fektetik: ott származik terület.

c) Ha a' terület egy keresztbe fekvő vonalnak minden pontjára önmaga mellé fektetik: ott származik tömeg.

Ezen származtatás ugyan mértanilag helytelen: de a' kezdő felfogásán segithet.

3. §.

Mivel minden test körül, e' három közül valamelyik lehet mérés' tárgya, t. i. vagy annak egyszerü ter-

jedete, vagyis *vonala*,— vagy *területe*,— vagy *tömege*: innen természetesen ered a' tértannak ezen 3 szakasza: 1) *Vonaltan* (euthymetria); 2) *Területtan* (epipedometria); 3) *Tömegtan* (stereometria). —

Azonban mivel — mint alább bővebben látandjuk — a' vonal vagy egyenes, vagy görbe, — 's a' görbék közt legegyszerübb a' kör' körülete; mint szintén a' terület is vagy egyenes (melly *sík*nak nevezletik) vagy görbe; és a' tömegek is illy kétféle területekkel záratnak be: az elemi tértannak tárgyai csak az egyenes vonalok, 's a' görbék közül nem több, mint a' körkörület; továbbá az egyenes vonalak és a' körkörület által bezárt síkterületek; — végre az illynemü síkterületekkel bezárt, vagy ezekből származni képzelt tömegek; — a' többi görbe vonalak, területek 's tömegek a' felsöbb mértan' tárgyai.

Jegyzék. 1. Némelly mértanárok a' tértant két szakaszra t. i. *síktan*ra és *tömegtan*ra osztják, — a' síktanban advân elö a' vonalak' és területek' törvényeit. És ezt azon okból teszik, mivel mind az egyenes vonalak' viszonyai, mind a' görbék, általuk bezárt területeket feltételeznek. Azonban ámbár ez igaz: de mivel a' bezárt területek' keritését, azoknak udvarától elkülönitve vizsgálni nem csak könnyü, de természetes is: innen a' szokott 3 szakaszra osztást helytelennek nem tarthatjuk.

Jegyzék. 2. A' *tiszta tértan* (geometria pura) a' terjedetek' törvényeit tisztán, elvonva, nem alkalmazva fejtegeti; az *alkalmazott tértan* (geometria practica) pedig azokat földmérésre *alkalmazza*. Mi hellyel hellyel a' tiszta igazságokon kivül, azoknak alkalmazásából is némelly könnyebb feladatokat megemlitünk, azért hogy a' tanulónak azokról is némi fogalma legyen.

§. 4.

Tértani alaptételek.

Azon alaptételeken kivül, mellyeket a' mértan' elsö

részében — a' számtanban 8. §. — látánk: jegyezzük meg itt e' következőket:

1) Két pont között egyenes vonalat mindig lehet húzni, — legalább gondolattal.

2) Két terjedetek, — akár egy, akár kettő, akár három irányuak, — egyenlők akkor, ha egymásra tétetvén egymást teljesen elfedik, vagy minden megfelelő részeikben összeillenek.

3) Adjuk ezekhez még ezt: igaznak kell elismernünk minden ollyan tételt, mellyet nem lehet tagadni a' nélkül, hogy képtelenséget ne állitnánk.

ELSŐ SZAKASZ.

Vonaltan.

ELSŐ CZIKKELY.

A' vonalakról.

5. §.

*Vonal*nak neveztetik két pont közti térnek hossza. Id. 1. 2. A' vonal vagy *egyenes* (linea recta), vagy *görbe* (linea curva). — *Egyenes* vonal az, melly kezdetétől végeig minden elhajlás nélkül ugyanazon egy irányt tart. Irányát két pontok tüzik ki, mellyek ha végpontok, a' vonal' hosszát is meghatározzák. Az egyenes vonalat két végpontjaira tett betükkel szoktuk kimondani. p. o. ab. —

Görbe vonal az, melly kezdetétől végeig szüntelen változtatja irányát, és igy mellynek legkisebb része sem egyenes. (Idom. 2.) Egyik ponttól a' másikig húzható akárhány vonalak között legrövidebb az egyenes vonal. Innen az egyenes vonalat illetőleg következő tételek állanak:

1) Két pont között különböző egyenes vonalak nem eshetnek. Mert az egyenes vonalak csak hosszaságukra nézve különböznek egymástól; hosszaságukat pedig két pont meghatározza: és igy ezen tekintetben sincs helye különbségnek.

2) Két pont közt csak egy egyenes vonal fekhetik; mert ha többet képzelünk: azok egymással összeesnek;

mivel sem egyik sem másik semmi felé sem tér el ugyanazon közös iránytól.

3) Több különböző hosszaságu egyenes vonalak is, ha két közös pontjok van, egymáson feküsznek.

4) Innen két pont, bár minő hosszu egyenes vonal' irányának kitüzésére elegendő.

5) Két nem egymáson fekvő egyenesen vonal csupán egy pontban vághatja egymást keresztül, — vagy csupán egy közös ponttal birhat; — mert ha többel birna, úgy egymáson fekünnék.

6) Két egyenes vonal tért be nem zárhat; mert arra nézve két pontban kellene egymást vágniok, vagy érintniök. — Már pedig ezek csak egy pontban vághatják egymást.

7) Az akár egymás mellett fekvő, akár egy közös pontban egymást vágó egyenes vonalakból eredni képzelhető terület, — vagyis az ollyan terület, mellyre bármelly irányban egyenes vonalat úgy lehet húzni, hogy annak minden pontja a' területet érintse, nevezteték síknak.

6. §.

id. 3. Mivel az egyenes vonal két pont közt legrövidebb út: innen ha az AB egyenes vonalra (id. 3.) az azon kivül eső C pontból két egyenes vonal CA és CB húzatik: lesz

$$AC + CB > AB.$$

És ha az ACB bezárt térben belöl eső D pontból az AB-re ismét két egyenes vonal DA és DB húzatik: lesz

$$AC + CB > AD + DB$$

Mert megnyujtatván a' BD, mig összeér az AC-vel az E-ig: lesznek

$$AD < AE + ED$$

$$\text{és } BE < EC + CB;$$

ezen két egyenetlenséget tagonként összeadván:

$$AD + BE < AE + EC + ED + CB,$$

vagy $AD + BE < AC + ED + CB$,

vagy $AD + ED + BD < AC + ED + CB$;

és az ED mindenik részből kihagyatván:

$$AD + DB < AC + CB.$$

7. §.

Hogy az ismeretlen vonal' vagy hossz' mennyiségét megtudhassuk: bizonyos ismert hosszasághoz kell azt szabni, vagy azzal összehasonlítani, mellyet *mérték*nek nevezünk. Alapmérték sok nemzeteknél a' *láb*, mellynek meghatározott hossza különböző nemzeteknél különböző, p. o. a' bécsi lábnál, mellyel mi mérünk, hosszabb a' párisi láb, illy viszonyban: 1: 1,028. — Ha 6 lábat összeteszünk, lesz egy öl. — A' láb elosztatik 12 egyenlő részekre vagyis *hüvelykek*re; — a' hüvelyk ismét 12 *vonalak*ra; — a' vonal ismét 12 pontokra. Az öl' jegye (⁰), lábé (′), hüvelyké (″), vonalé (‴), ponté (⁗). Illyen hossz-mértékkel élünk a' közéletben, mellyet *tizenkettedesnek* nevezhetünk; a' mérnökök pedig néha ugyanezzel,—néha könnyebb számitás' okáért *tizedes* mértékkel élnek, miszerint az ölet felosztják 10 egyenlő részre, — ebből egy részt ismét 10-re, 's igy tovább, — azért hogy az alárendelt részeket mindig tizedes törtekkel fejezhessék ki. — Néha pedig 10 lábat tesznek össze, 's ezt nevezik *rúdnak*, vagy *láncznak*, vagy *mérőpóznának* (pertica, decempeda)

melly hasonlólag a' tizedes törtek szerint osztatik apróbb részekre.

8. §.

Id. 4—11. Két egyenes vonalnak egymás iránti fekvése 5 féle lehet, u. m.

1) *Egyenközü*, vagy *egyközü*, vagy *párhuzamos* vonalak (lineae parallelae) azok, mellyek mindenütt egyenlő távolsággal mennek egymás mellett, ésigy bár meddig nyuljanak, soha össze nem érnek. (id. 4.)

2) *Összetartók* (convergentes) azok, mellyek minél tovább nyulnak, annál inkább közelednek egymáshoz (id. 5.); *széttartók* (divergentes) azok, mellyek minél tovább nyulnak, annál inkább távolodnak egymástól. (id. 6.)

3) *Összeérők* (concurrentes), mellyek egy pontban összemennek (id. 7.)

4) *Szelők* (secantes), mellyek egy pontban egymást vágják (id. 8.)

5) *Függőlegesek* (perpendiculares) vagy *szabdaszeresek* (normales) vagy *függönyök* (perpendicula) azok, mellyek közül egyik a' másikon kölcsönösen merően, azaz úgy áll, vagy azt úgy metszi, hogy egyik oldalra sem dül inkább, mint a' másikra p. o. (id. 9.) az *fe* vonal a' *bc*-re, és viszont a' *bc* az *fe*-re függőleges, mert folytatván segédvonallal mind a' *bc*-t, mind az *fc*-t, sem az *fc* nem dül akár a' *b*, akár a' *g* felé, sem a' *bc* akár a' *t* akár a' *h* felé; igy az *ac*-hez a' *db*, 's a' *db*-hez képpest az *ac* függőleges; igy az *ac* és *de* vonalak egymást függőlegesen metszik; igy (id. 10.) a' *pg* és *or* vonalak egymáshoz kölcsönösen függőlegesek. A' függőlegeseknek ellenébe tételnek a' *hajlottak*, vagy

dültek (obliquae, inclinatae), mellyek közül egyik a' másikon úgy áll, hogy egy vagy más oldalra inkább dül (id. 11.)

Sajátlag csak az ollyan vonalat lehetne *függőlegesnek* nevezni, mellynek állását a' szabadon függő testnek, p. ónyolyónak a' föld felé, 's ha gondolattal folytatjuk, a' föld' középpontja felé tartó iránya mutatja, 's mellynek irányán esnek le a' leejtett testek. Ezen vonal egy oldalra sem dülöleg, vagy szabdaszeresen, vagy merően áll azon vonalra, mellynek irányát a' csendesen álló viz' felszine mutatja, — melly vonal *vízirányos*nak, vagy *látlagos*nak (horizontalis) neveztetik. — Azonban bármelly állásban is a' *vízirányhoz*, ha két vonalak egymáshoz a' leirt módon merően állanak, *függőlegesek*nek szokás azokat nevezni; bár általában helyesebb volna *szabdaszeresek*nek (vagy talán *merőlegesek*nek) nevezni.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' körről.

9. §.

Ha síkterületen valamelly egyenes vonal, p. AC (id. 12.) mozdulatlan C pontja körül mindaddig fordulni képzeltetik, mig előbbi állására visszamegy: leír *A* végpontjával egy magába visszatérő görbe vonalat ABDEFA, mellynek minden pontjai, A, B, D, F, 'sat. a' középen eső C ponttól egyenlő távolságra vannak. — Az ezen görbe vonal által bezárt síktér neveztetik *körnek* (circulus); a' C pont *középpont*nak (centrum); — az ABDEFA görbe vonal *körület*nek (peripheria); — a' *körület*nek bármelly kisebb-nagyobb része p. o. AB, AD, 'sat. *körív*nek (arcus); — bármelly körív' végpontjait összekötő egyenes vonal p. NM *húr*nak (chorda, subtensa); — a' legnagyobb húr vagyis azon egyenes vonal, melly a' körület' egy pontjától annak

Ill. 12.

általellenes pontjára a' középponton keresztül húzathatik p. AE, BF, *átmérő*nek (diameter); — ennek fele, vagy minden egyenes vonal, melly a' középponttól a' körületig nyúlik, p. CA, CE, CF, *sugár*nak (radius); — a' húr és körív közt eső tér p. EGFHE *szelet*nek (segmentum); — azon tér pedig, mellyet két sugár és a' köztök eső körív zár be p. ECFE *gerézd*nek (sector) neveztetik. —

A' kört tehát igy határozhatni meg: *a' kör egy önmagába visszatérő, 's a' középponttól mindenütt egyenlő távolságra eső görbe vonal által bezárt tér.*

Egyközepü körök (circuli concentrici) azok, mellyek ugyanazon középpontból húzatnak, — 's mivel ezeknek körületeik egyközüleg feküsznek, neveztetnek *egyközü* köröknek is (paralleli); — *másközepüek* (excentrici) azok, mellyek külön középpontokból húzatnak.

10. §.

Id. 12. *Következetek:*

1) Ugyanazon körben minden sugárok egymással egyenlők: mert a' körület a' középponttól mindenütt egyenlő távolságra van. —

2) Hasonlóul minden átmérők is egymással egyenlők: mert az átmérő nem egyéb, mint a' sugárnak kettőzete; — ha a' felek egyenlők, — az egészek is egyenlők.

3) Ha két vagy több köröknek sugárai egyenlők: azoknak körületeik 's körterületeik is egyenlők. — mivel ha középpontjaik egymásra tétetnének, ezen körök egymást elfednék; és igy ezeknek ugyanannyid részeik is, p. feleik, harmadaik 'sat. egyenlők.

4) Ugyanazon körben egyenlő húrok, egyenlő köríveket metszenek. Mert legyen p. o. húr EF = EH;

's képzeljük az EH szeletet az EF szeletre úgy tétetni rá, hogy az E pont az F-re, a' H—az E-re essék: ekkor elfedik egymást a' húrok, mivel egyenlök, — de elfedik a' körívek is, mivel végpontjaik összeesnek, a' többi pontjai pedig mindkettönek mind egyenlö távolságra vannak a' középponttól; — következöleg ezen két körívek egyenlök. —

5) Minden átmérö a' körületet, és a' körterületet két egyenlö részre osztja. Mert képzeljük p. o. hogy a' BDHF körív a' BF átmérö körül megfordulván, az FNAB körívre borulna: ezen körívet amaz egészen elfedné, mivel végpontjaik is együvé esnek a' B- és F-nél, — a' többi pontjaik is, a' középponttól mind egyenlö távolságra vannak. — Innen látnivaló, hogy az átmérö mellett kétfelöl esö körszeletek is egymást fedik, 's így egyenlök; — és az átmérö a' kört két egyenlö részre, t. i. két *félkörre* osztja.

6) Innen bármelly egyenes vonal felett, vagy alatt, vagy mellett, ha rajta kör' középpontja esik, félkör állhat, mert úgy nézhetjük az egyenes vonalat, mint kör' átméröjét.

11. §.

Minden akár kisebb akár nagyobb körnek körülete, egyezmény szerint 360 egyenlö részekre osztatik, melly részek *fok*-oknak (gradus) neveztetnek. Minden fok ismét felosztatik 60 *elsö perczre* (minutum primum); — minden elsö percz 60 *másodperczre* (minutum secundum); — minden másodpercz 60 *harmadperczre* 'sat. Jegye a' foknak (°), elsö percznek (′) másod percznek (″) harmadnak (‴) 'sat. p. o. 25° 40′ 12″ 32‴ 25 fok, 40 elsö-, 12 másod-, 32 harmadpercz. — A' fran-

czia mértanárok szokták a' körületet 400- 's így a' körnegyedet 100 fokra,—minden fokot 100 első perczre 'sat. felosztani; — de ezen osztály nincs ma divatban. — A' körív' nagyságának fokok általi meghatározása annak igazi hosszát nem mutatja, — hanem csak azon körívnek az ő egész körületéhez viszonyát, p. o. 30 foknyi körív tesz valamelly körületnek, kisebbnek nagyobbnak $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ részét. —

Ezen felosztás szerint a' körület' fele vagy félkör = 180^0; — negyede, vagy körnegyed (quadrans) = $90.^0$ —

HARMADIK CZIKKELY.

A' szögletekről.

12. §.

Id. 13. Egy központban összemenő két vonalnak *ac* és *bc*, (id, 13.) egymástól eltávozása, vagy egymáshoz hajlása által képzelt nyílás neveztetik *szögletnek*, vagy *szögnek* (angulus) — a' szögletet képző két vonalok neveztetnek a' szöglet' *szárainak* (crura), — azon pont pedig *c*, hol ezek egymással összejönek, a' szöglet' *csúcsának* (vertex anguli). A' szöglet vagy három betüvel mondatik ki, úgy hogy a' csúcsnál eső betü mindig középre essék, p. o. acb, vagy bca; — vagy pedig egy a' csúcsnál akár kivül, akár belöl írott betüvel, p. o. x vagy c, — 's rövidség végett ezen jegygyel (<) mutatjuk, p. o. < acb = acb szöglet. Vagy < x, < c. A' szöglet' származását úgy képzelhetni, mintha a' bc vonal előbb az ac-n feküdt volna, — azután a' c véginél megnyomatván a' b végivel felemelkednék 's az ab

körívet irná le. Minél tovább távoznék a' bc az ac-től; annál nagyobb mind a' körív, mind a' szöglet. — A' szöglet' nagysága tehát nem függ a' szárak' hosszától, hanem a' szárak egymástóli kisebb nagyobb távozásától, vagyis azon körív' nagyságától, melly a' szárak közt esik, ha t. i. a' szöglet' csúcsában esik középpontja azon körnek, mellynek ezen körív egy része. Innen a' szöglet' nagyságát épen ezen körívvel mérjük, úgy hogy a' hány foknyi ezen körív, annyi foknyinak mondjuk a' szögletet is; — 's a' szögletet ezen körívvel néha fel is cseréljük. Azonban a' csúcsból mint középpontból akárhol húzassanak körívek a' szöglet' szárai közé p. o. ab, a'b', a''b'', a^3b^3, a^4b^4, mindegy; — mindenik mértéke a' szögletnek, mert a' bc szárnak ugyanazon emelkedésével, csakhogy külön távolságú pontjainál származtak, — 's igy mindenik egyenlő fokú, vagy mindenik a' maga egészének ugyanannyid része.

13. §.

Egyenlő szögletek tehát azok, mellyeknek nyilása id. 14. egymást elfedi—bármint különbözzék is száraik' hossza. Több egyenlő szögleteknél, ha csúcsaikból, mint középpontból egyenlő sugárral mindenikben körív íratik: ezen körívek nemcsak fokaik' számára, de igazi nagyságukra nézve is egyenlők, — mert egymásra tétetvén, egymást fednék; — ésigy ezen köríveknek hurjaik is egyenlők (lásd 10§. 3. 4.). Innen valamelly kiadott szöglettel ACB (id. 14.) egyenlő szögletet így lehet csinálni: a' kiadott szöglet' C csúcsából, annak szárai közé tetszés szerinti sugárral p. CA körív AEB, és annak húrja AB huzatik; továbbá az adott egyenes vonal' c pontjából ca = CA sugárral határozatlan nagyságu körív ka-

nyarittatik, 's az *a* pontból az AB-vel egyenlő húr *ab* felállittatik; — végre az így talált b pontból a' c-hez egyenes vonal húzatik: 's most $< acb = < ACB$, mert, mérő köríveik egyenlők, $aeb = AEB$, mivel ezeknek húrjaik egyenlők, $ab = AB$.

Ugyanezt véghez lehet vinni, — valamint bárminő nagyságu szögletet lehet irni, — 's bármelly szöglet' nagyságát megmérni azon műszer' segitségével, mellyet *szögmérő*nek (transportatorium) neveznek, — melly egy, rendszerint érczből készült, 180 fokra — 's néha fél — vagy negyed fokra is osztott félkör, melly egy széles keresztlemez által foglaltatik össze.

14. §.

Id. 15. 16. Ha az AB egyenes vonalra (id. 15.) CD függöny állittatik: e' mellett kétfelől egyenlő szögletek képeztetnek, $< x = < y$, mert a' függöny egyik oldalra sem dül. És mivel egyenes vonal felett félkör $= 180^0$ állhat: tehát ezen szögletek közül mindegyiknek mértéke 90^0 vagy környegyed. Az illyen szöglet neveztetik *egyenes*-, vagy *derék*-, vagy *merőszög*letnek (angulus rectus). — Egyenes szöglet tehát az, mellynek mértéke 90 foknyi körív, 's mellynek szárai egymásra függőlegesek vagy szabdaszeresek (normales); miből ismét látnivaló, hogy az egyenes szögletet képező vonalak egymásra mindenkor függőlegesek; és az egyenes szögletek egymással mind egyenlők. Az egyenes szögletnél nagyobb vagy kisebb szögletek közös névvel neveztetnek *ferdék*nek (ang. obliqui); a' nagyobb p. (id. 16.) ACD *tompá*nak (obtusus) — a' kisebb p. DCB *hegyes*nek (acutus.)

15. §.

Id. 16. Valamelly egyenes vonalon egymás mellett fekvő

szögletek p. o. (id. 16.) az AB vonalon fekvő $\angle$ ACD és $\angle$ DCB valamint az ED vonalon $\angle$ ACE és $\angle$ DCB neveztetnek egymáshoz képest *mellékszögleteknek* (anguli contigui). Ezek egymást félkörre $= 180^0$ra egészitik, mivel egyenes vonalon félkör állhat, 's igy mindnyájok' mértéke összesen = félkör: innen ezek *egészitő* szögleteknek is (ang. suplementales) neveztetnek. — Ha két mellékszögletek egyenlők: úgy mindenik egyenes, vagy 90 foknyi, mert $\frac{180}{2} = 90$; ha nem egyenlők: úgy egyik tompa, másik hegyes. — Ha közülök egyik kiadatik: úgy a' másik is tudva van, — p. o. ha egyik $= 50^0$, úgy a' másik $= 130^0$; ha egyik $= 70^0$, úgy a' másik $= 110^0$ 'sat.

16. §.

Két egymást metsző vonalak által képeztetett 4 szögletek közül kettő kettő csúcscsal áll egymás ellenében: ezek neveztetnek *csúcsszögleteknek* (anguli verticales) p. o. (id. 16.) $\angle$ ACE és $\angle$ DCB, valamint $\angle$ ACD és $\angle$ ECB is egymáshoz képest csúcsszögletek. Id. 16.

A' csúcsszögletek egymással egyenlők. Mert nyilván való, hogy ha két mennyiség közül mindegyiket egy harmadik egyenlő nagyságra egészíti ki: azon két mennyiségek egyenlők. Már pedig $\angle$ DCB-t $\angle$ DCA kiegészíti 180^0ra, mert az AB vonalon mellékszögletek; úgyde $\angle$ ACE-t is $\angle$ DCA 180^0ra egészíti ki, mert az ED vonalon mellékszögletek: ésigy $\angle$ DCB $=$ $\angle$ ACE. Vagy

$$\angle \text{DCB} + \angle \text{DCA} = 180^0$$

$$\text{és } \angle \text{ECA} + \angle \text{DCA} = 180^0:$$

a' mik egy harmadikkal (itt a' 180^0-kal) egyenlők: azok egymással is egyenlők, ésigy

$< DCB + < DCA = < ECA + DCA$;
egyenlőkből egyenlőket (< DCA-t.) kihagyván
$< DCB = < ECA$.
Épen igy mutathatni meg, hogy $< ECB = < ACD$.

Innen ha egymást metsző kétvonalak által képzett 4 szögletek közül egy kiadatik: az által a' többi is mind kiadatik. p. o. ha $< DCB = 50^0$: úgy $< ACE$ is $= 50^0$;
$< DCA$ pedig $= 130^0$, $< ECB$ is $= 130^0$.
És ha ezen szögletek közül egy egyenes, a' többi 3 is mind egyenes.

Ha egy pontban kettőnél több vonalak metszik egymást: az azok által képzett szögletek összesen tesznek 4 egyenest, vagy 360 fokot.

17. §.

Id. 17. Minden szögletek közt legtökéletesebb az egyenes; a' honnan az gyakran egység gyanánt vétetik, 's más szögletek, akár nagyobbak ennél, akár kisebbek, ehhez képest hiányosoknak tekintetnek; a' hegyes szöglet igenlegesen, — a' tompa pedig nemlegesen hiányos. Azon szöglet, melly egy másiknak akár igenleges, akár nemleges hiányát az egyenesre kipótolja, neveztetik *pótszögletnek* (angulus complementalis), vagyis mivel az illyenek mindketten kölcsönösen kipótolják egymást egyenesre, kölcsönösen egymáshoz képest, neveztetnek pótszögleteknek; igenleges pótlékok tehát azok, mellyeknek összege — nemleges pótlékok pedig azok, mellyeknek különbsége tesz egy egyenest p. o. (id. 17.) $< ACE$ és ECD, egymáshoz képest igenleges pótlékok; de $< ECB$ és DCB egymáshoz képest nemleges pótlékok; — a' 60^0 a' 30^0nak, — 's viszont a' 30^0 a' 60^0nak

igenleges, — igy 30° a' 120°-nak, és 120° a' 30-nak nemleges pótlékai.

Innen látnivaló, hogy két mellékszögletnek ugyanazon pótléka van, — csak hogy az a' hegyesre nézve igenleges, — a' tompára nézve nemleges.

NEGYEDIK CZIKKELY.

A' függőleges és hajlott vonalakról.

18. §.

Mi előtt tovább mennénk, a' függőleges és hajlott vonalakról tegyünk itt némelly jegyzéseket, mellyek a' következőknek alapul szolgálnak:

I.) *Valamelly egyenes vonalra, valamelly kiadott pontból csak egy függönyt lehet húzni.* Itt két eset van:

a) Ha az adott pont az egyenes vonalon van p. o. id. 17. 18. (id. 17) a' C pont, erre több függönyt húzni nem lehet, csak a' CD-t. Mert tegyük fel p. hogy a' CE is függöny volna; mivel minden függöny egyenes szögletet képez, az egyenes szögletek pedig egymással mind egyenlők: tehát ebből az következnék, hogy szöglet ECB=DCB; ez pedig nem igaz.

b) Ha az adott pont az egyenes vonalon kivül esik, — p. o. (id. 18.) az AB vonalra, az O pontból nem lehet több függönyt húzni egynél; mert tegyük fel, hogy az OC és OD is függönyök volnának, ha az OCD téridomot az AB oldal körül megfordulni képzeljük, úgy hogy az OCD feküdjék az O'CD-re: ekkor szöglet OCD+O'CD-nek két egyenes szögletet vagy 180 fokot kellene tennie, mert minden függöny külön egy egyenes szögletet képez. Úgyde igy az OCO' vonalnak egyenesnek kel-

lene lennie, mert az mellett állhat 180°-nyi körív. Ez pedig képtelen, mert az O és O′ pontok közt csak egy egyenes vonal lehet, t. i. az OO′.

Id. 19. II.) Ha valamelly egyenes vonalra (id. 19.) AB, egy azon kivül eső pontból O, húzatik függöny OC, és dült vonalak OD, OE 's a' t. *1) a' függöny mindnyájok közt legrövidebb. 2) a' függönytől egyenlő távolságra eső dültek egyenlők. 3) a' függönytől legtávolabb eső dült leghosszabb.*

Ha az OEDC téridom az AB körül megfordulni képzeltetik, úgy hogy az O′EDC-re feküdjék: lesz OC=O′C, OD=O′D, OE=O′E, és az OCO′ vonal egyenes. Ezek igy lévén:

1) (l. 6. §) OCO′<ODO′, és OCO′<OEO′: ésigy a' felek is kisebbek: OC<OD, OC<OE.

2) Ha CD = CD′, lesz OD = OD′. Mert az ODC téridomot megforditván az OC körül; a' DC elfedi a' CD′-t: és igy az OD is elfedi az OD-t; azaz OD = OD′.

3) A' 6. §. szerint ODO<OEO′: és igy OD<OE.

Következet. 1) Valamelly pontról egy vonalra húzható függöny azon pontnak ezen vonaltóli távolságát mutatja; és ezen távolságot nem egyéb mutathatja, mint függöny.

2) Valamelly vonalra egy kivül eső pontról két egyenlő vonalnál többet húzni nem lehet.

Id. 20. III) Ha (id. 20.) az AB vonalnak épen közepére CD függöny húzatik: *1) minden pontja a' függönynek p. o. E, egyenlő távolságra lesz az AB vonalnak szélső, A és B pontjaitól. 2) Minden a' függönyön kivül eső pont p. F, különböző távolságra lesz ugyanazon szélső pontoktól.*

Ugyanis. 1) Ha az E ponttól húzatnak az EA és EB

vonalak: valamint AC=CB: úgy az AE=EB, mint imént II-ik sz. alatt látánk.

2) FB<FA, mert FB<BE+EF; vagy BE helyett AE-t tevén: FB<AE+EF, azaz: FB<AF.

Innen egyenesen foly, hogy ha egy egyenes vonalnak két szélső pontjaitól egy kivül eső pont egyenlő távolságra van: 1) azon pontból a' vonal' közepére csak függönyt lehet húzni. 2) azon pontból az adott vonalra húzható függöny ezen vonalat két egyenlő részre osztja.

ÖTÖDIK CZIKKELY.

Az idomokról általában, 's különösen a' háromszögről.

19. §.

A' síkterület valamelly részének mindenfelöli bezárására legalább is 3 vonal szükséges. A' mindenfelöl bezárt síkterületet, ha bezáró vonalait, 's azok által képzett szögleteit tekintjük, nevezzük *síkidomnak*. A' bezáró vonalak külön külön *oldalok*nak, összesen véve *kerület*nek (perimeter) a' bezárt terület pedig *udvar*nak (area) neveztetik. Id. 21.—28

A' hány oldal, annyi szöglet van bármelly síkidomban. Már vagy az oldaloktól, vagy a' szögletektől — azoknak számukhoz képest — vétetnek a' külön fajta idomok' nevei. Jelesen: *háromszög* ha három, — *négyszög* ha négy, — *ötszög* ha öt oldalvonalak által záratik. Általában pedig a' síkidom neveztetik *sokszög*nek (polygonum). Ide tartozik a' kör is, mint végetlen sok oldalu sokszög. Mind ezek közt legegyszerübb a' háromszög, mellyről e' helyen szükség valamit elölegesen tanulnunk; mielött

mind ugyanezekről bővebben, — mind a' többi sokszögekről különösen tanulnánk.

Ha a' háromszögnek mind a' 3 oldala egyenlő: *egyen oldalu*nak (aequilaterum); — (id. 21.) — ha csak két oldala egyenlő: *egyenszáru*nak (aequicrurum, v. isosceles); — (id. 22.) — ha minden oldala különböző: *külön oldalu*nak (scalenum) — (id. 23.) nevezteti. — Szögleteire nézve: ha van benne egy egyenes szöglet: *egyenes szögü*nek (triangulum rectangulum), — (id. 24.) — ha van egy tompa szöglet: *tompaszögletü*nek (obtusangulum), — (id. 25.), — ha minden szögletei hegyesek: *hegyes szögletü*nek (acutangulum), — (id. 26.) nevezteti. — Különösen az egyenes szögü háromszögben az egyenes szögletet képező két oldalok AB és BC *mellékoldalok*nak (cathetus), — a' harmadik t. i. az egyenes szöglettel általellenes AC pedig *feszes-oldal*nak (hypotenusa) neveztetik.

A' háromszög' oldalai közül egyet, akármellyiket, nevezhetni *talp*nak (basis); az azzal általellenes szöglet *tető* (vertex) lesz, — a' többi két oldalok *szárak* (crura). A' △' magosságát mutatja a' tetőből a' talpra ereszteti függöny, melly tehát a' felvett talphoz képest különböző, — 's néha csak segédvonallal folytatott talpra húzathatik; p. o. (id. 27.) ha talpnak tesszük *ab*-t, úgy magasság = ed, ha talp a' *cb:* magasság = ae; ha talp az *ac:* magasság = bf; — (id. 28.) ha talp a' *cb:* ennek folytatására bocsátjuk az *a* tetőből a' magosságot mutató *ad* függönyt.

20. §.

Id. 2. A' háromszögnek hat része van: t. i. három oldal, és három szöglet. Ezen hat részek egymással olly viszony-

ban vannak, 's egymás' mekkoraságát kölcsönösen úgy feltételezik: hogy ha 3 közülök — bizonyos kikötésekkel 's feltételek alatt — kiadatik, a' többi 3 rész' mekkorasága természettel következik. Ezen viszonyok, 's azon feltételek, mellyek alatt 3 kiadott részből a' többi 3-nak mekkorasága folyik, ki fognak tünni, ha előadandjuk azon különböző eseteket, mellyekben két háromszög egymással egyenlő lehet. De mielőtt ezeket előadnánk, jegyezzük meg, hogy a' 6. §-bani tanitmányt ide alkalmazván:

1) Minden △-ben ABC (id. 3.) egy akármelly oldal AB kisebb mint a' másik kettő' összege.

2) Ha a' △' udvarában eső bármelly D pontról egy oldalnak AB két végire egyenes vonalak, AD, BD húzatnak: ezen két vonalak' összege kisebb mint a' ▱' másik két oldalának összege.

21. §.

Ha két háromszögnek ABC és A'B'C' (id. 29) két Id. 29.
oldalai egyenlők, AC=A'C', és BC=B'C'; de az ezek közt eső szögletek nem egyenlők, C> C': akkor ezen nem egyenlő szögletekkel általellenes harmadik oldalak sem egyenlők, még pedig a' nagyobb C-vel általellenes AB, nagyobb, mint a' kisebb C'-vel általellenes A'B' oldal.

Tegyük rá az A'B'C' háromszöget az ABC-re, úgy hogy az A'C' az AC-re essék; mivel C' <C, tehát a' B'C' a' BC-vel össze nem esik, hanem elszegülve megy, 's az A'B'C' háromszög' hegyi vagy bele esik a' másik △-be a' b-nél, — vagy az AB oldalra a' b'-nél, — vagy kivül azon a' b''-nél.

Első esetben: $Ab + bC < AB + BC$,
vagy: $A'B' + B'C' < AB + BC$,
és mivel: $B'C' = BC$, ezt kihagyván,
lesz: $A'B' < AB$.

Második esetben: látnivaló hogy $A'B'$ vagy $Ab' < AB$.

Harmadik esetben: Ab' vagy $A'B' < AB$,
mert: $Ab'' < Ab' + b'\,b''$
$BC < Bb' + b'\,C$
összeadván: $Ab'' + BC < Ab' + Bb' + b'\,b'' + b'C$
vagy: $A'B' + BC < AB + B'C'$
és mivel: $BC = B'C'$, ezt kihagyván:
lesz: $A'B' < AB$.

22. §.

Id. 30. *Két háromszögek ABC és A'B'C' (id. 30.) egyenlők, ha egyiknek három oldala, másiknak három megfelelő oldalával egyenlő.*

Mivel $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$: szükségkép' az egyenlő oldalokkal általellenes szögletek is egyenlők, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Mert ha ez igy nem volna, p o. ha A nagyobb, vagy kisebb volna, mint A': úgy az előbbi állitmány szerint az általellenes BC oldal is nagyobb, vagy kisebb volna, mint $B'C'$; pedig azt tevénk fel, hogy azok egyenlők: ésigy $A = A'$. — Épen igy a' többi szögletek is. Már ha egyik $\triangle$-nek hat alkotó részei, a' másiknak hat részeivel egyenlők: úgy egyik a' másikra tétetvén, egymást elfedik, ésigy *egyenlők.*

23. §.

Id. 20. *Két háromszögek ABC, és A'B'C', (id 30) egyenlők, ha egyikben egy szöglet, 's az azt képző két oldalok,*

a' másikban egy szöglettel, 's az azt képző két oldalokkal megfelelőleg egyenlők.

Legyen szöglet A=A', AB=A'B', AC A'C': ha ezen három részek egyenlők, úgy egyenlők a' három hátra levők is, t. i. BC=B'C', szöglet C=C', B=B'. Mert tegyük rá az A'B'C' háromszöget az ABC-re, hogy p. o. az A'B' az AB-re essék: mivel az A' és A szögletek egyenlők, az A'C' épen az AC-re fog esni; és mivel A'B'=AB, és A'C'=AC: tehát a' C' pont a' C-re, a' B' a' B-re fog esni, — ésigy a' B'C' a' BC-vel összeesik. Igy az egymásra eső △-ek minden részeikkel egymást elfedik: tehát *egyenlők.*

Követk. A' háromszög meg van határozva, ha két oldal, 's azok közt eső szöglet kiadatik.

24. §.

Két háromszögek ABC=A'B'C' (id. 30) egyenlők, Id. 30.
ha egyiknek egy oldala, 's az e' mellett eső két szögletek, a' másiknak egy oldalával, 's az e' mellett eső két szögletekkel megfelelőleg egyenlők.

Legyen AB=A'B', A=A', B=B': ha ezen 3 részek egyenlők, úgy egyenlők a 3 hátra lévők is, t. i. C=C', BC B'C', AC=A'C'. Mert tegyük rá az A'B'C' △-et az ABC-re, úgy hogy az A'B' az AB-re essék, mivel szöglet A'=A, az A'C' oldal épen az AC irányon nyúlik el, — és mivel a' B'=B, a' B'C' oldal épen a' BC irányon nyúlik, — 's igy az A'C', és B'C' oldalak metszéspontja, a' C', az AC és BC oldalak' metszéspontjával, a C-vel szükségkép összeesik; ésigy ezen két △-ek minden részeikkel összeesnek, — tehát *egyenlők.*

Követk. A' háromszög meg van határozva, ha egy oldal, 's két mellette eső szöglet kiadatik.

Követk. Két egyenlő △-ben az egyenlő oldalakkal általellenes szögletek egyenlők.

25. §.

Ld. 31. *Két egyenes-szögű △-ek egyenlők, ha feszes-oldalaik, és egy-egy mellékoldalaik megfelelőleg egyenlők.*

Legyenek szöglet A=A', (id. 31) mert egyenes szögek, BC=B'C', és AB=A'B'. Az A'B'C' háromszög rá tétetvén az ABC-re, úgy hogy A'B' az AB-re essék: ekkor az A'C' az AC irányán, 's azt fedezve emelkedik, és a' C pont a' C ponttal összeesik; mert ha össze nem esnék, úgy két egyenlő dült vonalak nem egyenlő távolságra esnének a' függönytől, — ez pedig képtelen (l. 1ᵉ. §. III.)

26. §.

Ld. 31. *Két egyenes-szögű △-ek egyenlők, ha feszes oldalaik, 's egy-egy hajlott szögleteik megfelelőleg egyenlők.*

Legyenek szöglet B=B' (id. 31.) és BC=B'C'. Az A'B'C' △ rátétetvén az ABC-re, úgy hogy a' B'C' a' BC-re essék: ekkor B'A' a' BA irányán nyúlik, — és az A' pont az A ponttal összeesik. Mert különben a' C'vel összeeső C pontból két függönyt lehetne ugyanazon AB vonalra ereszteni, — ez pedig képtelen. (l. 18. §. I.)

Jegyz. Valamelly vonalnak egy másik vonallal, vagy szögletnek másik szögletteli egyenlőségét, egyenlő △-ek' segitségével megmutathatni úgy, ha bele vesszük azokat külön külön egy-egy △-be; de úgy, hogy a' kérdéses vonalak, vagy szögletek egymásnak megfelelők legyenek; — és ha azon két △-nek egyenlőségét, az előadott módok közül valamellyiken, megtudjuk, mutatni: úgy a' kérdéses vonalak, vagy szögletek kétség kivül egyenlők.

27. §.

Minden egyenszárú △-ben az egyenlő oldalakkal általellenes szögletek, és viszont az egyenlő szögletekkel általellenes oldalak egyenlők. id. 32.

Legyen AC=BC (id. 32); eresszünk a' C tetőből az AB talpra CD függönyt, ez által az adott háromszög felosztatik két egyenes-szögű △-re, ACD, és BCD-re, mellyek egyenlők, mivel feszes-oldalaik, és egy-egy mellékoldalaik egyenlők, AC = BC, és CD közös oldal, maga magával egyenlő; — tehát A = B.

Viszont: a' melly △-ben két szögletek egyenlők A = B, abban az azokkal általellenes oldalak is egyenlők, ésigy azon △ egyenszárú. Mert csináljunk az ABC háromszöggel másik épen egyenlőt A'B'C', (id. 30.) mellyben tehát A'B' = AB, szöglet A' = A, B' = B, és mivel szöglet A = B, tehát A' = B, és B' = A. — Már látánk (24. §.) hogy az egyenlő △-ekben az egyenlő szögletekkel általellenes oldalak egyenlők: és-igy mivel

A' = A, tehát B'C' = BC — és mivel
A' = B, tehát B'C' = AC,
innen: BC = AC, és igy az
ABC háromszög egyenszárú.

Követk. 1) Az egyenoldalú △-nek mind a' három szögletei egyenlők.

2) A' melly háromszögnek minden szögletei egyenlők: az egyenoldalú.

3) Az egyenszáru △-ben, a' tetőről a' talpra eresztett függöny, mind a' talpat, mind a' tető-szögletet két egyenlő részre osztja.

4) Az egyenszárú △-ben a' talpat és tető-szögletet

egyszersmind két egyenlő részre osztó vonal függőleges.

5) Az egyenszárú △-ben, a' talpat két egyenlő részre osztó függőleges vonal a' tetőn megy keresztül.

6) Az egyenszárú △-ben húzható vonalnál tehát ezen három: 1) függőlegesség; 2) talp' két egyenlő részre osztása; 3) tető' két egyenlő részre osztása,— vagyis azon keresztül menés, mindig együtt jár; — 's ha akármellyik kettő ezek közül jelen van, a' harmadik el nem maradhat.

28. §.

Id. 33. *Ha a' △nek két oldalai nem egyenlők, a' nagyobb oldal nagyobb szögletnek van átellenében, és viszont.*

Legyen AE > BE (id. 33.): úgy szöglet ABE > BAE. Mert az AB közepéről függönyt DC eresztvén fel: a' hol ez az AE oldalt metszi, a' C pontról, húzván CB oldalt, lesz CA = CB (l. 18. §.) és szöglet ABC = BAC; úgyde szöglet ABE > ABC; és igy ABE > BAC, vagy BAE.

Viszont, ha szöglet ABE > BAE, úgy AE > BE. Mert különben vagy egyenlők volnának (AE = BE) vagy kisebb volna AE, mint BE (AE < BE). Az első esetben szöglet ABE egyenlő tartoznék lenni BAE-val (27.§.);— ez pedig épen a' feltétel ellen van; — a' második esetben szöglet ABE kisebb volna mint BAE; — mi ismét a' feltétel ellen van.

29. §.

Különféle háromszögek' rajzolása.

1) Adatván egy oldal: egyenoldalú △-et csinálni úgy lehet, ha az adott oldal a' czirkalom' szárai közé vétetvén, annak ollyan nyilásával az oldal' mindkét

szélső pontjától egymást keresztül metsző körívek húzatnak, 's a' metszés' pontjából, a' talp' szélső pontjaira a' két oldal lebocsáttatik.

2) Egyenszárú △-et is igy lehet csinálni, azon különbséggel, hogy itt a' czirkalom' bármelly nyílásával húzatnak az egymást metsző karélyok.

3) Különoldalú △-et, adatván mind a' három oldal, igy lehet csinálni: letévén egy oldalt talp gyanánt,— másik oldalt czirkalommal felfogván, a' talp' egyik végpontjából ezen nyilással köríν kanyarittatik; azután a' harmadik oldal is felfogatván czirkalommal, a' talp' másik végpontjából ezen nyilással kanyarittatik köríν, melly az előbbit metszi, 's ezen metszéspontból a' két szárak kihúzatnak.

4) Adatván két oldal, és a' közbe eső szöglet: ezen két oldal az adott szöglet' nyilásával, szögmérő' segitségével összetétetik; az ezeket összekötő 3-dik oldal önkényt következik.

5) Adatván egy oldal, és két mellette eső szöglet: az adott oldal talp gyanánt letételtvén, szögmérő' segitségével, az adott szögletek' nyilásával a' másik két oldal kihúzatik.

HATODIK CZIKKELY.

Az egyközü vonalakról, 's azok körülti szögletekről.

30. §.

Egyközü (parallela) vonalak azok (8. §.), mellyek Id. 33.
egymástól mindenütt egyenlő távolságot tartanak. Már

mivel valamelly vonal akármelly pontjának egy másik vonaltóli távolságát azon függöny mutatja meg, mellyet az egyik vonal' adott pontjáról, a' másik vonalra húzhatni: látni való, hogy mindazon függönyök (id. 33.) AC, GF, EH, BD, 'sat. mellyek az AB vonalnak bármelly pontjáról a' CD-re, vagy a' CD-nek bármelly pontjáról az AB-re húzatnak, egymással egyenlők.

31. §.

Id. 33. Midőn két egyközü vonalat AB, CD (id. 33.) egy egyenes vonal EF keresztül metsz: képeztetnek azon vonalak által 8 szögletek, mellyek közül: 1) *külsőknek* neveztetnek négyen, mellyek, az egyközü vonalakon kivül, — 2) *belsőknek* négyen, mellyek azokon belől, — 3) *külső visszásak*nak (alterni externi) kettő kettő, mellyek, az egyközükön kivül, a' metsző vonal' külön oldalán, egyik felül, másik alúl (p. o. szöglet p, és o.) — 4) *belső visszásaknak* (alterni interni) kettő kettő, mellyek az egyközükön belől, a' metsző vonal' külön oldalán, egyik felül, másik alúl esnek. p. o. szöglet r, és s; — szöglet m, és n.

Ezen szögletek' szabályai e' következők:

1) *A' belső visszásak egyenlők:* Ugyanis az EGF, és EFH egyenesszögü háromszögek (25. §. szerint) egyenlők, mert feszes-oldalaik, és egy egy mellékoldalaik egyenlők, t. i. EF feszesoldal egyenlő önmagával, — GF = EH, mert ugyanazon egyközük közt eső függönyök. Ésigy ezeknek minden megfelelő részeik egyenlők, tehát n = m.

Ugyde az *n*-et az *r*, az *m*-et az s kipótolja

180°-ra, 's ha $n = m$: tehát a' pótlékok is egyenlők, — $r = s$.

Már ha a' visszásak közül egyik, p. o. x egyenesszög (midőn BD metszi az AB és CD egyközü vonalakat): úgy a' másiknak *y* is, és a' pótlékoknak z és *v*-nek is, vagy mind a' négy belső visszásaknak egyeneseknek kell lenniek; következőleg a' BD, ha az AB-re függőleges, úgy a' CD-re is az, — vagy *minden egyenes vonal, ha az egyközüek közül egyre függőleges: úgy a' másikra, vagy többire is függőleges.*

És viszont, ha a' BD-re az AB függőleges, úgy a' CD is függőleges; 's ismét *ha egy vonalra két másik vonal függőleges, azok egymással egyközüek.*

2) *A' külső visszásak egyenlők,* $p = o$. Mert $p = n$ (csúcsszögletek), és $n = m$, — tehát $p = n$, — úgyde $o = m = n$, ésigy $p = o$.

3) *A' metsző vonalnak egy oldalán eső külső és belső szögletek egyenlők,* $p = m$, 'sat. Mert $p = n$ (csúcsszögek), — úgyde $m = n$, ésigy $p = m$.

4) *Az egy oldalon eső belső szögletek együtt tesznek 180°-t, vagy két egyenes-szögletet,* $m + r$, vagy $n + s = 180°$. Mert $n + r = 180°$, úgyde $n = m$, ésigy n helyett m-et tévén: $m + r = 180°$.

Mind ezen szabályok állanak akkor is, ha az egyenes vonal 3-, vagy több egyközüeket vág keresztül.

32. §.

Viszont ha két vonalak egy 3dik által olly móddal Id. 33. 34
metszetnek keresztül, hogy vagy 1) a' visszás szögletek egyenlők, vagy 2) az egy oldalon eső külső-belsők egyenlők, vagy 3) az egy oldalon eső belsők együtt 180°-t tesznek: akkor azon két vonalak kétség kivül

egyközüek. — És ezen pontok közül akármellyiket lehessen bebizonyítni: a' többiek önként folynak. P. o. ha az egy oldalon eső belsők együtt tesznek 180°-t, (id. 33.) $m+r=180^0$, mivel $n+r=180^0$ (mert mellékszögek), tehát $m+r=n+r$; innen $m=n$, azaz a' visszásak egyenlők.— Úgyde $n=p$, — ésigy $m=p$; azaz az egy oldalon eső külsö-belsők egyenlők. Ha tehát két vonalak' egyközüsége kérdéses: csak keresztvonalat húzván rájok, ezen pontok közül valamellyiket lehessen bebizonyítni, azoknak egyközüségök azonnal bizonyos lesz.

Azonban ha az AB, és CD vonalak (id. 34.) egyközüek levén, szöglet $n=m$;—az m-nél nagyobb, vagy kisebb szöglet, p. o. $m+x$ az n-el egyenlö nem lehet; ésígy a' G ponton keresztül más egyközüt a' CD-re az AB-n kivül húzni nem lehet. — *Tehát valamelly adott vonalhoz egy kiadott ponton keresztül csupán egy egyközüt lehet húzni.*

33. §.

Id. 35. *Két szögletek egyenlők, ha megfelelö oldalaik egymáshoz egyközüek*, p. szöglet $x=y$ (id. 35.) Mert az AC oldal megnyujtatván a' d-ig: $x=n$, mert csúcsszögletek, — $n=o$, mert visszásak, — $o=y$, mert külsö-belsök, — ésigy $x=y$.

34. §.

Id. 36. *Két szögletek egyenlők, ha egyiknek oldalai a' másiknak oldalaira visszásan függölegesek.* p. szöglet $x=y$ (id. 36.)

Mert kihúzván a' szöglet ACB oldalaival egyközü segédvonalakat, GF-et, és HI-t, mellyekre a' szöglet DEF szárai függölegesek: lesz

$x + t = x + v$, — mert mindenik $= 90^0$.
innen: $t = v$
továbbá $z + t = t + v$,
vagy $z + v = x + v$
innen $z = x$
úgyde $o = z$, mert külső-belsők
ésigy $o = x$,
úgyde $o = y$, mert külső-belsők,
ésigy $x = y$.

35. §.

Két egyközü vonalnak másik két egyközük közt eső részei egyenlők, IK = LM. (id. 37.) Id. 37.

Huzván a' KL segédvonalat, van itt két egyenlő △ ILK, és KLM, mivel egy oldal egy oldallal, és két mellette eső szögletek egyenlők, t. i. KL = KL, szöglet $o = < y$ — visszásak, — $< x = < z$, visszásak. Ésigy ezen háromszögeknek minden megfelelő részeik egyenlők: IK = LM, — valamint KM = IL.

36. §.

Bármelly △-nek 3 szögletei együtt tesznek 180^0-t vagy két egyenes-szöget. Id. 38. 39.

Mert bármelly △-nek ABC (id. 38.) *A* tetejénél lehet húzni a' talppal egyközü vonalat DE, 's származnak ott 3 szögletek, mellyek mivel mellék-szögletek, együtt tesznek 180^0-t, $x + y + z = 180^0$. Úgyde $x = o$, és $z = r$, mert visszásak, — és igy az *x* helyett *o*-t, a' *z* helyett *r*-et tévén: $y + o + r = 180^0$.

Következmények:

1) Akármelly szöglet a' △-ben a' többi kettőnek egészitője 180^0-ra — vagy ha 180^0-ból két szöglet'

összege kivonatik : különbség lesz a' 3dik szöglet. p. o. (id. 38.) $< A = 180^0 - (< B + < C)$.

2) Ha egy △-nek két szöglete, egy másik △-nek két szögletével egyenlő : a' 3dik a' 3dikkal kétség-kivül egyenlő.

3) A' háromszög' valamelly oldalának' AB (id. 39.) folytatása által kivül képzett szöglet x, egyenlő a' két talpra esökkel összesen, $z + o$. Mert az x is egészitője az y-nak 180^0-ra, a' $z + o$ is ; ésigy $x = z + o$.

4) A' △-ben egynél több egyenes-, annyival inkább tompa szöglet nem lehet.

5) Az egyenesszögü △-ben egyik hegyes szöglet a' másiknak pótléka 90^0-ra, — p. o. ha egyik 43^0, a' másik $90^0 - 43^0 = 47^0$.

6) Mivel az egyenoldalú △-nek mind a' három szögletei egyenlök, (27. §.) tehát egyik egyik 60^0-nyi.

7) A' melly △-nek két szöglete hatvan hatvan foknyi, annak 3dik szöglete is 60^0-nyi, — ésigy azon △ egyenoldalú.

8) Az egyenszárú △-ben mivel (27. §.) két szögletek egyenlök, kiadatván akármelly szöglet, a' többi kettö is tudva van.

9) A' melly △-nek két kiadott szögletei közül egyik épen felit teszi annak, mi a' másikat 180^0-ra egészíti : azon △ egyenszárú. p. o. $< a = 80^0$, itt marad még 100^0;—ha $< b = 50^0$: úgy $< C$ is $= 50^0$, 's igy a' △ egyenszárú.

10) Az egyenesszögü egyenszárú △-nek egyik egyik hegyes szöglete 45^0-nyi, 's viszont ha az illyen △-nek egyik szöglete 45^0-nyi, úgy az egyenszárú.

37. §.

Feladatok:

1) Valamelly adott vonalhoz AB egy adott ponton C, egyközű vonalat húzni. (id. 40.) Id. 40—42.

Megfejt. Az adott C pontból húzunk az AB-re CB-t, 's a' CD vonalat úgy húzzuk, hogy az x szöglet az y-al egyenlö legyen; így a' CD egyközű lesz az AB-vel, mert a' viszás szögletek egyenlök.

2) Az AB adott vonalnak (id. 41.) E adott pontjára függönyt húzni.

Megfejt. Az E ponttól két felöl egyenlö részt felvévén EC = ED, a' czirkalom' ugyanazon nyilásával, mind a' C, mind a' D pontokból az F-nél metszö körívek húzassanak: — az F metszéspontból az E-re húzható vonal FE, függöny lesz. Mert △ FDE = △ FEC, mivel 3 oldal 3 oldallal egyenlö; ésígy ∠ FED = ∠ FEC; úgyde ezek mellékszögletek, mellyek ha egyenlök, tehát egyenesszögek; illyeket pedig csak függöny csinál, — ésígy az EF vonal valósággal függöny.

3) Az AB vonalra (id. 41.) valamelly azon kivül eső G pontból függönyt húzni.

Megf. A' G pontból körív húzatik az AB-re, melly azt két ponton D, C, vágja. Ezen D és C pontokból a' czirkalom' bárminö nyilásával metszö körívek húzatnak az f-nél; már a' G-től az f-en keresztül az AB-re húzható vonal függöny lesz. Ugyanis △ CfG = △ DfG, mert 3 oldal 3 oldallal egyenlö; ésígy a' DfG szöglet a' CfG szöglettel egyenlö, — tehát azoknak egészitöik is egyenlök, t. i. x = y. Innen △ DfE = △ CfE, mert két oldal két oldallal, és a' közben eső szögletek egyenlök, t. i. Df = Cf, Ef = Ef, ∠ x = ∠ y. Ésígy ∠ o = ∠ r; úgy

de azok mellékszögletek, — ésígy ha egyenlők, egyenesszögek; illyeket pedig csak függöny csinálhat: tehát a' GE vonal valósággal függöny.

4) Valamelly egyenes vonalat DC (id. 41.) két egyenlő részre osztani.

Megf. Az adott vonal' két végpontjairól, a' czirkalom' ugyanazon nyilásával felül, 's ugyanazonnal alúl is metsző körívéket csinálván az F- és G-nél, ezen pontokat az FG vonallal összeköẗjük, 's a' hol ezen vonal a' DC-t metszi az E-nél, ott az két egyenlő részre van osztva, DE = CE. Mert △FDE = △FEC, mivel DF=FC, FE = FE, <z = < j, mivel ezek az FDG és FCG háromszögekben megfelelő szögletek; pedig azon △-ek egyenlők, mert 3 oldala egyiknek, 3 oldalával a' másiknak egyenlő. Ésigy △FDE = △FEC levén, DE=EC.

5) Valamelly szögletet két egyenlő részre osztani (id. 42)

Megf. Felfogván a' szöglet' mindkét szárán egyenlő részeket, CB = CA, 's mind az A, mind a' B pontból a' czirkalom' ugyanazon nyilásával metsző körívéket csinálván a' D-nél: ezen D pontból a' szöglet' csúcsába húzható DC vonal azt két egyenlő részre osztja, x=y.— Mert AD és BD segédvonalak húzatván: △DCA =△DBC, mivel 3 oldalaik egyenlők, ésígy x=y.

HETEDIK CZIKKELY.

A' sokszögekről általában, 's különösen a' négyszögek' külön fajairól.

38. §.

Id. 43.44. *Sokszögnek* (polygonum) neveztetik bármely több

kevesebb, egymással szögletre összemenő egyenes vonalak által zárt síkidom. (l. 19 §.)

Ha a' sokszög' minden szöglete az idom' belseje felé nyílik: nevezik az illy szögletet *kiállónak*, vagy *dombosnak*, és az illy sokszöget *domborúnak* Ha pedig egy vagy több szöglet is kifelé nyílik, 's csúcsával tart az idom' belseje felé: az illyen szöglet *homornak*, 's az illy sokszög *homorúnak* neveztetik. Az ABCDE sokszög (id. 43.) *domború ötszög*, és az ABCDEF sokszög (id. 44.) *homorú hatszög*, a' BCD homorszög miatt.

Egyenoldalú sokszög az, mellynek minden oldalai-; — *egyenszögü*, mellynek minden szögletei egyenlök. A' melly sokszögnek pedig minden oldalai, és minden szögletei egyszersmind egyenlök, az neveztetik *rendes sokszögnek*. Legegyszerübb rendes sokszög az egyenoldalú háromszög. A' rendes sokszögek saját tulajdonokkal birnak, mellyeket alább fogunk előadni; itt csak a' rendetlen, vagy akárminő sokszögekről beszélünk.

Ha két sokszög' oldalai ugyanazon renddel megfelelőleg egyenlök, azok *viszonyos egyenoldalúak*; — ha pedig szögleteik illy móddal egyenlök, azok *viszonyos egyenszögüek*. — Két viszonyos egyenoldalú, 's egyszersmind viszonyos egyenszögü sokszögek, egymásra tétetvén, egymást elfedik, 's így egyenlök.

39. §.

Szögszelőnek, vagy *általlónak* (diagonalis) nevez- lá. 45.
tetik azon egyenes vonal, melly a' sokszög' valamelly szögletéből másik – nem ugyanazon oldal mellett esö— szögletbe húzatik. Szögszelők által bármelly sokszöget több háromszögekre lehet osztani. És ez többképen

történhetik; legegyszerűbben úgy, ha ugyanazon egy szögletből húzatnak a' többiekbe szögszelők, mint a 43. idomon. Ezen esetben annyi △-re oszlik a' sokszög, a' hány oldala van, kettő hiján. Általában *n* jelentvén az oldalak' számát, n—2 lesz a' △-ek' száma. Néha a' sokszög' udvarán valamelly pontból húzatnak vonalak minden szögletbe, 's illy móddal annyi △-re oszlik a' sokszög, a' hány oldala van, mint a' 45ik-idomon.

Ha két sokszög ugyanannyi, és renddel megfelelőleg egyenlő △-ekből van összetéve: úgy ezen két sokszög egyenlő, mert egymásra tétetvén, minden △-ek egymást, ésígy az egész sokszögek is egymást elfedik.

40. §.

ld. 45 *Bármelly domború sokszögnek belső szögletei együtt véve annyiszor két egyenesszöget tesznek, a' hány oldala van, kettő hiján.*

Mert egy szögletből szögszelőket húzván, annyi △-re oszlik a' sokszög, a' hány oldala van, kettő hiján Ezen felosztásban a' sokszög' szögleteinek összege egyenlő a' △-ek' szögleteinek összegével, — *n* lévén az oldalok' száma, n—2 a' △-ek' száma; és mivel minden △'szögleteinek összege = 2 egyenesszög: tehát minden △-ek' szögleteinek, vagyis a' sokszög' szögleteinek összege = (n—2) × 2 egyenesszög.

Jegyz. Ennekutána az egyenesszöget nevezzük r-nek, 's így az előbbi képlet=(n—2). 2r.

Ha a' sokszög' belső pontjából húzván vonalakat a' szögletekbe, felosztjuk a' sokszöget annyi △-ekre, a' hány oldala van: ekkor n-szer vett △-ek' szögleteinek

összegéből, t. i. n. 2r-ből ki kell vonni a' csúcsnál — 0-nál (id. 45.) eső szögletek' összegét = 360^0 = 4r = 2 . 2r, — ésígy lesz a' sokszög' szögleteinek összege : n . 2r — 2. 2r = (n — 2) . 2r, — mint az imént.

Innen látnivaló, hogy a' négyszög' szögleteinek összege = 2 . 2r = 4r; — az ötszögé = 3 . 2r = 6r = 540^0; — hatszögé = 8r = 720^0, 'sat. — Ha pedig (n — 2). 2r, elosztatik annyifelé, a' hány szöglet, vagy oldal van, $= \frac{(n-2) \cdot 2r}{n}$: az egyes szögleteket nyerjük. Igy ötszögé = $\frac{540}{5} = 108$, — a' hatszögé = $\frac{720}{6} = 120$.

41. §.

Bármelly domború sokszögnél ABCDE (id. 46.) ha a' megnyujtott oldalokkal, 's a' mellette eső sokszög-oldallal ugyanazon fordulatra nyiló külső szögletek képeztetnek, aAB, bBC, cCD, 'sat: *ezen külső szögletek együtt véve tesznek négy egyenesszögletet = 4r.* Id. 46.

Mert a' sokszög' minden csúcsánál van egy külső, és egy belső szöglet, mellyek mellékszögletek levén, együtt tesznek 2r-et. Ha az oldalak' száma = n: minden külső és belső szögletek' összege = n × 2r; ebből kivévén a' belső szögletek' összegét (n — 2) × 2r-et, kijö a' külső szögletek' összege, — t. i. lesz = n × 2r — (n — 2) × 2r = n — (n — 2) × 2r, — vagy (n — n + 2) × 2r = 2 × 2r = 4r.

42. §.

A' melly négyszögnek két két általellenes oldalai egyközüek, neveztetik *egyközénynek* (parallelogrammum). Ennek 4 faja van. Id. 47—52.

1) *Négyleg*, vagy *négyegyen* (quadratum), mellynek mind a' négy oldalai, és mind a' négy szögletei egymással egyenlök, 's így egyenesek (id. 47.)

2) *Párlag*, vagy *páregyen* (rectangulum), mellynek csak két két általellenes oldalai, de mind a' négy szögletei egyenlők, 's így egyenesek (id. 48.)

3) *Ferde négyleg* (rhombus), mellynek mind a' 4 oldalai egyenlők, de szögletei hajlottak (id. 49.)

4) *Ferde párlag* (rhomboides), mellynek csak két két általellenes oldalai egyenlők, 's szögletei hajlottak (id. 50.)

A' melly négyszögnek csak két általellenes oldalai egyközűek, a' másik kettő nem: az neveztetik *oldalmás*nak (trapezium) — (id. 51.) a' mellynek pedig egyik pár oldala sem egyközü: *ellenpár*nak (trapezoides) — (id. 52.)

A' négyszög vagy négy-, vagy két- ellenben esőbetükkel szokott kimondatni, p. o. (id 50.) AD, vagy CB egyközény.

*Talp*nak az egyközényeknél neveztetik akármelly oldal; az oldalmásnál pedig az egyközü oldalok közül valamellyik; — *magasság*nak az általellenes oldalról a' talpra, vagyis egyik talpról a' másikra húzható függöny.

43. §.

Id. 50. *Minden egyközényben két két általellenes szögletek egyenlők.*

Mert p. (id. 50.) az AD egyközényben, húzván két egymást keresztülmetsző szögszelőket, lesz: x = v, és y = z, — mert viszásak, — innen: x + y = z + v; hasonlóul: r = s, és o = t, innen: r + o = s + t. Így a' többiekben is.

Viszont a' melly négyszögben vagy két két általellenes oldalak, vagy két két általellenes szögletek egyenlők: az egyközény.

44. §.

Minden egyközény szögszelő által két egyenlő há- Id. 50.
romszögre oszlik.

Az ABCD egyközény (id. 50.) a' CB szögszelő által feloszlik két △-re ACB, BCD, mellyek egyenlők, mert egy egy oldaluk, és két két mellette eső szögleteik egyenlők, t. i. CB = CB, < x = < v, és < y = < z.

Viszont akármelly háromszöget úgy tekinthetni, mint vele egyenlő talpú és magasságú egyközénynek felét.

45. §.

Az egyközény' szögszelői egymást két két egyenlő Id. 50.
részekre osztják.

(id. 50.) △ AOB = △ COD, mert AB = CD, < x = < v, < r = < s, — ésígy OB = OC, OA = OD.

Innen az is látnivaló, hogy az egyközény' szögszelői felosztják azt 4 háromszögre, mellyek közül kettő kettő általellenben egyenlő.

46. §.

A' párlag' szögszelői egyenlők (id. 48.) AD = CB. Id. 48.

Mert △ ABD = △ BAC, mivel két oldal két oldallal, és a' közbeeső szögletek egyenlők, t. i. AB = AB, BD = AC, < ABD = < BAC, egyenesek; — ésígy CB = AD.

Mivel pedig ezek egymást két két egyenlő részekre osztják: innen a' párlag, szögszelők által 4 egyenszárú háromszögekre oszlik.

47. §.

A' négyleg' szögszelői egyenlők, és egymást egyenes Id. 47.
szöglet alatt metszik. (id. 47.)

AD=CB az előbbi (id. 47.) megmutatás szerint. — Azonban △AOC=△AOB, mert AO=AO, AC=AB, CO=OB, — ésígy az O-nál eső két mellékszögletek egyenlők, tehát egyenesszögek, — ésígy a' szögszelők egymást egyenes szöglet alatt metszik.

Innen látnivaló, hogy a' négyleget a' szögszelők négy egyenlő, egyenesszögü, egyenszárú △-re osztják.

Id. 49. A' *ferde négylegben* is (id. 49.) a' szögszelők egymást egyenesszög alatt metszik, négy egyenszögü, egymással egyenlő, de nem egyenszárú △-et csinálnak. — Mert: 'sat. *mutassa meg a' tanuló.*

48. §.

Id. 51. *Az ABCD „oldalmás"-ban (trapezium — id. 51.) az EF egyenes vonal, melly az AD, BC nem egyközü oldalok' feleit összeköti, a' talpakkal egyközü.*

Az E ponton, az AD-nek felin húzzuk a' GH vonalat, egyközüleg a' BC-vel; lesz itt két △, AEH, EGD, mellyek egyenlők, mivel egy oldaluk egyenlő, AE=DE, 's két mellette eső szögleteik, t. i. < DGE=<EHA, viszásak, <DEG=<AEH, csúcsszögek — ésígy GE=EH. — Úgyde GH=CB, — egyközüek közt egyközüek; ésígy GE=CF, és EH=FB, mint egyenlő vonalak' felei. A' GEFC négyszögben tehát két oldalak GE és FC, egyközüek, és egyenlők, — ésígy azon négyszög egyközény, — ésígy az EF a' talpakkal egyközü.

Viszont a' *melly vonal az egyik nem egyközü oldal közepéről E, a' talpakkal egyközüleg húzatik, az a' másik BC oldalt is középen metszi, úgy hogy BF=FC.* Mert mint látánk GE=EH, és GE=FC; innen FC=EH; úgyde FB=EH, ésígy BF=FC.

49. §.

Az oldalmásban a' két talpak között, mindeniktől l. 51. *egyenlő távolságra húzható egyközű vonal EF (id. 51.) egyenlő a' két talpak' félösszegével.*

Ugyanis AH = DG (48. §.)

egyrészről: FE = CD + DG,

vagy: FE = CD + HA

másrészről: FE = BA — HA

összeadva: 2FE = CD + BA

végre: FE = $\frac{1}{2}$ (CD + BA)

vagyis ezen vonal a' két talpak közt számtani középszeres.

50. §.

Feladatok, mellyek' megfejtése a' mondottakból önkényt folyván, a' tanulóra hagyatik.

1) Adatván a' sokszög' minden oldalai, egyenkivül, és az adott oldalok közt eső szögletek: a' sokszöget szerkeszteni.

2) Adatván a' nyégszög' 4 oldala — az összetétel, rendi, — és két oldal közt eső szöglet: a' négyszöget szerkeszteni.

3) Adatván az egyközény' két oldala, és az ezek közt eső szöglet: az egyközényt szerkeszteni.

4) Adatván a' négyleg' egy oldala: négyleget szerkeszteni.

NYOLCZADIK CZIKKELY.

A' vonalak' és idomok' arányosságáról, 's hasonlóságáról.

51. §.

Hasonlóságnak neveztetik két mennyinek egyenlő

számú, 's megfelelőleg arányos részekből állása. Ha két mennyi közül a' kisebbiknek ugyanannyi része van, mint a' nagyobbiknak; és a' kisebbiknek minden külön része, épen olly viszonyban van a' maga egészéhez, és a' többi részekhez, mint a' nagyobbiknak megfelelő része a' maga egészéhez, és a' többi részekhez: az illyen két mennyik egymáshoz *hasonlók*. Igy p. o. a' kis kör hasonló a' nagy körhöz, mert mindenik 360°-ra van osztva, és mindenik fok a' kisebben épen olly viszonyban van annak egész körületéhez, mint mindenik fok a' nagyobbikban a' maga körületéhez. — Igy hasonló a' rajzkép a' maga eredetijéhez, — a' gyermek a' nagy emberhez, 'sat. — Két vonalak is hasonlók, ha egyenszámú részekre úgy osztatnak, hogy minden külön rész egyikben, épen olly viszonyban legyen a' maga egészéhez, és a' többi részekhez, mint minden megfelelő külön rész a' másikban.

52. §.

Id. 53. *Ha két egyenes vonalak, AE, FL (id. 53.) keresztül metszetnek néhány egyközüek által, AF, BG, 'sat. melyek az egyiknek — AE — egyenlő osztálypontjainál húzatnak, — a' másik egyenes vonalon — FL — ezen egyközüek által kimetszett részek is egyenlők lesznek.*

Mert húzván az Aa, Bb, Cc, Dd segédvonalakat, egyközüleg az FL-el: képeztetnek itt △-ek AaB, BbC, CcD, DdE, mellyek mind egyenlők, mivel egy egy oldalaik (a' felvett egyenlő osztásnál fogva), és azok mellett eső két két szögleteik (mint külső-belsők) egyenlők. Innen Aa = Bb = Cc, 'sat. Azonban Aa = FG, és Bb = GH, Cc = HI, mint egyközüek közt eső egyközüek. Innen FG = GH = HI = IL.

Követk. 1) Az AB tehát épen annyiszor van meg az AE-ben, a' hányszor az FG, az FL-ben, — vagy az AB annyid része az AE-nek, a' hányad része az FG az FL-nek,—vagy az AB olly viszonyban van az AE-hez, mint FG az FL-hez: — az elmetszett részek a' maguk egészeikhez arányosak: AB: AE=FG: FL.

2) Valamint az AE-ből AB = $\frac{1}{4}$, az elmaradt rész BE pedig = $\frac{3}{4}$: úgy az FL-ből is az elmetszett rész FG = $\frac{1}{4}$, az elmaradt rész GL pedig = $\frac{3}{4}$; — ésígy az elmaradt részek is, mind a' maguk egészeikhez, mind egymás közt arányosak: BE: AE = GL: FL,

és: BE: AB = GL: FG.

3) Innen az egész vonalak is olly viszonyban vannak egymással, mint elmetszett részeik: AB: FG=AE: FL.

vagy: BE: AB=GL: FL.

53. §.

Ha az 53-dik idom' F pontjából, az AE vonallal egyközüleg FK vonal húzatik: lesz FO=AB, és OK=BE (egyközüek közt egyközüek); — és a' miket imént (52.§.) az AE-ről, az FL-hez viszonyítva mondánk, mind azokat mondhatjuk az FK-ról is az FL-hez viszonyítva. — Azonban itt most egy háromszög FKL állt elő; — 's az előbbi §-ban előadott szabály a' háromszögre alkalmazva így lesz: *Ha valamelly p.o. FKL háromszögben, annak valamelly p. LK oldalával egyközü vonal OG húzatik: annak másik két oldalai ezen egyközü által ollyan részekre osztatnak fel, mellyek mind egymás közt, mind az egészekhez arányosak.*

Innen viszont következik: hogy *ha valamelly vonal a' háromszög' két oldalait arányos részekre osztja, a' 3-dik oldallal egyközü.*

54. §.

Id. 54. Akármelly △-ben ABC, ha valamelly oldallal, p. BC-vel, egyközü vonal EF húzatik: képeztetik ez által egy másik △AEF, mellynek oldalai amazéival arányosak. (id. 54.)

Ugyanis az előbbi §. szerint.

(1) AB: AE = AC: AF;

továbbá húzatván az AC-vel egyközü ED:

lesz ismét: AB: AE = BC: DC,

vagy (2) AB: AE = BC: EF, mert DC = EF:

már az (1) és (2) arányok' első viszonyai ugyanazok levén, hátulsó viszonyaik is egyenlők, ésígy:

AC: AF = BC: EF;

ésígy az ABC és AEF háromszögeknek minden megfelelő oldalaik arányosak. —

Már az ollyan két háromszögek, mellyeknek minden megfelelő oldalaik arányosak, neveztetnek *hasonlók*nak.

55. §.

Id. 55. Ha egy pontban A összejövő akárhány vonalakat AD, AE, AF, AG, két egyközü vonalak DG és BC keresztül vágnak: *mind magok ezen vonalak az egyközüek által, mind az egyközüek ő általok arányos részekre metszetnek. (id. 55.)*

Ugyanis az 54-dik §. szerint az ADE és ABH, AEF, és AHK, AFG és AKC háromszögekben illy arányok állanak:

AD: AB = AE: AH = DE: BH

AE: AH = AF: AK = EF: HK

AF: AK = AG: AC = FG: KC.

Mindezen arányok egyenlők, mert a' mi az elsőnek

második, — az a' másodiknak első viszonya 'stb. Már azokat vevén fel előbb, mellyek az A-nál összejövő vonalakat illetik, illyen arányok lesznek:

AD : AB = AE : AH = AF : AK = AG : AC,

's ez az állitmány' első része.

Továbbá felvévén azon viszonyokat, mellyek az egyközű vonalakat illetik, lesz:

DE : BH = EF : HK = FG : KC

's ez az állitmány' második része.

Következmény. 1) Ha DG egyenlő részekre van osztva: BC is egyenlőkre lesz. — A' hányad része BD az AD-nek: épen annyid része HE az AE-nek, KF az az AF-nek, CG az AG-nek.

2) Valamelly háromszög' tetejéről a' talpra húzható bárhány vonalak, a' talpat és azzal egyközü vonalat arányos részekre osztják, — 's maguk is amazok által arányos részekre osztatnak.

56. §.

Bármelly △-ben ABC azon egyenes vonal, p. BD, id. 56. *melly egy szögletet, p. B, két egyenlő részre oszt, az általellenes AC oldalt két ollyan részekre osztja, AD, DC, mellyek a' mellettök eső oldalakkal arányosak.* (id. 56.)

Ennek bebizonyitása végett, húzzuk az AE vonalat egyközüleg a' BD-vel odáig, mig az E pontban a' CB vonal' megnyujtásával össze nem jö. Már az 53 § szerint illy arány áll:

EB : BC = AD : DC

Úgyde △ ABE egyenszárú, mert ∠ EAB = ∠ ABD mint viszásak, — ∠ AEC = ∠ DBC mint külső-belsők, — és ∠ ABD = D ∠ BC a' feltétel szerint: ésigy ∠ BAE

$= < BEA$, ésígy $EB = AB$. — Már az előbbi arányban EB helyett AB-t tevén, lesz:

$$AB : BC = AD : DC.$$

És viszont, a' melly D pontból az AC oldal két ollyan részekre osztatik, mellyek a' mellettök eső oldalakkal arányosak: azon pontból húzható vonallal az általellenes szöglet két egyenlő részre oszlik.

57. §.

Feladat. 1) Valamelly vonalat néhány egyenlő ré-
id. 57. *szekre osztani.* (id. 57.)

Megfejtés. Húzván néhány egyközü vonalakat egymástól egyenlő távolságra, — az elosztandó GH vonalat czirkalom' szárai közé veszem. Ekkor a' czirkalom' egyik szárát letévén az *A* ponthoz, a' másikat annyidik egyközűhöz teszem, a' hány egyenlő részekre kell a' GH-t felosztani, — 's a' letett vonal, a' közben eső egyközüek által egyenlő részekre lesz felosztva, p. o. az AL helyzetben fel van osztva 4-, az AK-ban 3-, az AI-ben egyenlő részre; mert valamint $AC = CD = DE = EF$: úgy $AP = PR = RS = SL$, — mivel $AC = CD = AP$: PR 'sat.

58. §.

Feladat. 2) *Valamelly vonalat M egy másik N vo-*
id. 58. *nal' részeivel arányos részekre osztani.* (id. 58.)

Megfejtés. 1) A' nagyobbik vonalat, — akár a' már felosztott legyen az, akár az osztandó, — letévén talpul, csinálok reá egyenoldalú $\triangle$-et NCA; a' kisebbik vonalat pedig ezen $\triangle$' két oldalára AN-és AC-re, a' hova lehet, leteszem a' talppal egyközűleg; — ekkor a' tetőből a' már felosztott vonal' osztály-pontjaira, — vagy azokon keresztül — egyenes vonalakat húzok; — ezek az egyik kiadott vonalat, a' másik' részeivel arányos részekre metszik. —

Ugyanis 'sat. lásd 55. §.

Követ. Ha a' felosztott vonal' részei egyenlők: úgy az osztandó' részei is egyenlők lesznek. 'S illy móddal *valamelly adott vonalat néhány egyenlő részekre is fel lehet osztani.*

Megfejt. 2) (id. 59.) Tegyük fel, hogy az OS vonal id. 59. fel van osztva néhány részekre OI, IK, KL, LM, MS, — és az OR vonal ezekkel arányos részekre osztandó; — letévén ezen vonalakat akármelly ROS szögletre, 's az R és S végpontokat összekötvén, az osztálypontoknál az RS vonallal egyközüeket húzunk: iI, kK, lL, mM,—és most az OR vonal az OS-nek részeivel arányos részekre van felosztva. (l. 53. §.)

Követk. Ha az OS' részei egyenlők: úgy az OR' részei is egyenlők; — 's ez ismét egy módja valamelly kiadott vonal' néhány egyenlő részekre osztásának.

59. §.

Feladat. 3) Kismértéket (scala) készíteni.

A' vonalak' arányos részekre osztásán alapul a' *kismérték*' készítése is. Igy neveztetik valamelly közhasználatú nagy mérték (p. öl, láb 'sat.) helyett, rajzolatok' készítése végett felvett, tetszés szerinti hosszaságu, 's ugyanannyi egyenlő részekre és részek' részeire felosztott vonal, a' hány egyenlő részek, és részek' részei vannak a' nagy mértékben; — úgy hogy a' minő viszonyban vannak a' nagy mérték' részei az egészhez, épen olly viszonyban legyenek a' kismérték' részei is saját egészükhöz. — Kismértéket így lehet készítni:

Az AC vonalon (id. 60.) nehány egyenlő részt AB id. 60. 'sat. felvévén, p. *egy öl* gyanánt, az *A*' végire függőlegesen állitjuk az *AM* tetszés szerinti hosszaságu vonalat, 's azt elosztjuk hat egyenlő részre, 's az osztálypontoknál

az AC-vel egyközüeket húzunk: ekkor kihúzván az MB keresztvonalat, az 1—1′ tesz egy lábat, a' 2—2′ két lábat 'sat. — Ugyanis illyen arányok állanak:

M—1 : MA = 1—1′ : AB
M—2 : MA = 2—2′ : AB
M—3 : MA = 3 3′ : AB

t. i valamint az M—1 egy hatodrésze az MA-nak: úgy az 1—1′ egy hatodrésze az AB-nek; ésígy ha az AB = 1 öl = 6 láb: úgy az 1—1′ = $\frac{1}{6}$ öl = 1 láb, 's így a' többi. — Már 1—x = 7 láb, 2—y = 8 láb, 3—z = 9 láb 'sat. — Illyen kismérték' segitségével bárhány ölet és lábat fel lehet venni. — De hátha kisebb részekre, p. hüvelykekre is van szükség? Akkor az AB-t vévén egy láb gyanánt, 's hat ollyat egy öl gyanánt; mivel most az MA vonalon csak hat osztály van: az 1—1′ lesz $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ lábat, vagy két hüvelyket; de ha az MA 12 egyenlő részre osztatnék, a' 12 egyközü vonalakon, a' keresztvonal által elmetszett részek közül a' legfelsö egy hüvelyket, a' 2-dik két hüvelyket 'sat. mutatnának.

Id. 61. Ha pedig a' tizedes osztály szerint akarunk kismértéket csinálni: akkor (id. 61.) az AB vonalat felosztván 10 egyenlő részre, a' függölegesen állitott MA-t hasonlóul 10 egyenlő részre osztjuk, — húzunk egyközüeket az AC-vel, 's ismét keresztbe az MI-t, 's ezzel egyközüeket az AB-nek minden osztálypontjaira. Már: M-1 : MA = 1—1′ : AI, azaz, valamint M—1 = $\frac{1}{10}$ MA, úgy 1—1′ = $\frac{1}{10}$ AI; — hasonlóul: M—2 : MA = 2—2′ : AI, azaz valamint M—2 = $\frac{2}{10}$ MA — úgy 2—2′ = $\frac{2}{10}$ AI, így a' többi.

Kismértéket tetszése szerint csinál az ember, midön nagyobb idomot kisebben akar lemásolni. De szokták

ezt érctáblácskára is felmetszeni, — minek a' gyakorlatban nagy haszna van.

60. §.

Feladat 4) Két kiadott vonalhoz harmadik, vagy háromhoz negyedik arányos vonalat keresni.

Megf. Csináljunk bárminő nagyságú szögletet (id. 62.) annak egyik szárára tegyük le az első kiadott vonalat = AB,— másik szárára a' másodikat = AD, és a' B és D pontokat kössük össze a' BD vonallal, — ismét az AB után folytatólag tegyük le még egyszer a' másodikat, ha t. i. két vonalhoz kell harmadikat keresni, — vagy pedig ha 3-hoz kerestetik 4-dik arányos, akkor ide tegyük le a' 3-dikat = BC, — már a' BD vonallal a' C-pontból húzzunk egyközüt CE: 's ekkor a' DE vonal lesz a' 3-dik, vagy illetőleg 4-dik arányos. Id. 62.

Mert: AB: BC = AD: DE

vagy: AB: AD = BC: DE. (l. 53. §.)

61. §.

Látánk már (54. §.) hogy, *hasonló* háromszögeknek neveztetnek az ollyan két háromszögek, mellyeknek minden megfelelő oldalaik arányosok. — Látnivaló, hogy minden egyenlő △-ek egyszersmind hasonlók is: de nem mondhatni viszont, hogy minden hasonlók egyszersmind egyenlők is volnának, — sőt nagyságukra nézve felette különbözők lehetnek. — Miről lehet megismerni, ha valjon két △-ek hasonlók-e egymáshoz? Erre nézve lássuk e' következő állitmányokat.

I. *Ha két háromszögnek ABC és abc (id. 63.) minden megfelelő szögleteik egyenlők,* $\angle A = \angle a, \angle B$ Id. 63.

$=\angle b$, $\angle C=\angle c$: *akkor minden megfelelő, vagyis az egyenlő szögletekkel általellenes oldalaik arányosok;* — *ésígy a' háromszögek hasonlók.*

Ugyanis ha az *abc* háromszöget ráteszszük az ABC-re, úgy hogy $\angle a$ ráessék $\angle A$-ra: mivel ezen szögletek egyenlők, az *ab* oldal az AB-n, az *ac* az AC-n fog nyúlni, a' *bc* oldal pedig a' *b* pontnál az AB-t, és a' *c*-nél az *AC*-t metszeni fogja. — Már mivel $\angle b=\angle B$, és $\angle c=\angle C$; ezek pedig külsö-belsök: látnivaló, hogy a' *bc* a' BC-vel egyközü; ésígy az 54. §. szerint illy arány áll: ab: AB = ac: AC = bc: BC; ésigy ezen háromszögek hasonlók.

II. *Ha két* $\triangle$*-ben kétkét megfelelő szögletek egyenlők: úgy a' 3-diknak is a' 3-dikkal egyenlőnek kell lenni,* — mivel egészitök 180^0-ra; — ésígy *az illyen* $\triangle$*-ek hasonlók.*

Id. 63. III. *Ha két* $\triangle$*-ben egy szöglet egy szöglettel egyenlő, és az ezt képező két oldalok arányosok: úgy ezen* $\triangle$*-ek hasonlók.* ●

Mert legyen (id. 63.) $\angle a=\angle A$, és ab: AB = ac: AC; feltévén az *abc* $\triangle$-et az *ABC*-re, mint az I alatt, — mivel a' *bc* oldal az AB-t és AC-t arányosan metszi, tehát a' BC-vel egyközü (53. §.); — ha ezek egyközüek, úgy $\angle b=\angle B$, és $\angle c=\angle C$; ésígy mind a' 3 szögletek egyenlők, ésígy $\triangle$ abc $\backsim$ $\triangle$ ABC.

Id. 64. 65. IV. *Ha két* $\triangle$*-nek megfelő oldalai egymással egyközüek (id. 64.), — vagy pedig függőlegesek (id. 65): úgy azok egymáshoz hasonlók.* Mert mindenik esetben meg lehet mutatni, hogy $\angle A=\angle a$, $\angle B=\angle b$, $\angle C=\angle c$. Az első eset' megmutatását lásd 33. §.; a' másodikét 34. §.

62. §.

Ha az ABC egyenesszögű háromszög' (id. 66.) Id. 66.
A egyenes szögletéből a' BC feszes oldalra AD függöny húzatik:

1) Ezen függöny felosztja a' △-et két kisebb ABD és ADC háromszögekre, mellyek az ABC-hez, ésígy egymáshoz is hasonlók.

2) Mindenik mellékoldal, AB és AC, középszeres lesz az egész feszes-oldal és annak mellette eső darabja BD vagy DC között.

3) Az AD függöny középszeres lesz a' feszes-oldal és annak két darabjai BD és DC között.

Ugyanis:

1) Az ABD és ABC △-ekben van egy közös szöglet B, és van mindenikben egy egyenes szöglet BAC = BDA; ésígy △BAC ∽ △BAD. — Épen így áll a' dolog az ADC és BAC △-ekre nézve is. — Ha pedig a' két kisebb △-ek a' nagy △-hez hasonlók: úgy egymáshoz is hasonlók, △BAD ∽ △ADC.

2) Külön mind a' két kisebb △-et összehasonlítván a' nagy △-gel, illyen arányok állanak:

BD : AB = AB : BC
CD : AC = AC : BC

mi az állitmány' 2-dik részét bizonyitja.

3) A' kis △-geket egymással összehasonlitván, illy arány áll:

BD : AD = AD : CD,

mi az állitmány' 3-dik részét bizonyitja.

Következm. 1) A' (2) szám alatt álló két arányokból egyenleteket csinálván:

lesz: $\overline{AB}^2 = BD \times BC$

$\overline{AC}^2 = CD \times BC$

ezeket összeadván:

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BD + CD) \times BC,$

vagy: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$

Ezen eredmény' megértése végett jegyezzük meg, hogy a' vonalakat mindig viszonyíthatjuk valami egységhez, mellyel azokat mérjük; ésígy a' vonal' hosszát kifejezhetjük azon számmal, melly annak a' felvett egységhezi viszonyát mutatja. Ezen szempontból nézvén a' fentebbi egyenletet: abból ezt tanuljuk: hogy a' *feszes-oldal' számértékének' négyleg-hatványa, annyi mint a' két mellékoldalok' számértékeinek négyleghatványuk együtt véve;* vagy rövidebben: *a' feszes-oldal' négylege annyi, mint a' két mellékoldalok' négylegeinek összege. (Pythagoras' állitmánya.)*

Ezen tétel szerint, az egyenesszögü △-nek bármelly oldalát ki lehet számítni, ha a' másik kettő kiadatik. Legyen a' feszes oldal = a = 5, egyik mellékoldal = b = 4, másik = c = 3: lesz

$a^2 = b^2 + c^2, \quad 5^2 = 4^2 + 3^2$

innen: $a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad 5 = \sqrt{4^2 + 3^2};$

$b^2 = a^2 - c^2, \quad 4^2 = 5^2 - 3^2$

innen: $b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad 4 = \sqrt{5^2 - 3^2};$

$c^2 = a^2 - b^2, \quad 3^2 = 5^2 - 4^2.$

innen: $c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad 3 = \sqrt{5^2 - 4^2}.$

Követk. 2. A' feszesoldal' négylege úgy van akármellyik mellékoldal' négylegéhez, mint az egész feszes oldal, az illető mellék-oldal felől eső darabjához. t. i.

$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD$

$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : DC.$

Mert az előbbi következményben feltett két egyenleteknek:

$\overline{AB}^2 = BD \times BC$

$\overline{AC}^2 = CD \times BC$

ha mindkét részét sokszorozzuk BC-vel,

lesz: $\overline{AB}^2 . BC = BD . \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 . BC = CD . \overline{BC}^2,$

és ezeket arányokra fejtvén, lesz:

$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD,$

$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : CD.$

Követk. 3. Az egyenes-szögü $\triangle$*-ben a' mellékoldalok' négylegei úgy vannak egymáshoz, mint a' függönnyel metszett feszes-oldalnak mellettök eső darabjai.*

$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC.$

Mert az (1) következményben feltett két egyenleteknek:

$\overline{AB}^2 = BD \times BC$

$\overline{AC}^2 = CD \times BC$

a' minő viszonyban vannak első részeik egymáshoz, ollyanban vannak az utolsók is:

$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD \times BC : CD \times BC$

a' hátulsó viszony' mindkét tagját elosztván BC-vel:

$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CD.$

63. §.

Akármelly $\triangle$*' három oldalait számokkal fejezvén ki, ha ezen oldalak közül egynek végéről függönyt*

ld. 67. 68.

bocsátunk egy másik oldalra: az előbbi oldal' négylege annyi lesz, mint a' másik két oldalok' négylegeinek összege, — kivonatván belőle azon oldalnak, mellyre a' függöny esett, kettőzete, sokszorozva a' függönynek az első oldallal általellenes szöglettőli távolságával, azon esetben, ha ezen szöglet hegyes, — de hozzáadatván ugyanezen sokszorozmány azon esetben, ha az említett szöglet tompa; azaz illyen egyenlet áll

1-sö esetben: (id.67.): $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$

2-ik esetben: (id.68.): $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD.$

Ugyanis

1) Az ABC háromszög (id. 67.) az AD függöny által felosztatik két egyenesszögü △-re, ABD- és ADC-re. — Az ABD △-ben illyen egyenlet áll:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ezen egyenletben mind az $\overline{AD}^2$, mind a' $\overline{BD}^2$ helyett azoknak értékeit kell tenni, az állitmányban kitett vonalak által. Jelesen egyrészről az ADC △-ben:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2,$$

másrészről: $BD = BC - DC,$

ezt négylegre emelvén:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - 2BC \times DC + \overline{DC}^2.$$

Már az $\overline{AD}^2$-nak és $\overline{BD}^2$-nak ezen értékeit az (1) egyenletben helyette tevén, lesz:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC + \overline{DC}^2,$$

kihagyván az egymást lerontó tagokat:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC,$$

mi az állitmány' első részét bizonyitja.

2) Az ABC tompaszögletü háromszög (id.68.) AD függöny által ABD egyenesszögü △-re pótoltatván, ebben:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2; \ldots\ldots\ldots (1)$$

úgyde: $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$,

és: $\overline{BD}^2 = (BC + CD)^2$

vagy: $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2$

az (1) egyenletben ezeket helyette tévén:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2$$

kihagyván az egyfajta ellenjegyü tagokat:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$$

mi az állitmány' második részét bizonyítja.

Követk Az előadottakból látható, hogy a' △' oldalainak egymáshoz viszonyított értékükből kitünik, ha valjon akármellyik oldallal általellenes szöglet hegyes-e, tompa-e, egyenes-e? Ha egy oldal' négylege kisebb mint a' másik két oldalé: akkor az azzal általellenes szöglet hegyes. Ha egy oldal' négylege nagyobb, mint a' másik kettőé: — akkor az általlenes szöglet tompa. Végre ha egy oldal' négylege egyenlő a' másik kettőjével: akkor az általlenes szöglet egyenes, és a' △ egyenesszögü.

64. §.

Hasonló *sokszögek*nek neveztetnek azok, mellyek- Id. 69.
nek minden megfelelő szögleteik' egyenlők, és minden megfelelő oldalaik arányosok. Ezen határozat nem egyéb, mint a' hasonló △-gek' határozatának szélesebbre terjesztése. Mivel a' sokszögek △-gekre oszthatók: azoknak hasonlósága a' bennök képezhető △-gek' hasonlóságán alapúl. — Jelesen:

Hasonlók egymáshoz azon sokszögek, (id 69.) mely-

lyek ugyanannyi számu, 's megfelelőleg hasonló △-gekből összetétetvék.

Mert: 1) Ha △ABC ∽ △abc, △CAD ∽ △cad, △DAE ∽ △dae: tehát ezeknek megfelelő szögleteik egyenlők, — < B = < b, < E = < e; a' többiek t. i. < BCD = < bcd, < CDE = < cde, < BAE = < bae, mert egyenlő szögletekből vannak összetéve. Ésigy ezen sokszögekben minden megfelelő szögletek egyenlők.

2) Az ABC és abc, ACD és acd 'sat. háromszögek' hasonlóságából folynak ezen arányok:

AB : ab = BC : bc = AC : ac
AC : ac = CD : cd = AD : ad
AD : ad = DE : de = AE : ae.

Mind ezen viszonyok egyenlők, mert ugyanazon viszonyokkal AC : ac, és AD : ad, vannak összekötve. Már ezekből csupán azokat vévén fel, mellyekben a' sokszög' oldalai jönek elő, lesz:

AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae, miből kitünik, hogy ezen két sokszögnek oldalai arányosok:

tehát a' felvett sokszögek hasonlók.

Innen viszont folyik, hogy *a' hasonló sokszögeket egyenlő számu, és renddel megfelelőleg hasonló △-gekre lehet felosztani.*

Mert (id. 69.) az ABCDE és abcde sokszögek hasonlók levén: minden megfelelő szögleteik egyenlők. Tehát < B = < b, és mivel AB : ab = BC : bc : innen (61. §. III.) az ABC háromszög hasonló az abc-hez. — Innen < BCA = < bca; és az AC az ac-vel arányos. És mivel < BCD = < bcd; ha egyenlőkből egyenlők vonatnak ki, egyenlők maradnak ott, ésígy < ACD

$= \angle acd$; és mivel AC : ac = CD : cd : innen $\triangle ACD \sim \triangle acd$. — Ésigy $\angle CDA = \angle cda$, — és az AD és *ad* oldalok arányosok. Azonban mivel $\angle CDE \angle = cde$, ha egyenlőkből egyenlők vonatnak ki, egyenlők maradnak ott, t. i. $\angle ADE = \angle ade$. És mivel AD : ad = DE : de : innen $\triangle AED \sim \triangle aed$.

Az előadottakból az is folyik, hogy *a' hasonló sokszögek' kerítései, a' megfelelő egyes oldalokkal és szögszelőkkel arányosok.* — Úgyanis (id. 69) illyen arányok állván :

AB : ab = BC . bc = CD : cd = DE : de = AE : ae;

vagy mivel a' számtan szerint az előtagok' összege úgy van az utótagok' összegéhez, mint bármelly előtag a' maga utótagjához :

AB + BC + CD + DE + AE : ab + bc + cd + de + ae
= AB : ab = BC : bc 'sat.

vagy :

kerítes ABCDE : *kerítés* abcde = AB : ab = AC : ac
= AD : ad 'sat.

KILENCZEDIK CZIKKELY.

A' körhöz viszonyított vonalakról és szögletekről.

65. §.

Valamelly húrnak AB (id. 70.) közepére húzott id. 70.
függöny OC, a' kör' középpontján, és az ezen húr ellenébe feszített körívnek közepén megy keresztül.

Ugyanis húzzuk ki az OA, OB sugárokat, és az AC, BC húrokat. Mivel a' feltétel szerint OC függőleges az AB' közepén, az A-tól és B-től egyenlő távolságra

eső pontokon megy mindenütt keresztül (18. §. III.); úgyde az O középpont épen ezen pontok közül való — mivel OA = OB; — ésígy OC a' középponton megy keresztül. — Hasonlóul a' C pont is egyenlő távolságra van az A-tól és B-től, vagy az AC és BC húrok egyenlők; ésigy az azoknak megfelelő AC és BC körívek is egyenlők; — ésígy OC az ACB körívnek közepén megy keresztül.

Következm. 1) A' kör' középpontja, — a' húr' közepe, — az ellenében eső köríV' közepe,— ollyan három pontok, mellyek a' húrra függőleges vonalon mind meg vannak; — vagy kimerítőbben, ezen négy feltételek: húrra függőlegesség, — középponton — a' húr' közepén, — és a' köríV' közepén keresztül menés mindig együtt járnak. — És mivel az egyenes vonal' meghatározására két pont, vagy két feltétel elegendő: tehát ezen négy közül, ha akármellyik kettőnek jelenléte bizonyos, — a' másik kettő' jelenléte önkényt következik. Jelesen:

a) *A' húrra függönyös sugár, azt és körívét két egyenlő részre osztja.*

b) *A' húr' közepét metsző sugár, arra függönyös, és a' körívet két egyenlő részre osztja.*

c) *A' köríV' közepére húzható sugár, a' köríV' hurjára függönyös, és azt két egyenlő részre osztja*

d) *A' húr' közepére függönyös vonal, a' kör' középpontján megy keresztül, — és a' körívet két egyenlő részre osztja.* 'sat.

Követk. 2) Valamelly körívet, és azon szögletet, mellynek ezen köríV mértéke, két egyenlő részre lehet osztani, ha azon köríV' hurjának közepére függöny húzatik.

Követk. 3) Valamelly körívnek AC (id. 71.) közép- id. 71
pontját kikereshetni, ha két húrt AB és AC-t húzván reá, ezeknek közepeikre függönyöket állítunk, — mert hol ezek egymást keresztülvágják, az O-nál van a' körív' középpontja.

Követk. 4) Három adott pontokon A, B, C (id. 72.) id. 72.
körkörületet lehet írni, ha összekötvén azon pontokat egyenes vonalakkal AB és BC, és ezeket húrok gyanánt tekintvén, közepükre függönyöket húzunk, — ezeknek O metszés-pontjok lesz a' körülírandó körület' középpontja. — Mivel a' △= három pontok által kijelelt idom: épen illy móddal lehet akármelly △ körül kört írni.

66. §.

A' kört keresztül metsző húr p. o. AB, Ab (id. 73.) id. 73.
neveztetik *szelő*nek (secans). A' szelő tehát a' körületet két pontban metszi.

Azon vonal pedig, melly a' körületet csupán egy pontban érinti p. CA neveztetik *érintő*nek (tangens.)

Az OA sugár' végpontjára húzható függöny AC kétségkivül érintő. Mert ezen CA függönynek minden más pontjai az A-n kivül, messzebb esnek az O középponttól, mint az A; ésígy a' körületet csupán csak az A pont érintheti, a' többi nem; ésígy a' CA érintő

Viszont: az érintő CA, az érintés' pontjára húzható OA sugárra kétségkivül függőleges. Mert a' CA-ra az O középpontból, az OA sugár legrövidebb távolság, — ésígy reá függőleges (18. §.)

Követk. 1) A' körület' valamelly pontjára érintőt úgy húzhatni, ha az ezen pontra húzott sugár' végére függöny állíttatik.

Követk. 2) Az érintőnek érintéspontjára állitott függöny a' középponton megy keresztül.

Követk 3) Az állalmérő' két végére húzható érintők egyközüek.

Követk. 4) Az érintés' pontjától *A* (id. 73) kétfelől, az érintőn egyenlő távolságra eső pontok D és E, a' középponttól O egyenlő távolságra vannak, OD = OE; mert a' függönytől OA kétfelől egyenlő távolságra eső dült vonalak egyenlők. (l. 18. §. II. 2.)

Jegyzék. A' 4-dik következményen alapul az úgy nevezett *víz-szín-mérés* (libellatio). T. i. ha a' földön mint golyóbison, akárhol megállván, ezen álláspontiól a' föld' közép-pontjáig vonalat = sugárt húzatni gondolok; — erre pedig vízirányos vonalat, melly ezen sugárral egyenes szögletet képez: a' vízirányos vonalat úgy nézhetem, mint érintőt; álláspontomat pedig mint érintés' pontját. Már ezen érintő, vagyis vízirányos vonal' mentiben két felől, tőlem egyenlő távolságra eső pontok, a' föld' középpontjától is egyenlő távolságra esnek; ésigy a' melly tárgyak ezen pontokig érnek, azokról azt mondjuk, hogy magosságuk egyenlő. Ha pedig ezen pontokhoz képest, a' két felől eső tárgyak közül egyik fentebb, másik lentebb esik: akkor azt mondjuk, hogy a' lentebb esőnek *esése* van. Vízirányos vonalat ahhoz való müszerrel, úgy nevezett *víz-szín-mérővel* (libella) szoktak nézni; mellynek fő része egy égettborral annyira tele töltött 's mesterileg bezárt üvegcső, hogy csak igen kevés levegőcske maradjon benne, — melly kis levegő a' mozditott csőben ide 's tova futkosván, midőn annak épen közepén áll, akkor van a' cső vízirányos állásban. Ezen csővel egyközüleg összeköttetik egy dioptra, néha távcsővel, melly utóbbi' segitségével nagy távolságra is nézhetünk vízirányos vonalat; és az egész készület csuklókkal ellátott három lábu asztalkához van erősitve. Szükségesek még ezen méréshez lobogóval ellátott rúdak vagy póznák, mellyekre lábak, hüvelykek, vonalak vannak kitünő színekkel feljegyezve. — Már ha meg akárnám tudni, hogy a' földön két pontok közül A és B (id. 74) az A mennyivel esik lentebb, mint a' B: karót ütvén le függőlegesen mindenik pontnál, 's a' kettő közt középen a' C-nél letévén a' vízszinmérőt: néznék vízirányos vonalban mind a' két karóra, — 's a' melly pontjaikra — E és

F — esnék a' vízirányos vonal, azt megjegyezvén: az AE és BF magosságot megmérném; és a' mennyivel nagyobb az AE mint az FB, — annyival esik magosabban a' B mint az A a' föld' középpontjától, — vagy annyi esése van az A-nak a' B-től.

67. §.

Ugyanazon körben két egyközüek (húrok, szelők, vagy érintők) közt eső körívek egyenlők. (id. 75.) Id. 75.

A' BC, DE húrok vagy szelők, és az FG érintő egyközüek levén: az OA sugár, melly az érintés' pontjára húzatik, mind a' háromra függönyös, — mivel (66. §.) az érintőre függönyös. Tehát az A pont a' BAC és DAE köríveknek közepén van. (65. §.) Következőleg AB körív = AC, és AD = AE; következőleg egyenlőkből egyenlők vonatván ki, egyenlők maradnak: AB — AD = AC — AE, vagy BD = CE.

68. §.

A' szögletnek, körhöz viszonyítva, négyféle helyzete lehet: vagy *a' kör' középpontjában van annak csúcsa*, — vagy *a' körületen*, — vagy *a' középpont és körület közt*, — vagy *a' körületen kivül.*

Az első esetet már ismerjük (12. §.), s' tudjuk, hogy azon esetben a' szöglet' mértéke a' szárai közt eső körív; most a' többi eseteket lássuk.

69. §.

Minden ollyan szögletnek, mellynek csúcsa a' körületen esik, és szárai húrok, mértéke a' szárai közt eső körívnek fele. (id. 76.) Id. 76.

Vegyünk fel előbb ollyan szögletet BAC, mellynek egyik szára a' középponton menjen keresztül. Húzzuk az OB sugárt; az OAB háromszög egyenszáru; ésígy

$< x = < y$; — azonban az AO oldalnak C-ig nyujtásával képzett külső szöglet $z = x + y$, — és $z = 2x$; ésígy az x-nek mértéke a' z' mértékének fele: úgyde a' z-nek mértéke $= BC$, — ésígy x-nek mértéke $= \frac{1}{2} BC$, vagyis a' szárai közt eső körívnek fele.

Ha a' körületre eső szögletnek egyik szára sem megy a' középponton keresztül, hanem vagy közbe fogják azt, mint $< BAD$, vagy mindenik szára egy felöl esik attól, mint $< BAE$: akkor is épen ezen szabály áll, — mert:

1) $< BAD$ vagy $x + s$ mértéke $= x$ mért. $+ s$ mért. $= \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} BD =$ a' szárai közötti körív fele.

2) $< BAE$ mértéke $= < EAC' - < BAC'$ mértéke. $= \frac{1}{2} EC - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} EB =$ a' szárai közötti körív' fele.

Végre az érintő-, és az érintés' pontjára húzható húr által képzett szögletnek is, minő FAB, FAD, mértéke a' szárai közt eső körívnek fele. — Mert ha az A érintés-pontra AC átmérő húzatik, az FAC szöglet egyenes lesz, mellynek tehát mértéke a' szárai közt eső félkörületnek fele $= 90^0$. Következőleg

1) az FAB szöglet' mértéke $= < FAC'$ mértéke $- < BAC'$ mértéke $= \frac{1}{2} ABC - \frac{1}{2} BC, = \frac{1}{2} AB$ körív.

2) az FAD szöglet' mértéke $= < FAC'$ mértéke $+ < CAD'$ mértéke, $= \frac{1}{2} ABC + \frac{1}{2} CD, = \frac{1}{2} ABD$ körív.

Id. 77. *Követk.* 1) Mindazon szögletek, EDF, EdF (id 77), mellyek ugyanazon EDdF szeletbe íratnak, egyenlők, — mert mindnyájoknak mértéke a' száraik közt eső ugyanazon körív' fele.

2) Mindazon szögletek, mellyek félkörbe íratnak,

vagyis a' mellyeknek száraik az átmérő' két végeire esnek, egyenesek. p. ABC, AbC.

70. §.

A' középpont és a' körület közt eső szögletnek BAC, Id. 78. *(id. 78.) mértéke a' szárai közt eső BC, és hátra meg-nyujtott szárai közt eső ED köríveknek félösszege.*

Úgyanis húzván a' BE húrt, képeztetik △BEA, mellynek külső szöglete BAC = BEC + ABE. Úgyde ezen utóbbi két szögletek' mértéke együtt = $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$ED; ésigy a' BAC szögletnek is mértéke = $\frac{1}{2}$(BC + ED).

71. §.

A' körületen kivül eső szögletnek BaC mértéke a' Id. 78. *szárai közt eső két (völgyes BC, és hátas ED) körívek-nek félkülönbsége.*

Ugyanis (id. 78.) húzatván BD húr, képeztetik △BaD, mellynek külső szöglete BDC = EBD + BaC, ésígy

$$\angle BaC = \angle BDC - \angle EBD,$$

ezen két utóbbi szögletek' mértékei a' BC, és az ED körívek' felei: ésígy ∠BaC' mértéke ugyanezen körívek' félkülönbsége = $\frac{1}{2}$(BC — ED).

Ugyanezen szabály alá esnek azon szögletek is, mellyek akár két érintők-, akár egy szelő és egy érintő által képeztetnek, p. BaT.

72. §.

A' fentebbiekben (66. §.) a' szelőt és érintőt úgy Id. 78. tekintettük, mint határozatlan hosszaságu vonalakat: most már jegyezzük meg, hogy sajátlag szelőknek és

érintőknek határozott hosszaságu vonalak neveztetnek. Jelesen *szelő* azon egyenes vonal (p. Ba, Ca, id. 78.) mellynek hossza egy részről másik szelő vagy érintő által, más részről a' körületnek BC, völgyes része által határoztatik. — És az aE és aD neveztetnek a' Ba és és Ca szelők' külső darabjainak. — Hasonlóul *érintő* azon egyenes vonal (p aT.), mellynek hossza egyrészről az *a* pontban vele összejövő szelő által, másrészről az érintéspont által határoztatik.

73. §.

Id. 78. 79. *Két húrok, EC, BD, mellyek egy körben egymást keresztül metszik, viszontagosan arányos részekre oszlanak, miszerint BA: CA=AE: AD (id. 78).*

Ugyanis húzván BE és CD húrokat, képeztetnek AEB és ADC háromszögek, mellyek hasonlók, mivel megfelelő szögleteik egyenlők. Az egyenlő szögletekkel általellenes oldalok tehát illy arányban állnak: BA: CA=AE: AD.

Követk. 1) Ha egyik húr épen átmérő BD (id. 79.), a' másik EC erre függőleges, úgy hogy AE=AC: akkor ezen arány DA: AE=AC: AB, másként

így áll: DA: AE=AE: AB

azaz: *minden félhúr AE, melly az átmérőre függőleges, az átmérőnek általa elmetszett két darabjai közt középszeres.*

Követk. 2) Ha BE és ED húrok húzatnak: △BED egyenes-szögű az E szögletnél; 's itt a' körben találjuk fel épen azt, mit a' 62. §-ban az egyenes-szögű △-gekről tanulánk: DB: BE=BE: BA

DB: ED=ED: AD;

melly szabály itt így áll: *az átmérő' végére állított húr, középszeres az egész átmérő– és annak melette eső darabja közt.*

Követk. 3) A' két előbbi következményeken alapul két könnyü módja annak, miként lehessen két adott vonal között középszerest találni, t. i.

1) az adott két vonal' összege' DA + AB (id. 79.) felibe félkör húzatván, az összekötés' *A* pontjáról függöny eresztetik' fel a' körületig AE vagy AC, 's ez a' DA és AB közt középszeres.

2) Az adott nagyobbik vonal átmérő gyanánt vétetvén BD (id. 79.); a' kisebbik letétetvén B-től A-ig, — az A-nál AE függöny húzatván, — a' BE vonal lesz a' keresett középszeres.

74. §.

Két szelők aB, aC (id. 78.), mellyek egy közös a id. 73. *pontból indulnak, a' körön kivül eső aE, aD darabjaikkal viszontagosan arányosok, úgy hogy: aB : aC = aD : aE.*

Ugyanis húzatván CE és BD húrok, képeztetnek *a*BD és *a*EC háromszögek, mellyek hasonlók, mivel megfelelő szögleteik egyenlők; 's az egyenlő szögletekkel általellenes oldalokról illyen arány áll:

$$aB : aC = aD : aE.$$

75. §.

Az AT érintő (id. 80.) melly az AB szelővel ugyan- id. 80. *azon A pontból indúl, középszeres az AB szelő, és annak külső darabja AD között.*

Húzván a' BT és DT húrokat, az ABT és ADT háromszögek hasonlók, mert < A közös, < ABT = <

ATD, mert mindeniknek mértéke $= \frac{1}{2}$ DT körív, — 3-dik 3-dikkal tartozik egyenlő lenni. Ésígy illyen arány áll:

$$AB : AT = AT : AD.$$

TIZEDIK CZIKKELY.

A' rendes sokszögekről, 's azoknak körhözi viszonyáról.

76. §.

id. 81. Látánk már (38. §.), hogy *rendes sokszög az, mellynek minden oldalai és minden szögletei egyenlők.* Ez szükségképen domború; 's lehet bárhány oldala, kettőn felül. A' rendes sokszögben p. ABCDEF (id. 81.), a' körülírható kör' középpontja O, a' *sokszögnek* is *középpontja,* — és az AOB, BOC 'sat. szögletek *középponti szögletek.* Annyi középponti szöglet van, a' hány oldalú a' sokszög; és mivel minden középponti szögletek' összege $= 4r = 360^0$: innen (az oldalok' számát jelentvén n), egy-egy azok közül $= \frac{4r}{n} = \frac{360^0}{n}$.

A' sokszög' szögleteibe a' középpontból húzható vonalak OA, OB, OC 'sat. a' *sokszög' sugarai.* A' középpontból valamellyik oldalra húzható függöny OH, OI, 'sat. pedig neveztetik *apothema*-nak. Ugyanazon rendes sokszögben lehető minden apothemák egyenlők, — és mindenik két egyenlő részre osztja azon középponti szögletet, mellyből jő, és azon oldalt, mellyen áll. — Azonban mivel $\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{BH}^2$, látnivaló, hogy a' *rendes sokszögben a' sugár' négylege annyi, mint az apothema' négylege, és fél oldal' négylege összesen.*

Két rendes sokszögek, ha egyenlő számú oldaluk, és egyenlő sugaruk van, egyenlők.

Két rendes sokszögek, ha egyenlő számu oldaluk van, hasonlók; — mert birnak mindazon tulajdonokkal, mellyeket a' hasonló sokszögekről tanulánk (64. §.) t. i. hasonló háromszögekből vannak összetéve; mert az ugyanannyi oldalú, akár kisebb, akár nagyobb sokszögekben képezhető △-gek' szögletei megfelelőleg egyenlők, mivel csúcsaik egyenlők, már pedig ama szögletek ezen csúcsok' felei (lásd 40. §.). Következőleg

A' rendes hasonló sokszögek' kerítései az ő egyes oldalaikkal arányosok; — 's innen

A' rendes hasonló sokszögek' kerítései az ő sugarukkal és apothemájokkal arányosok.

Mikor a' sokszög' minden szögleteinek csúcsa kör- Id. 82.
körületen esik, 's így annak minden oldala húr: akkor a' sokszög *körbe írott*-nak, 's a' kör ehhez képest *körülírott*nak; — midőn pedig a' sokszög' minden oldala érintő a' körületre, akkor a' kör *sokszögbe írott*nak, 's a' sokszög *körülírott*nak nevezteték. p. o. (id. 82.) az *abcdef* sokszög *körbeírott*, az ABCDEF pedig *körülírott*.

Mivel a' körnek sugara, mint id. 81. mutatja, a' beleírott rendes sokszögnek is sugara, — a' körülírottnak pedig apothemája: innen látnivaló, hogy *a' rendes hasonló sokszögek' kerítései, azon körnek sugarával, mellybe, vagy melly körül írottak, arányosok.*

Mivel a' köröket úgy lehet tekinteni, mint végetlen-sok-oldalu rendes sokszögeket; melly sokszögeknek oldala egy-egy pont a' körületen, ésígy apothemájok sugarukkal egyenlő: innen látnivaló, hogy *minden körök, mint egyenlő számu (végetlen sok) oldalu sokszögek egymáshoz hasonlók;* mit már fentebb abból is láthatánk, mert minden kör' körülete egyenlő (360°) részekre osztatik, ésígy csak nagyságukra nézve

különböznek egymástól. Innen *több körök' körületei (P, p) olly viszonyban vannak egymáshoz, mint azoknak sugarai (R, r)*,

$$P : p = R : r;$$

és mivel a' sugarak úgy vannak egymáshoz, mint az ő kettőzeteik, t. i. az átmérők (D, d): innen *a' körületek úgy vannak egymáshoz, mint az átmérők*: $P : p = D : d$. — És a' körületeknek bármelly megfelelőleg egyenlő részei, vagy a' körívek is úgy vannak egymáshoz, mint a' sugarak, vagy az átmérők.

77. §.

Id. 83. *Négyleget, vagy négyoldalu rendes sokszöget körbe írni, 's oldalának a' körülírott kör' sugarához viszonyát megtalálni.* (id. 83.)

Húzatván két átmérő AB, CD, egymásra függőlegesen,— húzatnak AC, CB, BD, és DA húrok; és ACBD lesz a' kivánt négyleg, mivel minden oldalai és szögletei egyenlők.

Az AOC háromszög az O-nál egyenes-szögü levén, ád illyen egyenletet:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2,$$

vagy a' sugárt nevezvén R-nek, mivel mind AO, mind OC = sugár = R:

$$\text{lesz: } \overline{AC}^2 = 2R^2,$$

$$\text{innen: } AC = \sqrt{2R^2};$$

és ha a' sugár megtétetik *egy*-nek = 1:

$$\text{lesz: } AC = \sqrt{2};$$

ésígy a' négyleg' oldalának a' kör' sugarához viszonya $= \sqrt{2} : 1 = 1{,}4142 : 1$.

78. §.

Rendes hatszöget körbe írni, 's oldalának a' kör' Id. 84. *sugarához viszonyát megtalálni.*

Tegyük fel, hogy a' feladat már meg van fejtve; — legyen AB (id. 84.) a' rendes hatszög' egy oldala, — melly tehát $^{360}/_{6} = 60^{0}$-nyi körív' húrja, — ésígy $< AOB = 60^{0}$; úgyde $\triangle ABO$ egyenszáru, mert AO = BO, sugarak, ésígy $< A = < B$, — tehát mindenik $= 60^{0}$; innen $\triangle ABO$, mivel mind a' három szöglete egyenlő, t. i. 60^{0}-nyi, — tehát egyenoldalú; következőleg a' rendes hatszögnek minden külön oldala = sugár. — Innen rendes hatszöget körbe úgy írhatni, ha a' kör' sugara a' körületre hatszor letétetik. — Oldalának viszonya tehát a' kör' sugarához = 1 : 1.

79. §.

Egyenoldalú háromszöget, vagy 3 oldalú rendes Id. 84. *sokszöget körbe írni, 's oldalának a' kör' sugarához viszonyát megtalálni.* (id. 84.)

Miután rendes hatszöget körbe írtunk: 3 oldalu rendes sokszöget könnyü körbe írni; t. i. a' hatszögnek minden 3-dik csúcsát A, C, E, kössük össze egyenes vonalakkal, 's kész az egyenoldalú háromszög, — mert az AC, CE, EA, egyenlő körívek' húrjai levén, egymással egyenlők.

Továbbá $\triangle ACD$ a' C-nél egyenesszögü levén, illyen arányt ad:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2,$$

vagy : $\overline{AC}^2 = (2R)^2 - \overline{CD}^2$

vagy : $\overline{AC}^2 = 4R^2 - R^2$

végre: $\overline{AC}^2 = 3R^2$;
innen: $AC = R\sqrt{3}$;
és ha $R = 1$: tehát $AC = \sqrt{3}$.

Az egyenoldalú háromszög' egyegy oldala tehát a' körülírott kör' sugarához olly viszonyban van $= \sqrt{3} : 1$, $= 1{,}732.. : 1$.

80. §.

Id. 85. *Rendes tizszöget körbe írni, 's oldalának a' kör' sugarához viszonyát megtalálni.*

Tegyük fel, hogy a' feladat már meg van fejtve; — legyen AB (id. 85.) a' rendes tizszög' oldala. Az AB körív, vagy AOB szöglet $= {}^{360}/_{10} = 36^0$; továbbá a' tízszögnek szöglete levén (40. §. szerint)

$$= \frac{(n-2).2r}{n} = \frac{8.180}{10} = \frac{1440}{10} = 144 : \text{innen} <$$

OBA, akár $< OAB = 72^0$, épen kétakkora mint $< BOA$. Ezeket tudván: osszuk fel az OAB szögletet az AK vonallal két egyenlő részre. Az OBA háromszög felosztik ekként két egyenszárú $\triangle$-re, OAK és KAB-re, mellyekben $AB = AK = OK$. — Továbbá mivel az ABK és AOB háromszögek hasonlók, (a' B szöglet közös, — $< KAB = < AOB$ levén): illyen arány áll azokban:

$$BK : AB = AK : AO,$$

vagy egyenlők helyett egyenlőket tevén:

$$BK : OK = OK : OB.$$

Ezen arány azt mutatja, hogy itt az OB sugár két ollyan részre, OK és KB, van felosztva, mellyek közül a' nagyobbik OK közép-arányos az egész sugár és annak kisebbik osztálya közt, — vagy mint kifejezik, az OB sugár *közép-és vég-arányosan van felosztva* (media

et extrema ratione secta); és mivel OK = AB = rendes tízszög' oldala: látni-való, hogy a' rendes tízszög' oldalát megtaláljuk, ha a' kör' sugarát közép- és végarányosan felosztjuk.

Azonban az OB sugárt megtevén = 1-nek, és OK = AB = x, KB = 1—x: a' fentebbi arány: BK: OK = OK: OB

így lesz: $1-x : x = x : 1$,

innen egyenlet: $x^2 = 1 - x$,

innen: $x^2 + x = 1$,

gyökér: $x + \frac{1}{2}$

kipótolva: $x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

innen: $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times 5}$.

innen: $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 5}$

vagy: $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

vagy: $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Az x-nek csak igenleges értéke lehetvén az, melly a' feladatnak megfelel: x, vagyis a' rendes tízszög' oldala $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; — ésígy ezen oldalnak a' sugárhozi viszonya ez $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : 1. = 0{,}618 : 1.$

Követk. Rendes ötszöget lehet csinálni, ha a' rendes tízszögnek 3-dik csúcsait váltogatva egyenes vonalakkal összekötjük.

81. §.

Adatván valamelly körbe írott rendes sokszög' oldalának értéke: kétszerte több oldalú rendes sokszög' oldalának értékét kikeresni. id. 86.

Legyen AB (id. 86.) a' kiadott sokszög' oldala. Az AEB körív két egyenlő részre osztatván az E-nél, az AE húr mutatja a' keresett sokszög' oldalát.

Ezen AE vonal (73. §. *követk.* 2.) középszeres az EF átmérő- és annak EC metszéke közt,

$$EF : AE = AE : EC,$$

innen : $\overline{AE}^2 = EF \times EC.$

Ezen egyenlet' utolsó részét ollyan mennyiségekkel szükség kifejezni, mellyek kiadatvák; azok pedig a' sugár $AO = R = 1$, és AB, mellyet nevezzünk el = a-nak. — Erre nézve: $EF = 2R$, $AC = \frac{1}{2}a$, $EC = R - OC$. Úgyde az ACO háromszögben:

$$\overline{OC}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AC}^2,$$

vagy : $OC = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AC}^2}$

vagy : $OC = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}a)^2}$

vagy : $OC = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}.$

Ezen értékeket helyette tévén, lesz :

$$\overline{AE}^2 = 2R \times \left(R - \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}\right)$$

vagy mivel $R = 1$:

$$\overline{AE}^2 = 2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}\right)$$

innen : $AE = \sqrt{2 \cdot (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2})}.$

Ezen számitás' nyomán ki lehet csinálni

a' 3, 6, 12, 24, 'sat. oldalú,

vagy: 4, 8, 16, 32, 'sat. oldalú,

vagy: 5, 10, 20, 40, 'sat. oldalú

körbe irott rendes sokszögek' oldalát. P. o. ha a' rendes tizszög' oldala $AB = a = 0{,}618$, (80 §.): innen a' rendes húsz-szög' oldalára AE nézve ez az egyenlet:

húsz-szög' old. $AE = \sqrt{2 \cdot (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot (0{,}618)^2})}$

$= 0{,}313.$

Egy oldal' számi értekét az oldalok' számával sokszorozván: kijö az egész kerítés' számi értéke. P. o. a' körbeírott rendes tizszög' keritése (a' sugárhoz, mint 1-hez viszonyítva) lesz: $= 0{,}618 \times 10 = 6{,}18$.
A' rendes húszszögé: $= 0{,}313 \times 20 = 6{,}26$.

82. §.

Adatván valamelly körbeírott rendes sokszög' oldalának számi értéke: ugyanannyi oldalú körülírott sokszög' oldalának értekét kikeresni. id. 86.

Legyen AB (id. 86) az adott körbeírott sokszög' oldala. Az A és B pontokra húzzunk érintöket, melyek a' D pontban összejövén, a' körülírható sokszögnek egy csúcsát képezik: 's így AD = BD = a' körülírott sokszög' oldalának fele.

Ezek így levén: az AOC, és ACD egyenesszögü hasonló háromszögekben illyen arány áll:

$$OC : OA = AC : AD. \quad (1)$$

Már a' körülírandó sokszög' egy oldalát A-nak nevezvén, — 's ismételvén, mit az elöbbi §-ban mondánk, hogy t. i.:

$$AB = a,\ OA = R, \text{ és } OC = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}a^2};$$

a' fentebbi (1) arányból illyen egyenlet lesz:

$$AD = \frac{OA \times AC}{OC}$$

$$\text{vagy: } \tfrac{1}{2}A = \frac{R \times \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}a^2}}$$

$$\text{vagy: } A = \frac{R \times a}{\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}a^2}}$$

és mivel R = 1:

innen: $A = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}$

Ezen szabály' alkalmazása által, az előbbi §-ban említett körbeírott sokszögeknek megfelelő körülírott sokszögek' oldalát is, — és azoknak sugárhozi viszonyát ki lehet számítni. P. o. a' tízoldalú körülírott rendes sokszög' egy oldala = A, (miután a = beírott tizszög' oldala = 0,618) lesz:

$$A = \frac{0{,}618}{\sqrt{1-\frac{1}{4}.(0{,}618)^2}} = 0{,}649....$$

A' körülírott 20-szögé (miután a = 0,313 . .) lesz:

$$A = \frac{0{,}313}{\sqrt{1-\frac{1}{4}.(0{,}313)^2}} = 0{,}317...$$

Miután akármelly körülírott sokszögnek egy oldala ki van számítva; ha azt az oldalok' számával sokszorozzuk: az egész keritést, 's ennek sugárhozi viszonyát nyerjük. P. o. a' körülírott rendes tízszög' keritése lesz: = 0,649×10 = 6,49. A' rendes 20-szögé pedig: = 0,317×20 = 6,340.

83. §.

Kör' körületét egyenesítni.

A' kör' körületét egyenesítni (rectificare) annyit tesz, mint kimutatni annak hosszát egyenes vonalban, — vagyis inkább annak bizonyos egyenes vonalhoz-, jelesen a' sugárhoz, vagy átmérőhözi viszonyát.

Látánk már fentebb, hogy a' kör = végetlen sok oldalú sokszög. Ha az előbbi §-okban előadott szabályok szerint, a' végetlen sokoldalú sokszögnek egyegy oldalát, 's onnan minden oldalai' összegét, vagyis egész keritését kiszámíthatnánk: ez lenne a' kor' körülete, —

's ennek 1-hezi viszonya mutatná a' körületnek sugárhozi viszonyát, — 's ugyanannak 2-hözi viszonya, a' körületnek átmérőhözi viszonyát. De végetlen sok oldalú sokszögre számitást nem tehetünk; 's innen látnivaló, hogy a' körületnek sugárhoz- vagy átmérőhözi viszonyát teljesen kimerítőleg ki nem számíthatni.

Azonban ha a' 81 és 82 § nyomán minél több oldalú (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 'sat.), akár beírott, akár körülírott sokszög' kerítését kiszámítnánk: annyira fognánk közelítni a' kör' kerítéséhez, hogy figyelemre sem méltó különbség lenne közöttök; annyival inkább ha ugyanannyi (p. 640) oldalú mind körülírott, mind beírott sokszögnek kerítését kiszámítván, a' kettő közt középszerest veszünk, — mivel a' körülírotté valamivel nagyobb, — a' beírotté pedig valamivel kisebb lenne mint a' körkörület, 's így ez azok közt középszeres.

Illyen számitással menvén több több oldalú sokszögekre: úgy találták, hogy a' 12288 oldalú

körbeírott sokszög' kerítése = 6,2831852...

körülírotté . . . . . = 6,2831854...,

mellyek már olly közel járnak egymáshoz, hogy akármellyiket vehetnénk a' kör' kör-lete helyett; de azonban vegyünk helyettök középszerest, = 6,2831853.

Innen a' sugárnak körülethezi viszonya ez:

1 : 6,283 . . . . . .

És az átmérőnek körülethezi viszonya ez:

2 : 6,283 . . . .

vagy: 1 : 3,14 . . . .

Már a' körületnek az átmérőhöz, mint 1-hezi viszonyát mutató szám = 3,14 kifejeztetik π-vel, — vagy a' sugárhoz mint 1-hezi viszonya 2π-vel.

Mivel pedig (76. §) a' mint van egy körnek sugara a' maga körületéhez: úgy van más akármelly körnek sugara (R) is a' maga körületéhez (x); innen:

$$1 : 2\pi = R : x,$$

innen: $x = 2\pi R$.

Ezen képlet tehát: $2\pi R$, mutatja akármelly kör' körületét; melly képletben $\pi = 3{,}14$, — R pedig a' kiadott sugár.

P. o. Ha a' sugár = 6 öl: mennyi a' körület? — $= 2.3{,}14.6 = 37{,}68$.

Jegyzék. A' körületnek átmérőhözi viszonya *Archimedes* szerint ez: 7:22; *Metius* szerint: 113:355; — de legszokottabb az, mellyet adánk: 1:3,14 vagy: 100:314, melly *Ludolph* nevű első kiszámítójától *Ludolphi szám*-nak neveztetik. Nagy pontosságot kivánó égtani munkálatokban két tizedes jegy nem elég; további számitás szerint:

$\pi = 3{,}14159\ 26335\ 89793\ 23846$

logar. $\pi = 0{,}49714\ 98726\ 94153\ 85435$.

TIZENEGYEDIK CZIKKELY.

Nehány hosszmérési feladatok.

84. §.

Id. 87. *Két pontnak A és B (id. 87.), mellyek közt egyenesen menni nem lehet, de egy harmadik C pontból mindenikhez egyenesen mehetni, egymástóli távolságát megmérni.*

1) Karót ütvén le függőlegesen a' C-nél, meg kell mérni lánczczal a' CA távolságot, — 's visszafelé menvén, épen annyit egyenes vonalban ki kell mérni a' D-ig, 's ott karót ütni le. Hasonlólag meg kell mérni a' CB távolságot is, — 's hátrafelé ugyanannyit az E-ig, — 's ott is karót ütni le. Ekkor a' D az E-től épen annyira

lesz, mint a' B az A-tól, — vagy DE = AB; — mert △ABC = △CDE, mivel két oldal két oldallal, és a' közbeneső szögletek egyenlők. — Ésígy csak a' DE vonalt kell megmérni.

2) Vagy pedig az AC és BC vonalaknak csak bizonyos-, de ugyanannyid-, p. o. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 'sat. részét mérjük ki visszafelé a' G-ig és F-ig, 's azon pontoknál karókat ütünk; és valamint FC = $\frac{1}{3}$AC, és CG = $\frac{1}{3}$BC: úgy FG = $\frac{1}{3}$AB; — mert △FCG ∽ △ABC, mivel oldalaik arányosak; — ésígy: FC : AC = FG : AB. — Ésígy az FG-t megmérvén, azt háromszor vesszük, 's lesz = AB.

3) Asztallal így: miután a' CA és CB vonalakat lánczczal megmérettük: letévén a' mérő asztalt vízirányos állásban úgy, hogy a' földön lévő C pontnak megfelelő pont, függöny' segitségével az asztalon megjegyeztessék: ezen megjegyzett ponttól *irányzóval* (dioptra) nézvén az A felé, húzunk ezen irányban vona'at, a' meddig lehet az asztalon; — így a' B felé is. Ekkor a' hány öl lánczczal a' CA, annyit felveszünk a' kismértékből czirkalommal, 's letesszük a' CA vonalra = CI; — 's a' hány öl lánczczal a' CB, leteszünk annyit kismértékben a' CB vonalra = CH; — a' H és I pontokat összekötjük IH vonallal; ekkor az IH vonal kismértékben épen annyi, mint az AB nagyban. — Ugyanis az ABC háromszög' oldalait az IH vonal arányosan metszi, mert AC : CI = BC : CH, — mivel a' CI kismértékben annyi, mint AC nagyban, — és a' CH kismértékben annyi, mint BC nagyban; — ésígy IH az AB-vel egyközü; a' honnan △ABC ∽ △ICH; — ésígy ezekben illy arány áll:

CI : CA = IH : AB,

azaz, valamint CI kismértékben annyi, mint CA nagyban: úgy IH kismértékben annyi, mint AB nagyban.

85. §.

Id. 83. *Két pontoknak, mellyek közül egyikhez menni nem lehet, egymástóli távolságukat megmérni.*

1) *Egyenoldalú* △*-ggel.* Indulj el az A-tól 60 foknyi szöglet alatt, 's menj egyenes vonalon mindaddig, míg ollyan pontot nem találsz, mellytől az A és B felé húzható vonalak ismét 60 foknyi szögletet képezzenek. Legyen ezen pont C, — ott üttess le karót, 's az itt képzett ABC háromszög egyenoldalú lesz, — mert minden szöglete 60 foknyi. Ennek tehát minden oldala egyenlő levén, mérd meg az AC-t, — az =AB.

Id. 89. 2) *Egyenszárú* △*-ggel.* Indulj el az A-tól ollyan szöglet alatt, a' minő alatt az akadályok miatt lehető. Ha p. o. indultál 105 foknyi szöglet alatt: menj egyenes vonalban mindaddig, míg egy olly pontot nem találsz, — a' C-nél —, mellytől az A és B felé húzható vonalok $37\frac{1}{2}$ foknyi szögletet képezzenek. Ide karót üttetvén, az ACB háromszög egyenszáru lesz, — mert a' B-nél eső szöglete is $37\frac{1}{2}$ foknyi. Ésígy AC=AB; és csak az AC-t méresd meg.

Id. 90. 3) A' *B* ponttól két felől egyenlő távolságra, a' C és D pontoknál karókat kell leütni. A' C-től az A felé nézhető vonalon akárhol kitüzvén egy pontot E, 's oda is karót ütvén, az EB távolságot meg kell mérni, — 's ugyanannyit visszafelé az F-ig, — 's itt is karót ütni. Ekkor keresni kell egy ollyan pontot, — a' G-nél, mellyből az F és D karókat egy felől —, más felől pedig a' B és A tárgyak' közepét egyenes vonalban lát-

hatni. Ha ezen pont eltaláltatott: a' BG távolság egyenlő az AB-vel, — ésígy csak a' BGt-t kell megmérni.

Ugyanis: $\triangle ACB = \triangle BDG$, mert $CB = BD$, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DBG$ — csúcsszögletek; — hogy pedig $\sphericalangle x = \sphericalangle y$: az két kisebb háromszögek' egyenlőségeből tünik ki; t. i. $\triangle EBC = \triangle BDF$, mert $EB = BF$, $CB = BD$, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DBF$; tehát az x szöglet is egyenlő az y-nal. Így tehát $\triangle ACB = \triangle BDG$, — 's innen $BG = AB$.

4) *Asztallal.* Letévén az asztalt a' B-nél épen a' B pont felett (mellyet a' földön az asztal alatt lenni képzeljünk), megszúrom tüvel a' *b* pontban, 's az irányzó mellett vonalat húzok az A felé, a' meddig az asztalon lehet. Ekkor felveszek egy harmadik — C — pontot, 's az felé is húzok az asztalon vonalat; 's megméretvén lánczczal a' BC távolságot, felveszem czirkalommal a' kís. értekemről, 's leteszem a' *bc*-ben. Ekkor általviszem az asztalt a' C-hez, úgy hogy a' c pont essék a' C felibe (mellyet ismét a' földön, az asztal-, 's épen a' c pont alatt lenni képzeljünk); és az asztalt olly helyzetbe hozom, hogy a' bc vonal, visszafelé nézve, az előbbi irányában legyen. Itt arányzó mellett húzok a' c ponttól az A felé tartó vonalat; ezen vonal az előbbi álláspontból az A felé húzott vonalat metszi az *a*-nál; 's azt állítom, hogy *ba* kismértékben épen annyi, mint BA nagymértékben. Ill. 91.

Ugyanis: $\triangle cba \sim \triangle CBA$, mert $\sphericalangle c = \sphericalangle C$ (mellyet a' földön lenni képzelünk); — $\sphericalangle b = \sphericalangle B$ (melly felett állott a' $\sphericalangle b$ az első álláspontban), — 3-dik = 3-dik. Ésígy áll illyen arány: $bc : BC = ab : AB$, azaz valamint *bc* kismértékben = BC nagyban: úgy *ab* kismértékben = AB nagyban.

86. §.

Két pontoknak A és B egymástóli távolságát egy ollyan harmadik pontból C megmérni, mellyből egyikhez sem lehet járulni.

Id. 92. 1) *Karókkal* (id. 92). Vegyünk fel a' C ponttól kétfelől egyenlö távolságra esö pontokat D és E, 's azoknál karókat üttessünk, — lesz CE = CD. Már az E-től az A felé nézvén egyenes vonalban, üssünk le karót akárhová, p. az F-nél; ekkor az FC vonalat megmérvén, vigyük által a' CG-re. Most már keressünk egy ollyan pontot — a' H-nál, mellyből egy részről a' G a'D-vel, más részről a' C az A-val egyenes vonalban láttassék. — Hasonlóul nézvén a' D-ből a' B-hez egyenesen, karót ütünk az I-nél, és az IC vonalat általvisszük a' CK-ra; — 's ekkor keresünk egy ollyan pontot az L-nél, mellyből egy részről a' K az E-vel, — más részről a' C a' B-vel egyenes vonalban láttassék. És most az L karó a' H-tól épen annyira van, mint az A a' Btöl, — vagy LH = AB.

Ugyanis: △LCH = ACB, mert LC=CB, mi kitünik abból, mivel △ECL = △BCD (l. 85. §. 3); — továbbá CH = CA, mivel △HCD=△AEC (l. 85. §. 3); — végre a' közben esö szögletek egyenlök, mint csúcsszögletek. Tehát ezen △-gek egyenlök levén: LH=AB.

Id. 93. 2) *Asztallal.* Leteszem az asztalt a' C pont felett, 's a' *c*-t a' C' függöleges irányában tüvel megjegyzem; — ezen tü mellett irányzóval húzok vonalakat a' B, az A, és egy felvett másik álláspont D felé, — 's a' CD vonalat megméretvén lánczczal, kismértékben leteszem = *cd*. Ekkor ezen vonalakkal általviszem az asztalt a' D álláspontra, úgy hogy *d* a' D felibe essék, és a' *dc* vonal elöbbi irányában legyen. Itt a' *d*-töl húzok vona-

lakat mind az A, mind a' B felé ; és a' hol ezen most húzott vonalak az előbbi C álláspontból ugyancsak az A és B felé húzott vonalakat metszik, az *r* és *s* pontokat összekötöm; és ezen *rs* vonal kismértékben annyi, mint AB nagyban.

Ugyanis: $\triangle ABD \sim \triangle rsd$, mert az *rs* az ABD háromszög' oldalait arányosan metszi. — T. i. mind a' *ds* annyi kismértékben, mint a' DB nagyban, — mind a' *dr* annyi mint DA.

1) $\triangle dcs \sim \triangle DCB$, mert $\angle d = \angle D$, $\angle c = \angle C$ (egyik az asztalon, másik a' földön), — 3-ik = 3-ikkal. Ésígy: dc : DC = ds : DB, — azaz valamint dc = DC: úgy ds = DB, egyik kismértékben, másik nagyban.

2) $\triangle rdc \sim \triangle ADC$, mert $\angle d = \angle D$, $\angle rcd = \angle ACD$, 3-ik=3-ik. Ésígy: dc : DC = dr : DA. — Innen

3) ds : DB = dr : DA;

Ésígy $\triangle drs \sim \triangle DAB$, és dr : DA = rs : AB.

87. §.

Tér-rajznak (ichnographia) neveztetik az ollyan rajzolat, melly valamelly térnek, p. darab földnek, erdőnek 'sat. képét kis formában mutatja. A' térrajznak mulhatlan tulajdona az, hogy ennek minden oldalai, az eredeti térnek minden megfelelő oldalaihoz hasonlók, vagyis kismértékben épen akkorák legyenek, mint amazok nagyban: így az egész térrajz hasonló lesz a' maga eredetijéhez. — A' térrajz' készítésében épen azon munkálatok fordulnak több ízben elő, mellyek akkor, midőn valamelly egyes vonalat állítunk kismértékben elő. P. o.: Id. 94. 95.

1) Ha a' tér ABCDEF (id. 94) ollyan, hogy minden irányban lehet rajta keresztül lánczot húzni, 's valamelly belől eső pontjából minden szögletébe el lehet

látni akadály nélkül: letévén az asztalt valahol a' téren belöl, 's póznákat állítván az A, B, C 'sat. szögletekbe: az asztalon megjegyzett O ponttól minden szögletekbe vonalak — OA, OB, OC 'sat. húzatnak, — azonban az OA, OB 'sat. távolságok lánczczal megméretvén, az asztalra kismértékben — Oa, Ob, Oc 'sat. letétetnek, — ezen kis vonalak összeköttetnek: 's készen van az *abcdef* tér-rajz, melly az ABCDEF térhez hasonló.

Id. 95. 2) Ha pedig a' téren keresztül lánczot nem húzhatni, — 's belsejéből minden szögleteibe nem láthatni: akkor (id. 95) az asztalt egy szögletébe, p. az *a*-ba letévén, néz az ember a' két közelebbi szögletekben felállított poznák felé; az *ab* és *ae* megmért távolságokat kismértékben, az asztalon azok' irányában húzott vonalakra leteszi, ab', ae'. Ekkor viszi az asztalt a' *b* szögletbe úgy, hogy a' b' pont a' b felibe essék, 's visszafelé a' *ba'* vonal a' *ba* felé irányoztassék. Ekkor megmérvén a' *bc* távolságot: azt is kismértékben az asztalra leteszi = bc'. — Ismét viszi az asztalt a' *c* szögletbe az előbbi módon, 's a' *cd* vonalat megméretvén, az asztalon azon irányra húzott vonalra leteszi, = cd'. A' d' pontot az e'''-vel összeköti, 's készen van az a''b'cd'e''' tér-rajz, melly a' maga' eredetijéhez hasonló.

88. §.

Magasságot mérni.

Valamelly tárgy' magassága — mint tudjuk — azon vonal, melly annak tető-pontjáról az aljára függőlegesen húzatik, vagy húzatni gondoltatik. Ez vagy *természettani* vagy *tértani*. Az elsön értjük a' tárgy' (p. hegy') tetejének a' tenger' szine feletti felemelkedését, — 's ezt légsulymerővel (barometrum) szokták mérni — Az

utóbbin értjük a' tárgy' (p. torony') tetejének az aljától távolságát, — mellyet tértani szabályok szerint mérhetni.

89. §.

Hozzájárulható magasságot megmérni.

1) *Karókkal.* A' CD és EF különböző magasságu karókat leütjük függönyösen, úgy hogy a' kettő' tetejét a' BA torony' tetejével egy vonalban lássuk; — a' BF = HE vonalat megmérjük. — Itt van $\triangle ECG \sim \triangle EAH$, mivel $<E$ közös, $<G = <H$ — egyenes-szögek. Ezekben illyen arány áll: EG : EH = CG : AH; Id. 96

$$\text{innen: } AH = \frac{EH \times CG}{EG},$$

melly egyenlet' utóbbi részének minden tagjai ismertek levén (t. i. EH = a' távolabbi karónak toronytóli távolsága, — CG = a' két karó' magassága közötti különbség; — EG = a' két karó' egymástóli távolsága): az AH kiszámíttathatik; mellyhez még hozzá kell adni HB = EF-et, azaz a' kisebbik karó' magasságát.

2) *Asztallal.* Letévén az asztalt függőleges állásban a' C pontnál, ezen C pontnak épen függönyösen felette megszúrjuk az *o* pontot; ettől az irányzó mellett viziránYosan nézünk a' H felé, — és a' CB = oH távolságot megméretjük lánczczal, — 's annyit kismértékben leteszünk = or, — ezen r pontra függönyt állítunk; — ugyanezen *o*-ból húzunk vonalat a' torony' teteje felé is = oA, és a' mint ezen vonal a' függönyt metszi, az *rx* vonal kismértékben annyi, mint HA nagyban. Mert $\triangle orx \sim \triangle oHA$, mivel $<o$ közös, $<r = <H$. Ésígy: or : oH = rx : HA. — Így a' HA-t meg- Id. 97

találván, hozzáadjuk HB = oC-t, azaz *o* pontnak földfeletti magasságát

Jegyzék. 1) Ha a' toronytól az asztalig lánczot nem lehetne húzni: a' fentebb előadott módokon meg kell mérni azon távolságot.

2) Árnyékból is lehet hozzájárulható magasságot mérni. A' mint van valamelly karó' árnyéka, annak magasságához: úgy van a' torony' árnyéka, ugyanazon időben, annak magasságához.

90. §.

Ld 98. *Hozzá nem járulható magasságot megmérni.*

Felvévén két pontot, C-t és D-t, ezeknek távolságukat = CD megmérem, — 's leteszem az asztalt előbb a' C-nél úgy, hogy az *o* épen a' C felibe essék; — húzok rá víziránnyos vonalat a' D és B felé, — erre a' CD távolságot kismértékben leteszem = or. Húzok vonalat az A felé is = oA. Ekkor általviszem az asztalt a' D-hez, úgy hogy az *r* pont épen a' D felibe essék; — 's húzok az r-ből is vonalat az A felé, — 's a' hol ez az előbbi álláspontból az A felé húzott vonalat metszi, az x-nél, leeresztek függönyt = xs, és ez kismértékben annyi, mint AB nagyban, — mellyhez még az *o* pont' földfeletti magassága = BF adatik.

Ugyanis:

1) △xro' ∽ △ Aro, — mert <r közös; <o' = <o, általhozott; ésígy áll illy arány: ro' : ro = rx : rA, azaz: valamint *ro'* kismértékben annyi, mint ro = DC nagyban: úgy *rx* kismértékben = rA nagyban.

2) △rxs ∽ △rAB, mert <r közös, <s = <B, egyenesszögek; ésígy áll illy arány: rx : rA = xs : AB; azaz valamint rx = rA: úgy xs = AB, egyik kismértékben, másik nagyban.

MÁSODIK SZAKASZ.

Területtan.

ELSŐ CZIKKELY.

Az egyenes vonalakkal zárt sík-idomok' udvarának méréséről.

91. §.

Az előbbi szakaszban megtanulánk a' területek' különféle neveit, mellyeket különböző idomaiktól nyertek; valamint azoknak főbb tulajdonait is, oldalaik' 's szögleteik' szempontjából, — mind magukban tekintve, mind egymáshoz viszonyítva: ezen második szakaszban, az előbbi tanulmányainkra támaszkodva, megtanulandjuk elsőben is, miként kell a' különféle idom alatti síkterületek' udvarait megmérni.

92. §.

Udvart mérni annyi, mint azt számokkal kifejezni. — Hogy számokkal kifejezhessük: szükség azt valami saját-fajta egységhez viszonyítni; vagyis meghatározni, hányszor tart az magában, vagy hányszor férne el azon valamelly egység gyanánt, viszonyitás' alapjául, tetszés szerint felvett udvar.

Illy mértékül szolgálandó udvar-egység gyanánt fel szoktak venni ollyan négyszöget, mellynek minden

oldala egyenlő valamelly vonal-mértéki egységgel. Például vonal-mértéki egységek: az *öl*, a' *láb*, a' *hüvelyk* 'sat.; udvar-mértéki egységek: a' *négyszögöl*, *négyszöglláb*, *négyszöghüvelyk* 'sat., mellyeknek minden külön oldala egyegy *öl*, *láb*, *hüvelyk* 'sat. Innen az udvarok' mérését nevezik *udvar-négyszögitésnek*.

Jegyzék. A' következőkben, rövidség' okáért, bárminő négyoldalú területet, az általellenes szögletekre — vagyis bármellyik szögszelő' két végire eső két betükkel fogjuk kimutatni.

93. §.

Két párlagok' (rectangulum) udvarai, ha talpaik egyenlők, olly viszonyban vannak egymáshoz, mint magosságaik. (id. 99.) Id. 99

Legyen azon két párlag BC és bc, mellyeknek talpaik egyenlők, BD = bd. Ha a' *bc* kisebbik párlagot rátesszük a' nagyobbikra, úgy hogy talpa *bd* annak talpára BD-re essék; mivel ezek egymást fedik: látnivaló, hogy udvaraik is fedik egymást ollyan magasságig, a' mekkora a' kisebbik párlagé; *a'c'*-ig. Tegyük fel, hogy a' kisebbiknek magassága *ab* felényi legyen, mint a' nagyobbiké AB: akkor a' kisebbik párlag' udvara a' nagyobbik párlag' udvarának felét fedi el; — ha $ab = \frac{1}{3}AB$: akkor *bc* párlag, BC párlagnak $\frac{1}{3}$ részét fedné el. — Nyilván van tehát, hogy a' párlagok' udvarai, ha talpaik egyenlők, olly viszonyban vannak egymáshoz, mint magosságaik:

udvar BC : *udvar* bc = AB : ab.

Követk. Mivel vehetjük az AB-t és *ab*-t talp gyanánt, a' BD-t és *bd*-t pedig magosság gyanánt: innen *a' melly párlagoknak magosságaik egyenlők, azoknak udvaraik olly viszonyban vannak egymáshoz, mint talpaik.*

94. §.

Két bárminő párlagoknak udvarai olly viszonyban id. 100.
vannak egymáshoz, mint talpaiknak magosságaikkali sokszorozmányai.

Az AD párlagnak (id. 100) legyen talpa AB, az *ad*-nek *ab*. Legyen Ab' = ab, — és *b'd'* az AC-vel egyközü: a' 93. §. szerint lesz:

udvar Ad' : *udvar* ad = AC : ac . . . . (1)

Továbbá az AD és Ad' párlagokban, mivel magosságuk egyenlő, áll illy arány:

udvar AD : *udvar* Ad' = AB : Ab'
— — — — = AB : ab . . . . (2)

Már az (1) és (2) viszonyokat sokszorozván egymással, lesz:

Ad' × AD : ad × Ad' = AC × AB : ac × ab;

az első viszony' mindkét tagjaiból ugyanazon sokszorozót Ad'-t kihagyván:

udvar AD : *udvar* ad = AC × AB : ac × ab.

95. §.

Bármelly párlagnak udvara = talpának magassá- id. 101.
gával sokszorozmánya. (id. 101.)

Tegyük fel, hogy a' kis *ac* négylegnek (id. 101) egyegy oldala, *ab*, vagy *ad*, legyen hosszmértéki *egység*, p. öl, láb 'sat.: úgy ezen *ac* négyleg' udvara lesz udvar-mértéki ugyanazon nevü *egység*, p. négyszög öl, négyszög láb, 'sat. Viszonyítsuk már az AC párlagot, ezen egység gyanánt felvett *ac* négyleghez: a' 94. §. szerint lesz illy arány:

udvar AC : *udvar* ac = AB × BC : ab × bc;

innen: $\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab} \times \frac{BC}{bc}$;

és mivel ac = udvarmértéki egység, — *ab* és *bc* pedig mindenik hosszmértéki egység: innen

$$\frac{AC}{1} = \frac{AB}{1} \times \frac{BC}{1},$$

vagy: *udvar* AC = AB×BC.

Melly utóbbi egyenlet azt jelenti, hogy ha az AB és BC vonalakra, *ab* vagy *bc* hosszmértéki egység rátétetik annyiszor, a' hányszor egyikben és másikban megtaláltatik: két szám fog előállani, mellyeknek sokszorozmánya mutatja, hogy az *ac* négyleg, mint udvarértéki egység, hányszor találtatik az AC párlagban.

E' szerint semmi sincs könnyebb, mint a' párlag' udvarának négyszögitése. P. o. ha ölet veszünk hosszmértéki egység gyanánt = ab, — és ez az AB talpra 3-szor fér le, a' BC magasságra pedig 4-szer (id. 101): lesz az AC párlag' udvara = 3×4 = 12 négyszeg-öl = 12 □⁰. — Ugyanez szemmel látható az idomon, ha mind a' talpnak, mind a' magosságnak, a' hosszmértéki egységeket mutató osztály-pontjainál egyközü vonalak húzatnak.

Követk. Mivel *a' négyleg* = ollyan párlag, mellynek minden oldalai egyenlők: látnivaló, *hogy annak udvara = akármellyik oldalának négylege*; vagy a' négyleg' udvarában annyi udvarmértéki-, vagyis négyszög egységek találtatnak, a' mennyit mutat egyegy oldalában levő ugyanazon nevü hosszmértéki egységeknek négyleg-hatványa. P. o. egy □ölben van 6^2 = 36 □láb, ha 6 láb tesz egy hosszmértéki ölet, — v. □öl = 100 □láb, ha 10 láb tesz egy ölet. — Egy □lábban van 12^2 = 144 □hüvelyk, ha 12 hüvelyk tesz egy lábat, — vagy egy □láb = 100 □hüvelyk, ha 10 hüvelyket szám-

tunk egy lábra. — Innen látnivaló, hogy a' melly viszonyban vannak a' kisebb fajta hosszmértéki egységek a' nagyobbakhoz: azon viszonynak négyleg hatványában lesznek az ugyanazon nevü udvarmértéki kisebb egységek, az ugyanazon nevü nagyobbakhoz. P. o.

hosszmért. öl : láb = 6 : 1

udv. mér. □öl : □láb = 36 : 1

96. §.

Bármi-fajta egyközénynek, p. az ABCD ferde-párlagnak udvara = talpának magosságávali sokszorozmánya (id. 102.) Id. 102.

Ugyanis húzván függönyöket, DE-t az AB-re — és az AB folytatására a' CF-et: képeztetik két háromszög ADE és BCF, mellyek egyenlők, mivel $<F = <E$ — egyenesek, $<x = <y$, — külső belsők, — 3-dik = 3-dik, — és CF = DE, CB = DA, — egyközüek közt egyközüek. Már ha az ABCD ferde párlagból △ADE elvétetik, de ugyanannyi, t. i. △BCF hozzáadatik: lesz belőle DEFC párlag, — és DEFC = ABCD. Úgyde DEFC-nek udvára 95. §. szerint = EF × DE = DC × DE = AB × DE; ésígy az ABCD ferde-párlag' udvara is épen ez, t. i.

udv. ABCD = AB × DE.

Követ. 1) Bármelly egyközényt át lehet változtani; egyenlő talpú és magosságú párlaggá.

Követ. 2) *Az egyenlő talpú és magosságú egyközények' udvarai egyenlők.* — Ésígy ha udvaruk' egyenlőségéről meg akarunk győződni: csak azt kell megmutatni, hogy talpaik egymással, és magosságaik egymással egyenlők.

97. §.

Id. 103. *Bármelly háromszög' udvara = a' talp' és magasság' sokszorozmányának fele.* (id. 103.)

Ha a' B és D csúcsoknál húzunk az AD-vel és AB-vel egyközü vonalakat, származik az AC egyközény, mellynek udvara két akkora, mint az ABD háromszögé, mivel △ ABC = △DBC. Úgyde az AC egyközény' udvara = AB × DE; — ésígy az ABD háromszög' udvara $= \frac{AB \times DE}{2} = \frac{1}{2}$ AB × DE = $\frac{1}{2}$ DE × AB. Honnan látnivaló, hogy a' háromszög' udvara kijö, ha vagy 1) egész talp egész magossággal sokszoroztatik, 's a' sokszorozmánynak fele vétetik; vagy 2) féltalp egész magassággal, — vagy 3) félmagosság egész talppal sokszoroztatik.

Követk. 1) Ha egy △-nek és egy egyközénynek talpaik és magosságaik egyenlök: úgy a' △' udvara épen fele az egyközény' udvarának, 's ez amannak kettözete.

Követk. 2) Két egyenlö talpú és magosságú háromszögek' udvarai egyenlök.

Követk. 3) Ha a' △'tetejéből az egyenlö részékre osztott talp' osztály-pontjaira vonalak húzatnak: annyi egyenlö háromszögek származnak, a' hány egyenlö részre osztatott a' talp. — Ugyanez áll az egyközényekröl is, ha mind felsö, mind alsó talpaik egyenlö részekre osztatván, az osztálypontokra egyközü vonalak húzatnak.

Követk. 4) *Ha két háromszögben a' talpak egyenlök: azoknak udvaraik olly viszonyban vannak egymáshoz, mint magasságaik; — ha pedig magasságaik*

egyenlők, úgy udvaraik a' talpak' viszonyában vannak egymáshoz.

Jegyzék. A' vonaltanban egyenlő háromszögeknek nevezénk azokat, mellyek egymásra tétetvén, mind a' hat megfelelő részeikkel egymást elfedik; és ezen egyenlőséget hányféle módon lehet megmutatni, ott előadánk. Az illy módon egyenlő háromszögek, udvaraikra nézve is egyenlők. — Azonban lehetnek a' △-gek udvaraikra nézve egyenlők úgy is, ha vonaltanilag nem egyenlők, — mert az udvaruk' egyenlőségére csak talpaik' és magosságaik' egyenlősége kivántatik.

98. §.

Az oldalmásnak (trapezium) AC udvara = két egy- Id. 104.
közű oldalaik' AB, CD félösszegének, a' DE magossággali sokszorozmánya. (id. 104.)

Húzván a' BD szögszelőt, az oldalmás feloszlik két △-re, t. i. ADB, és BCD-re, mellyeknek talpaik illetőleg az oldalmás' talpai, magosságuk pedig ugyanaz, a' mi az oldalmásé = DE. — Már

$$\text{udv. ABD} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB} \times \text{DE},$$
$$\text{udv. BDC} = \tfrac{1}{2}\,\text{DC} \times \text{DE};$$

innen $\text{udv. ABCD} = \tfrac{1}{2}\,(\text{AB} + \text{DC}) \times \text{DE}$.

Azonban fentebb tanultuk, hogy az oldalmás' közepén a' két talpaktól egyenlő távolságra, azokkal egyközüleg húzott vonal $\text{HI} = \tfrac{1}{2}\,(\text{AB} + \text{DC})$. Innen: *az oldalmás' udvara = a' két talptól egyenlő távolságra húzott egyközű vonalnak, a' magossággyali sokszorozmánya.*

99. §.

Bárminő rendes sokszög' udvara = a' kerítés' és Id. 105.
apothema' sokszorozmányának fele. (105.)

Ugyanis:

udvar $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \times OF$

„ $\triangle BOC = \frac{1}{2} BC \times OF$

„ $\triangle COD = \frac{1}{2} CD \times OF$

„ $\triangle DOE = \frac{1}{2} DE \times OF$

„ $\triangle EOA = \frac{1}{2} EA \times OF.$

Ezeknek összegét vévén, lesz a' rendes sokszög:

udvar $ABCDE = \frac{1}{2} (AB+BC+CD+DE+EA) \times OF.$

vagy: *rendes sokszög' udvara = kerítés × apoth.*

vagy ha a' kerítést jelenti P, apothemat R:

rendes sokszög udv. $= \frac{1}{2} PR.$

Követk. Mivel akárminő sokszöget fel lehet szakgatni háromszögekre: akárminő sokszög' udvara kijö, ha a' benne képezhető háromszögek' udvarai összeadatnak.

100. §.

Az udvar, mint látánk, mindenkor sokszorozmány az illető sokszorozókból, mellyeket előadánk. — Tudjuk, hogy ha a' sokszorozmány elosztatik egyik sokszorozójával, kijö a' másik sokszorozója. — Innen ha kiadatik az udvar, és annak egyik sokszorozója: kikereshetjük annak másik sokszorozóját. P. o. az *egyközényre* nézve, ha kiadatik az udvar és a' talp: elosztván az udvart a' talppal, kijö a' magosság; ha pedig kiadatik az udvar és a' magosság, — elosztván az udvart a' magossággal, kijö a' talp. A' *háromszögre* nézve: ha kiadatik az udvar és a' talp, — elosztván az udvart a' talppal, kijö félmagosság, — vagy elosztván az udvart féltalppal, kijö az egész magosság. Ha pedig kiadatik az udvar, és a' magosság: amaz

elosztatván ezzel, kijö féltalp, vagy amaz elosztatván ennek felével, kijö az egész talp. — A' *rendes sokszögre* nézve: ha kiadatik az udvar és az apothema: amazt elosztván ezzel, kijö fél-kerités, — vagy amazt elosztván ennek felével, kijö az egész kerités, — mellyet az oldalok' számával n-el elosztván, kijö egy oldal. — Ha kiadatik az udvar és egy oldal, — az oldalt sokszorozván *n*-nel, ezen sokszorozmánynak felével elosztjuk az udvart, 's kijö az apothema. A' *négyleg*' udvarának ha négyleg-gyökere vétetik, kijö egy-egy oldala:

Innen láthatni azt is, miként lehet ugyanazon udvart egy idomból másba változtatni. P. o.

1) Akármelly udvart négyleggé lehet változtatni, ha belöle négyleg-gyökér fejtetik, — t. i. ez lesz a' négyleg' oldala.

2) Háromszöget és párlagot négyleggé lehet változtatni, középszerest keresvén, a' háromszögnél ugyan a' talp és félmagasság, — a' párlagnál pedig a' talp és egész magasság között, — 's ezen középszerest vévén a' négyleg' oldalául.

3) Az egyközényt háromszöggé lehet változtatni, ha megmaradván a' talp, a' magasságot tesszük kétakkorává, — vagy megmaradván a' magosság, a' talpat tesszük kétakkorává.

4) A' háromszöget egyközénynyé lehet változtatni, ha vagy megmaradván a' talp, felényivé lesz a' magasság, — vagy megmaradván a' magasság, felényivé lesz a' talp.

MÁSODIK CZIKKELY.

Az egyenes vonalakkal zárt síkidomak' udvarainak arányosságáról.

101. §.

Id. 106. *A' hasonló háromszögek' udvarai olly viszonyban vannak egymáshoz, mint az ő megfelelő oldalaiknak és magosságaiknak négylegei.*

Legyenek ABC és *abc* (id. 106.) hasonló háromszögek; — ha azok: úgy △ ACD és △acd is hasonlók. Tehát illy arányok állanak:

$$AB : ab = AC : ac,$$
$$CD : cd = AC : ac.$$

Sokszorozván egymással ezen két arányt, lesz:

$$AB \times CD : ab \times cd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$$

és az első viszonyt 2-vel elosztván:

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

Azonban a' legelső arányban e' helyett: AC: ac, tehettük volna ezt: BC: bc; 's akkor így jött volna:

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

vagy: *udv.* ABC : *udv.* abc $= \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$.

És mivel minden oldalok' viszonya egyenlő: AC: ac = CB: cb = AB: ab = CD: cd:

innen: *udv.* ABC : *udv.* abc $= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$

„ „ $= \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$

„ „ $= \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$

„ „ $= \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$.

102. §.

A' hasonló sokszögek' udvarai olly viszonyban vannak egymáshoz, mint megfelelő oldalaik' négylegei. Id. 107

Az ABCDE és abcde (id. 107.) hasonló sokszögeket fel lehet osztani egyenlő számú háromszögekre, mellyek megfelelőleg — mint fentebb tanultuk — egymáshoz hasonlók. — Már a' 101. §. szerint:

udv. ABC : *udv.* abc = $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$

„ ACD : „ acd = $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$

„ ADE : „ ade = $\overline{AE}^2 : \overline{ae}^2$.

Úgyde — mint fentebb tanultuk — a' hasonló sokszökben minden oldalok arányosok:

AB : ab = AC : ac = AE : ae = CD : cd 'sat.

's innen:

$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$ 'sat.

Azonban tudjuk, hogy az egyenlő viszonyok- és arányoknál, az előtagok' összege úgy van az utótagok' összegéhez, mint akármelly előtag a' maga utótagjához. Ésígy *udv.* ABC+ACD+ADE : *udv.* abc+acd+ade =

$= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ 'sat.

vagy: *udv.* ABCDE : *udv.* abcde = $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ 'sat.

Követk. A' *rendes hasonló sokszögek' udvarai* minden megfelelő oldalaik' négylegeivel arányosok levén: látnivaló, hogy az *ő sugáraik' és apothemáik' négylegeivel is arányosok.*

103. §.

A' melly háromszögekben ABC, abc, egy szöglet egy szöglettel egyenlő, $\sphericalangle A = \sphericalangle a$; azoknak udvaraik olly viszonyban vannak egymáshoz, mint az egyenlő Id. 106.

szögleteket záró oldaik által képezhető párlagok. (id. 106.)

Ugyanis lebocsátván a' CD és cd függönyöket: az ACD és acd háromszögek hasonlók, mivel

$\angle A = \angle a$, $\angle D = \angle d$. Ésígy

$CD : cd = AC : ac$ . . . . . (1).

Úgyde az ABC és abc háromszögeket úgy lehet nézni, mint az ugyanazon talpú és magosságú egyközénynek felét, ésígy ollyan viszonyban vannak egymáshoz, mint azon egyközények.

$ABC : abc = AB \times CD : ab \times cd$. . . . (2).

Az (1) és (2) arányokat sokszorozván egymással, lesz: $ABC \times CD : abc \times cd = AB \times CD \times AC : ab \times cd \times ac$. Mindenik viszony' előtagjaiból kihagyván a' *CD*-t, és utótagjaiból a' *cd*-t, mint ugyanazon sokszorozókat: lesz:

$ABC : abc = AB \times AC : ab \times ac$.

104. §.

Id. 108. *Az ACB egyenes-szögű, háromszög AB feszes oldalával képezhető HB négyleg annyi, mint az AC és BC két mellékoldalokkal képezhető két négylegek AD és BF együtt-véve.*

Ugyanis: a' C egyenes-szögletből (id. 108.) a' feszesoldalra lebocsátván CK függönyt, 's folytatván ezt mindaddig, míg a' HI-t el nem éri: a' HB négyleg feloszlik két párlagra, HK, LB. Továbbá húzzuk az EB, és CH vonalakat. — Az EAB és CAH szögletek egyenlők, mint mindenik áll egy egyenes szögletből, és ugyanazon pótlékból t. i. $\angle BAC$-ból. Azonban $AC = AE$, és $AB = AH$, mint ugyanazon négylegek' oldalai. Innen tehát $\triangle EAB = \triangle CAH$. — Úgyde mivel $\triangle EAB$-nek, és az AD négylegnek ugyanazon talpa

AE, és ugyanazon magossága AC van: tehát △EAB = az AD négylegnek fele. Épen illyen megmutatással △CAH = fele a' HK párlagnak. Ha a' felek egyenlők: az egészek is egyenlők; ésígy az AD négyleg a' *HK* párlaggal egyenlő. — Hasonlólag lehet megmutatni, hogy a' BF négyleg annyi, mint az LB párlag. Innen

egész négyleg HB = *négyleg* AD + *négyleg* BF.

Jegyz. Ez ama nevezetes *pythagorási állítmány*, melly a' mértanbani felette nagy használatáért *magister matheseos*-nak neveztetik.

105. §.

A' HB négylegnek, KH és LB párlagoknak udvaraik, — mivel magosságuk KL ugyanaz, — úgy vannak egymáshoz, mint az ő talpaik. Id. 108.

HK: LB: HB = AK: KB: AB

Innen HK helyett AD-t, és LB helyett BF-et tévén:

AD: BF: HB = AK: KB: AB.

Honnan látnivaló:

1) hogy a' mellékoldalok' négylegei olly viszonyban vannak egymáshoz, mint a' feszes-oldalnak mellettök eső metszékei,

négyl. AD: *négyl.* BF = AK: KB,

vagy: $\overline{AC}^2$: $\overline{BC}^2$, = AK: KB.

2) hogy akármellyik mellékoldal' négylege a' feszes-oldal' négylegéhez olly viszonyban van, mint a' feszes-oldalnak ezen mellékoldal mellett eső metszéke, az egész feszes-oldalhoz;

négyl. BF: *négyl.* HB = KB: AB

„ AD: „ HB = AK: AB.

106. §.

Az ABCD négyleg (id. 109.), melly egy másik Id. 109.

EFGH négylegnek szögszelőjével képeztetik, kétakkora mint ezen utóbbi.

Ugyanis: *párlag* HB = DF,

úgyde *párlag* HB = 2△ FGH) mert talpaik és magos-
és *párlag* DF = 2△ FEH) ságaik egyenlők.

innen: HB + DF = 2△ FGH + 2△ FEH,

vagy: *négyleg* ABCD = 2 négyleg FGHE.

Más megmutatás. Tudjuk, hogy a' körbe irott négyleg' oldala olly viszonyban van a' kör' sugarához, mint: $\sqrt{2} : 1$, vagy átmerőjéhez, HE : EG = $\sqrt{2} : 2$; ezeknek négylegeiket vévén:

négyl. FGHE : *négyl.* ABCD = 2 : 4 = 1 : 2.

107. §.

Id. 110. *Ha az egyenes-szögü háromszögnek ABC (id. 110.) mind a' 3 oldalára hasonló sokszögek X, Y, Z íratnak: a' feszes-oldal' sokszöge egyenlő lesz a' két mellékoldal' sokszögeivel együtt-véve.*

Ugyanis:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2;$$

úgyde: $x : y : z = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$ (l. 102. §).

innen: $x + y : z = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$;

vagy: $x + y : z = \overline{AB}^2 : \overline{AB}^2$,

ésígy: $x + y = z$.

108. §.

Id. 111. *Bárminő sokszöget egyenlő udvarú háromszöggé változtatni.*

Az adott sokszöget egygyel kevesebb oldaluvá lehet változtatni illy móddal: Legyen p. o. ABCDE (id. 111.)

ötszög. Kössük össze két szögletét, E és C-t az EC vonallal, — 's a' D csúcsból húzzunk ezzel egyközü DF-et; a' BC-t pedig nyujtsuk meg, mig a' DF-fel össze nem ér; — végre húzzuk az EF vonalat: 's itt előáll az ABFE négyszög, melly az ABCDE ötszöggel egyenlő udvarú.

Ugyanis $\triangle DEC = \triangle FEC$, mivel talpuk ugyanaz, t. i. EC, magosságuk is egyenlő, mert két egyközüek közt feküsznek. Már ha az EABC négyszöghez amaz egyenlő két $\triangle$-gek közül az EDC-t adom: lesz belőle az ABCDE ötszög; — ha pedig az EFC-t adom ugyanazon EABC négyszöghez: lesz belőle az ABFE négyszög. Ésígy *ötszög* ABCDE = *négyszög* ABFE.

Továbbá épen illy móddal az ABFE négyszögből csinálunk háromszöget. A' B és E szögletet összeköt-jük EB vonallal, — az A csúcsból húzunk azzal egyközüt AG-t, — 's az FE oldalt megnyujtjuk, mig az AG-vel összeér, — kihúzzuk a' GB-t: ekkor elő-áll az FGB *háromszög*, melly = ABFE négyszög = ABCDE *ötszög*.

109. §.

Négyleget csinálni, melly két adott négyleg' összegével, vagy különbségével egyenlő legyen.

Az első esetben a' két adott négylegből egyegy oldal letétetik végeikkel egymáshoz úgy, hogy egyenesszögletet képezzenek, 's mellékoldalokká legyenek; az ezeknek másik két végeit összekötő feszes oldal lesz a' kivánt, — *összegükkel egyenlő* — négyleg' oldala. — A' másik esetben ollyan egyenesszögü háromszög alkotkottatik, mellynek feszesoldala, és egyik mellék-oldala legyenek a' két adott négylegek' oldalai; — a' másik mellékoldal lesz a' kivánt, — *különbségükkel egyenlő* — négyleg' oldala.

Követk. Folytatván ezen mütételt, bárhány adott négylegek helyett lehet egyet csinálni, melly mindnyájok' összegével, vagy különbségével egyenlő lesz.

110. §.

Id. 112. *Valamelly adott sokszöghez hasonló olly sokszöget csinálni, mellynek udvara az adottnak udvarához bizonyos kivánt viszonyban legyen, p.o 7 : 5, vagy 7 : 9 'sat. általában : m : n.*

Legyen az adott sokszög' udvara x (id. 112.); — a' viszony, mellyben ez lesz a' keresendő sokszög' udvarához, m : n, tétessék le vonalakban, AD : BD, — ezek tetessenek le egymás' végibe = AB; — ezen vonalra mint átmérőre az I középpontból irassék félkör-körület; az AD és BD vonalak' összeérés-pontjából a' D-ből függöny DC húzassék a' körületig; — a' C ponttól az A-ra és B-re húzassanak húrok; — az x sokszögnek *ab*, vagy akármelly óldala, ezen húrok közül egyikre a' C-től kezdve tetessék le, p. o. = Ca, — 's az *a* pontból húzassék egyközü vonal az AB-vel : 's ekkor meghatároztatik a' *Cb*, melly lesz a' kivánt sokszögnek az *ab*-vel megfelelő óldala. Ekkor csak az a' kérdés : miként kell csinálni a' *Cb*-re az *x*-hez hasonló sokszöget? — Ez pedig — a' sokszögeket alkotó hasonló háromszögek' megfelelőleg egymás mellé csinálása által — miről a' vonaltanban tanultunk — igen könnyü.

Hogy az előadott megfejtés helyes : így mutatjuk meg. Az ABC, és abC hasonló háromszögekben áll illy arány :

$$AC : BC = aC : bC$$

$$\text{és} : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{aC}^2 : \overline{bC}^2.$$

úgyde a' 100 §. szerint:

$$\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = AD : BD = m : n$$

ésígy: $\overline{aC}^2 : \overline{bB}^2 = m : n.$

És mivel a' hasonló sokszögek' udvarai úgy vannak egymáshoz, mint bármelly megfelelő oldalaik' négylegei: látnivaló, hogy az *aC*-ra vagy *ab*-ra írott x sokszög úgy lesz a' bC-re írandó hasonló sokszöghez = m : n.

HARMADIK CZIKKELY.

A' kör' udvaráról.

111. §.

A' kör' udvara kijő, ha félkörület a' sugárral sokszoroztatik.

Ugyanis a' kört úgy lehet tekinteni, mint végetlen sok-oldalú rendes sokszöget, — mellynek körületén minden pont egy egy óldal; — ésígy a' benne képzelhető végetlen sok háromszögek' óldalai összeesnek egymással, — ésígy apothemájok is egyenlő az óldallal, vagyis egyenlő a' sugárral. — Már látánk a' 99-ik §-ban, hogy a' rendes sokszög udvara kijő, ha félkerités = ½ P az apothemával = R sokszoroztatik, ésígy azoknak udvara = ½ PR. — Ésígy a' kör' udvara is úgy jő ki, ha félkerités vagyis félkörület = ½ P, az apothemával, vagyis a' sugárral = R sokszoroztatik. *A' kör' udvara tehát* = ½ *PR* vagy ha a' sugár helyett az átmérőt = D vesszük: udvar = ¼ PD.

Követk. 1) A' kör' udvarának ezen kifejezetét: ½ PR, vagy ¼ PD, sokszorozókra szakgatván p.o. ½ P × R, ½ R × P, ¼ P × D, ¼ D × P: ha ezen sokszorozók közül egyiket talppá, másikat magossággá teszszük: csinálhatunk a' kör helyett vele egyenlő udvarú

egyközényt; — vagy egyiknek kettőzetét vévén, háromszöget;—p. o. egy ollyan háromszög' udvara, mellynek talpa félkörület, magossága két sugár, — vagy talpa egész körület, magossága egy sugár, — vagy talpa két sugár, magossága félkörület, 'sat., egyenlő a' kör' udvarával.

Követk. 2) Látánk a' vonaltanban, hogy a' kör' körülete $P = 2\pi R = \pi D$ (a' $\pi = 3{,}14$-t jelentvén). Ha most a' P helyett ezen értekét tesszük: lesz a' kör' udvara $= \frac{1}{2} PR = \pi R \times R = \pi R^2$, azaz: *a' kör' udvara kijő, ha sugarának négylege 3,14-val sokszoroztatik.* — P. o. ha a' kör' sugara = 6 öl: kérdés, hány □ öl lesz az udvara? *Fel:* lesz $6^2 \times 3{,}14 = 36 \times 3{,}14 = 113{,}04$ □ öl.

És mivel $P = \pi D$, — és $R = \frac{1}{2} D$: tehát ama képlet helyett: $\frac{1}{2} PR$, tehetjük ezt is: $\frac{1}{2} \pi D \times \frac{1}{2} D = \frac{1}{4} \pi D^2$, — azaz: *a' kör udvara kijő, ha 3,14 az átmérő' négylegének negyedrészével sokszoroztatik.*

E' szerint *a' kör' udvara:* $A = \frac{1}{2} PR = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2$

a' kör' körülete: $P = \frac{2A}{R} = 2\pi R = \pi D$

a' kör' sugára: $R = \frac{2A}{P} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{P}{2\pi}$

Jegyz. E' szerint lehetne a' kört négyszögitni. De mivel az átmérőnek körülethezi viszonya (1 : 3,14, v. 7 : 22 'sat.) nem tökéletes; ésigy a' körületet tökéletesen kicsinálni nem lehet: látnivaló, hogy a' kör' négyszögítése csak közelitő, — de nem kimeritő. Sőt a' fentebbiekből az is nyilván van, hogy a' kör' tökéletes és kimeritő négyszögitését feltalálni nem lehet, — 's hogy ezen törni fejét az embernek háládatlan 's nevetséges munka.

112. §.

Két vagy több körök' udvarai olly viszonyban van-

nak egymáshoz, mint sugaraiknak vagy átmérőiknek négylegei.

Ugyanis már fentebb tanultuk, hogy a' körületek olly viszonyban vannak, mint a' sugarak, vagy az átmérők egymáshoz. Legyen egyik kör' körülete P, másiké P', egyiknek sugara R, másiké R', — egyik' átmérője D, másiké D' : lesz :

$$P : P' = R : R' = D : D';$$

ha ezen arányt sokszorozzuk ezen másik aránnyal :

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' = R : R'$$

vagy: $\tfrac{1}{4}D : \tfrac{1}{4}D' = D : D'$,

lesz: $\tfrac{1}{2}PR : \tfrac{1}{2}P'R' = R^2 : \overline{R'}^2$

vagy: $\tfrac{1}{4}PD : \tfrac{1}{4}P'D' = D^2 : \overline{D'}^2$

azaz: *egyik körudv.* : *másik körudv.* $= R^2 : \overline{R'}^2 = D^2 : \overline{D'}^2$.

P. o. ha egyik kör' sugára = 3 öl, másiké = 4 öl: udvaraik úgy lesznek egymáshoz = 9 : 16.

Követ. Valamint a' feszes-óldal' négylege annyi mint a' két mellék-óldalok' négylegei együttvéve: úgy a' feszes-óldallal mint sugárral vagy átmérővel képezhető kör' udvara annyi, mint a' két mellék-óldallal, mint sugarakkal, vagy átmérőkkel képezhető két körök' udvarai együtt.

Követk. Innen két kör helyett egyet, mellynek udvara kettőjével egyenlő legyen, úgy lehet csinálni, ha a' kettőnek átmérőjét, vagy sugarát egyenes-szögre letéve, feszes-oldalt húzunk, — 's ezzel mint átmérővel, vagy sugárral kört csinálunk, — melly lesz a' keresett kö. — Valamint egy ollyan kört, melly két kiadott körnek különbsége legyen, úgy lehet csinálni: ha írunk egyegyenes-szögű △-get, mellynek feszes-óldala = az adott nagyobb kör' átmérője, vagy sugara, — egyik

mellék-óldala pedig az adott kisebb kör' átmérője vagy sugara; — mert ekkor a' másik mellék-óldallal mint átmérővel vagy sugárral írandó kör, különbség lesz ama kettő között.

113. §.

id. 112. *A' gerézd' udvara kijő, ha illető körívének fele a' sugárral sokszoroztatik.*

Ugyanis: ugyanazon körben a' gerézd' nagysága függ a' talpát képező körív' nagyságától; ésígy a' mint vannak a' gerézdek' talpát képező körívek egymáshoz, úgy vannak a' gerézdek' udvarai is.

Ha OD függönyt emelünk AB átmérőre (id. 113.): az AOD gerézd látnivaló, hogy a' kör' udvarának negyed része $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ PR.

Innen: *gerézd* AOC: *gerézd* AOD = *körív* AC: AD

vagy: *gerézd* AOC: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ PR = *körív* AC: $\frac{1}{4}$ P

innen: *gerézd* AOC $= \frac{\text{körív AC} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \text{ PR}}{\frac{1}{4} \text{ P}}$

innen: *gerézd* AOC = *körív* AC $\times \frac{1}{2}$ R

vagy: *gerézd* AOC $= \frac{1}{2}$ *körív* AC $\times$ R.

Követk. Az AICEA szelet' udvara kijő, ha az AECO gerézd' udvarából az AOC háromszög' udvara kivonatik.

114. §.

Hyppocrates' holdacskáit négyszögílni.

id. 113. 1) Ha a' holdacskának egyik fala valamelly kisebb kör' körületének fele ADB (id. 114.), másik fala pedig valamelly nagyobb kör' körületének negyede AB: akkor a' *holdacska ADBEA' udvara annyi mint a' kisebbik kör' sugarának négylege* $= \overline{AC}^2$.

Ugyanis: AC = CF

és: $\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2$,

és: $\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AC}^2$

innen: az AF-el képezhető kör' udvara annyi mint az AC-vel képezhető két kör' udvara; — amaz elsőbbnek tehát, fele emez utóbbiból egygyel, 's amannak negyede, ennek felével egyenlő. Ésígy

$\frac{1}{4}$ *kör* FBEAF $= \frac{1}{2}$ *kör* CBDAC.

Ha mindenikből kivonjuk a' BEACB-t

lesz: *hold.* BDAEB $=$ △ BAF;

úgyde △BAF' udvara $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ CF

$= AC \times AC$

$= \overline{AC}^2$

ésígy *holdacska' udv.* $= \overline{AC}^2$.

2) Ha egyenes-szögü háromszög' mindhárom ól- Id. 115.
dalaival, mint átmérőkkel, képzett félkörök' egymástmetszései által állnak elö a' *holdacskák, balról x, jobbról z: ezeknek udvaruk együtt annyi, mint az ABC háromszög' udvara.* (id. 115.)

Ugyanis: $s + y + v = s + x + v + z$, kihagyván az egyenlőket. t. i. s- és v-t:

lesz: $y = x + z$.

NEGYEDIK CZIKKELY.

Az egyenes vonalaknak és síklapoknak egymásiránti helyzetéről.

115. §.

Már fentebb említénk, hogy az ollyan terület, mellyen bármelly két pontokon keresztül úgy lehet egyenes vonalat húzni, hogy annak minden pontja a' terü-

leten fekszik, neveztetik *sík-lapnak*, vagy *sík*-nak. Most némelly tulajdonokat kell kifejteni, mellyek az egyenes vonaloknak és síklapoknak egymásiránti helyzetükből erednek. Ezen vizsgálatban a' síklapokat annyira kiterjedteknek gondoljuk mindenfelé, a' menynyire akarjuk. — Ide tartozó főbb tulajdonok e' következők:

Id. 116. 1) *Képtelen, hogy ugyanazon egyenes vonalnak AC (id. 116.) egy része AB, a' síklapon PQ feküdjék, más része pedig, p. o. nm azon kivül (p. vagy alatta, vagy felette).* — Mert ha ez történhetnék: úgy vagy az AC nem volna egyenes vonal, — vagy a' PQ nem volna síklap.

2) *Az AC egyenes vonalnak egész hosszával a' PQ síklapon kell feküdnie, mihelyt két pontja A és B azon fekszik.* Mert ha egy része, p. *mn* a' síkon kivül (alatta vagy felette) feküdnék, akkor vagy az AC nem volna egyenes vonal, vagy a' PQ nem volna sík.

3) *A' CGB háromszög' egész területének a' PQ síkon kell feküdnie, mihelyt területének egy része, p. nrB, vagy GnC, vagy Gnr, azon fekszik.* — Mert ha p. *Gnr* a' PQ síkon fekszik: akkor a' GB oldalnak a' PQ síkkal két közös pontja van t. i. G és *r*, 's következőleg az egész GB vonal a' síkon fekszik. — Továbbá, mivel a' G és *n* ugyanazon PQ síkon feküsznek; azonban a' G a' B-vel is ugyanazon PQ síkon fekszik: tehát az *n* és B is ugyanazon PQ síkon feküsznek: következőleg a' CB vonal is ugyanazon PQ síkon fekszik, mivel két pontjai *n* és *B* azon feküsznek. — Végre, mint már látánk, a' C és G pontok a' PQ síkon feküsznek: ésígy az egész CG vonal is azon fekszik. — Mivel tehát a' BCG háromszögnek minden oldalai a' PQ síkon feküsz-

nek: tehát maga az egész △ is azon fekszik. — Épen így mutathatni meg, hogy az egész BGC △ a' PQ síkon fekszik, ha annak más valamelly része p. *GnC* azon fekszik.

116. §.

Ha tehát a' BCG háromszögnek egy részén p. nBr síklap húzatik: ezen síklap a' BCG △-nek egész lapjával, — következőleg a' PQ síklappal is összeesik, vagyis azzal egy és ugyanazon síkot képez. *A' háromszög' fekvése által tehát a' síklap' fekvése és iránya teljesen meghatároztatik.* Úgyde a' háromszög' fekvését három pontok B, C, G határozzák meg: ésígy ugyanazok a' PQ síklap' fekvését is meghatározzák; más szókkal: *három pontokon, mellyek nem egyenes vonalban feküsznek, csak egyetlenegy síklapot lehet húzni.* — Ellenben egyenes vonalban fekvő három pontokon, vagyis egyetlenegy egyenes vonalon számtalan síkok húzathatnak. És ezen síkok azon egyenes vonalon egymást keresztül metszik, — és ezen vonal neveztetik *metszésvonal*nak. Viszont több síkok egymást csak egyenes vonalon metszhetik, vagyis az egymást metsző síkok csak egyenes vonalon eső pontokat birhatnak közösen. A' melly síkok pedig nem egyenes vonalon eső 3 v. több pontokat birnak közösen, azok teljesen összeesnek, egész kiterjedésökkel. Id. 116.

117. §.

Két egymást keresztül metsző vonalak AC és HG ugyanazon síkon feküsznek; — vagyis két illyen vonalakon csak egyetlen egy síkot lehet húzni. Id. 116.

Ugyanis vegyünk fel a' két egymást metsző vona-

lakon egy egy pontot, *n* és *r*, — kössük össze azokat egyenes vonallal *nr:* a' *Bnr* háromszög az egyetlen PQ síkon fekszik. Úgyde a' HG vonalnak két pontjai a' B és r, — és az AC vonalnak két pontjai a' B és n; — 's mivel mind a' HG mind az AC vonalnak kétkét pontjai ugyanazon PQ síkon feküsznek; látnivaló, hogy maguk azon két vonalak is ugyanazon PQ síkon feküsznek.

118. §.

Id. 117. Ha valamelly egyenes vonal AB, a' PQ síklapra úgy áll, hogy a' síklapon húzható mindazon vonalakra, mellyek amannak álláspontjában egymást keresztül metszik, függőleges; úgy *ezen AB vonal a' síklapra függőlegesnek neveztetik.*

Ha az AB vonal két egyenes vonalra BC és DB, mellyek az ő álláspontjában egymást keresztül metszik, függőleges: úgy függőleges minden más vonalra is p. HG, melly ugyanazon PQ síklapon, ugyanazon B állásponton keresztül húzatik, — ésigy az egész PQ síklapra is függőleges.

Hogy az AB a' HG-ra függőleges, így mutatjuk meg: Legyen CB = BE, DB = BF. Húzzuk az AC, AE, AD, AF hajlott vonalakat, — és a' *C* és *D* pontokat kössük össze egyenes vonallal, mellyet addig nyujtsunk, mig a' BH vonallal összeér, — így az E és F pontokat is kössük össze, 's az EF vonalat nyujtsuk, mig a' BG vonallal a' G-ben összeér; már a' H és G pontokra is húzzunk AH és AG hajlott vonalakat.

Most már: $\triangle$ BCD = BEF, mert BC = BE, BD = BF, és $\sphericalangle$CBD = $\sphericalangle$EBF. Innen: CD = EF, és $\sphericalangle$BDC = $\sphericalangle$BFE.

Továbbá: $\triangle BDH = \triangle BFG$, mert $BD = BF$, $\angle HBD = \angle FBG$, és $\angle BDH = \angle BFG$ mint egyenlöknek 180^0-ra egészítöi. Innen: $HD = GF$, és $BH = BG$, és $\angle BDH = \angle BFG$.

Továbbá: $\triangle ADC$ $\triangle AEF$, mert mind a' 3 oldalaik egyenlök, — $AD = AF$, $AC = AE$, mert az AB függönytöl egyenlö távolságra esö hajlottak, és $CD = EF$ mint látánk. Innen $\angle ADC = AFE$.

Végre: $\triangle ADH = \triangle AFG$, mert $AD = AF$, $HD = FG$ és $\angle ADH = \angle AFG$ mint egyenlöknek 180 fokra egészítöi. Innen $AH = AG$.

Látnivaló tehát, hogy mivel $BH = BG$, mint látánk; az AH és AG pedig az AB vonalnak ugyanazon A pontjából, a' B álláspontól egyenlö távolságra, húzott hajlott vonalak: az AB vonal a' HG-re kétségkivül függöleges.

Így lehetne megmutatni, hogy az AB vonal, bármelly vonalra is, melly a' B ponton megy keresztül, ésígy az egész PQ siklapra függöleges.

Követk. Hogy valamelly vonalnak a' síklapra függöleges voltáról meggyözödjünk: elég, ha annak az ö álláspontjában egymást metszö két vonalra függöleges voltáról bizonyosak vagyunk.

119. §.

Ha az MN síklapon kivül felvett C pontból, a' sík- Id. 118.
lapra függöny CO, és különböző hajlott vonalak CA, CB, CD húzatnak: 1) a' CA és CB hajlottak, mellyek az O álláspontól egyenlö távolságra vannak, egyenlök; 2) az ollyanok, mint CD, mellyek távolabb vannak mint amazok, hosszabbak; — 3) a' síklapra függöleges vonal

pedig rövidebb, mint minden hajlottak. — 'S ezen tételek viszontag véve is állanak.

Ugyanis:

1) Ha OA = OB: a' COA és COB egyenesszögű háromszögek egyenlők, mivel két két oldalaik, 's az azok közt eső szögletek egymással egyenlők. Innen CA = CB.

Viszont: ha CA = CB: úgy △COA = △COB; ésígy OA = OB.

2) Ha OD > OA, mivel OA = OB, és CA = CB: tehát CD > CB, — mint a' vonaltanban tanulánk.

3) A' COB, COA, COD háromszögek egyenesszögüek az O-nál, — 's azok lennének minden illy móddal képzendők. Úgyde azon egyenesszögü △-gekben a' hajlott vonalak feszes-oldalok lévén, leghosszabbak, — 's a' függönynél, melly soha sem feszes-oldal, amazok mindig hosszabbak. Ésígy a' függöny a' síklapra valamelly kivüle felvett pontból húzható minden vonalak közt legrövidebb. Ésígy ugyanazon pontból a' síklapra csak egy függönyt lehet húzni.

Követk. 1) *Valamelly pontnak a' síklaptóli távolságát tehát az azon pontról a' síklapra húzható függöny mutatja.*

Követk. 2) Mivel a' CO függönynek minden pontja egyenlő távolságra van annak O álláspontja körül írható kör' körületének minden pontjától: innen *a' síklapra húzható függönynek bármelly pontjából C, olly kört lehet a' síklapra körítni, mellynek középpontját a' függönynek álláspontja képezi.*

Követk. 3) Ha tehát a' síklapon kivül eső pontnak C, attóli távolságát meg akarjuk határozni, vagyis a' C-től a' síklapra függönyt húzni: felveszünk a' lapon vala-

melly pontot D, és a' C-ből, mint középpontból CD sugárral kört körítünk a' síklapon; — ezen körnek közép-pontját O a' fentebb előadott módon kikeressük, — 's ezen O pontot a' C-vel összeköt jük, — a' CO lesz a' kivánt függöny, — 's a' C pontnak a' síklaptóli távolsága.

Követk. 4) A' síklapon kivül felvett pontból, a' síklapra számtalan egyenlő hajlott vonalakat lehet húzni.

Jegyz. Valamelly körre függőleges vonal CO neveztetik *a' kör' tengelyének.* — Ezen tengelynek minden pontja azon tulajdonnal bír, mellyel a' kör' középpontja, — t. i. a' kör a' tengelynek bármelly pontjából szintúgy körittethetik, mint saját székpontjából.

120. §.

Ha az MN síklapra bocsátott SB hajlott vonalnak Id. 119. *(id. 119.) S pontjából, a' síklapra függöny SD bocsáttatik, — 's a' D és B pontok BD vonallal összeköttetnek: a' BD-re függőlegesen húzható AC vonal függőleges lesz az SB-re is.*

Ugyanis:

Legyen AB = BC; ha a' DA és DC vonalakat húzzuk a' síklapon, lesz DA = DC, mert a' DB függönynek ugyanazon D pontjából, a' B állásponttól egyenlő távolságra húzatnak. — Továbbá húzzuk az SA és SC vonalakat, ezek is egyenlők lesznek egymással, mert az SD függönynek S pontjából, D állás-pontjától egyenlő távolságra (DA = DC) húzatnak. Azonban az SA és SC vonalakat az SB-hez viszonyítva is tekinthetjük, mellyel ugyanazon-egy síklapon ACS feküsznek. Így tekintve két hajlott vonalak azok, mellyek ugyanazon S pontból jönek, 's az SB vonal' B állás-pontjától egyenlő távolságra esnek. És mivel SA

= SC: látnivaló, hogy az SB az AC-re, 's viszont függőleges.

Követ. Mivel az AC mind a' DB-re, mind a' BS-re függőleges: tehát az SBD síklapra is, melly azon vonalakon húzatik, függőleges; — következőleg az SDBS' síklapra is, melly az SD és S'B egyközűeken húzatik.

121. §.

Id. 119. *Ha az SD vonal (id. 119.) az MN síklapra függőleges: minden ezen SD-vel egyközű vonal, p. o. S'B ugyanazon síklapra függőleges.*

Ugyanis az SDBS' síklap metszi az MN síklapot a' BD vonal' mentiben; az AC (az előbbi §. szerint) függőleges a' BD-re és BS-re. — Továbbá az S'BDS síklap az AC vonalra függőleges, — ésígy ∠ SBA egyenes-szög. — Azonban mivel SD a' BD-re függőleges; és S'B az SD-vel egyközű: tehát ∠ S'BD is egyenes-szög. Innen látnivaló, hogy az S'B függőleges mind a' BD-re, mind az AC-re, mellyek az ő B állás-pontjánál az MN síklapon egymást keresztül metszik; — ésígy az S'B az MN síklapra is függőleges.

Követk. Viszont: *két egyenes vonalak, mellyek ugyanazon síklapra függőlegesek, egymással egyközűek.*

122. §.

Az egyenes vonal egyközű a' síklappal, — vagy a' síklap az egyenes vonallal, ha akárminő messzeségre nyujtatván is, soha össze nem érnek. — Hasonlólag a' síklapok egyközűek egymással, ha akármeddig nyujtatván, egymással össze nem érnek.

Id. 120. *Ha az MN síklapon kivül eső AB egyenes vonal a'*

síklapon húzott bármelly CD vonallal egyközű: úgy a' síklappal is egyközű.

Ugyanis: ha egyközüek nem volnának: úgy egymással valamelly távolságon összejönének. Már az AB vonalnak az MN síklappali összejövetele szükségképen feltételezi azt, hogy az AB-nek a' CD-t, vagy annak folytatását valahol metszenie kellene. Úgyde az nem történhetik, mert egyközüek. Ésígy az MN síklappal sem érhet össze sehol; azaz vele egyközű.

123. §.

Két síklapok PQ és MN, mellyek ugyanazon AB vonalra mindketten függőlegesek, egymással egyközűek. (id. 121.) Id. 121.

Ugyanis: ha egyközüek nem volnának, úgy egymással bizonyos távolságon össze kellene jöniek, p. o. a' KL metszés-vonal' mentiben. Ezt feltévén: az O, mikor összejönének, közös pontjok lenne. Húzzuk az MN lapon az AO-t, a' PQ lapon a' BO-t. Ezek mindketten függönyösök az AB-re, mert lapjaik arra függönyösök. Ebből tehát az következnék, hogy ugyanazon O pontból, ugyanazon AB vonalra két különböző függönyöket lehetne húzni; ez pedig képtelen: ésígy a' PQ és MN síklapok egymással soha össze nem jöhetnek, — azaz egyközüek.

124. §.

Két egyközű lapokat MN, PQ keresztül metsző harmadik RS lapnak (id. 122.) metszés-vonalai AB, DC egyközűek. Id. 122.

Ugyanis: ha egyközüek nem volnának, úgy megnyujtatván, egymással össze kellene jöniek; úgyde így

az MN és PQ lapoknak is megnyujtatván, össze kellene jöniek, mert az AB és DC vonalak ezen lapokon feküsznek; — már pedig ezen lapok össze nem jöhetnek, mert egyközüek, — ésígy a' metszés-vonalaik sem jöhetnek össze; — tehát egyközüek.

125. §.

id. 121. *Ha két síklapok MN és PQ (id. 121.) egyközüek: úgy a' melly vonal AB az egyikre függőleges, az a' másikra is függőleges.*

Ugyanis legyen AB az MN síklapra függőleges; tehát az azon síklapon húzható bármelly vonalra, p. AD-re függőleges. Gondoljuk az AB-t és AD-t mintha két oldalai volnának egy harmadik síklapnak, melly az MN-et és PQ-t keresztül metszi; — ezen metsző síklapnak metszés-vonalai az AD és BC, — azok pedig, mint tanulánk, egyközüek: ésígy a' melly AB vonal az AD-ra függőleges, az a' BC-re is az; úgyde a' BC a' PQ lapon fekszik: ésígy az AB vonal a' PQ lapra is függőleges.

Követk. Két lapok, — valamint két vonalak is, ha egy harmadikkal egyközüek, — egymással is egyközüek.

126. §.

id. 123. *Két egyközü vonalak AB és CD, mellyek két egyközü lapok MN és PQ közt esnek, egyenlők.* (id. 123.)

Ugyanis: húzzunk az AB és CD egyközü vonalakon egy síklapot; ez az MN és PQ síklapokat metszi az AC és BD vonalak' mentiben, melly vonalak tehát egymással egyközüek, (124. §.). Ésígy az ACDB idom egyközény; ésígy AB = CD.

Követk. Ezen állitmánynak akkor is helye levén, midőn a' közbevett egyközü vonalak a' síklapokra függőlegesek: látnivaló, hogy két egyközü síklapok minden pontjaikban egyenlő távolságra feküsznek egymástól.

Követk. Mivel két egyközü síklapok közt húzható legrövidebb vonal az, melly mindkettőre függőleges (118. §.): tehát ezen közös függöny a' két síklap' egymástóli távolságának mértéke.

127. §.

Midőn két síklapokon MN és PQ-n fekvő két szögleteknek BAC és bac-nek megfelelő szárai egymással Ld. 124. *egyközüek, 's egyfelé irányozvák: akkor 1) ezen szögletek egyenlők; 2) a' síklapok egyközüek.* (id. 124.)

Ugyanis: 1) csináljuk AB-t egyenlőre *ab*-vel, és AC-*t ac*-vel; húzzuk az Aa, Bb, Cc, BC és bc vonalakat. Látnivaló, hogy AabB, és AacC idomok egyközények, mert az egyközü egyenlő vonalak közt egyközü egyenlő vonalak fekhetnek. Ésígy Aa = Bb, — és Aa = Cc. Mivel pedig e' szerint Bb = Cc: tehát BbcC is egyközény; ésígy bc = BC. Ésígy △ABC = △abc, mivel mind a' 3 oldalaik egyenlők; — ésígy < BAC = < bac.

2) Hogy pedig az MN síklapnak a' PQ-val egyközünek kell lennie, megtetszik onnan: mert ha egyközüek nem volnának, úgy a' közöttök különböző helyeken húzható egyközü vonalak Aa, Bb, Cc, nem lehetnének egyenlők. Úgyde azok egyenlők: ésígy a' síklapok egyközüek.

Követk. Ha hét egyközü lapokat MN és PQ-t két lapok AabB és AacC keresztül metszenek az AB, ab, és AC, ac metszés-vonalak' mentiben: a' BAC és bac szögletek, mellyek ezen metszés-vonalak által képeztet-

nek, egyenlők. — Ugyanis az ab, ac vonalak, az AB, AC-vel egyközüek levén: a' kérdéses szögletek, a' fentebbi megmutatás szerint, egyenlők.

128. §.

Id. 125. *Bármelly két vonalak AB, CD (id. 125.), mellyek három egyközü síklapok — MN, PQ, RS között esnek, ezen síklapok által arányos részekre metszetnek.*

Ugyanis: legyenek az A, I és B; C, K, és D azon pontok, mellyeken az AB és CD vonalak az RS, PQ és MN síklapokat metszik; — húzzuk az AD vonalat, melly a' PQ síklapot a' H-nál metszi; — húzzuk az AC, IH, BD, HK összekötő vonalakat. Már (124 §. szerint) IH a' BD-vel, és HK az AC-vel egyközüek. Innen:

az ABD háromszögben: AI : IB = AH : HD,

a' DAC háromszögben: CK : KD = AH : HD.

Mivel ezen két arányban az utóbbi viszonyok ugyanazok: tehát az első viszonyok egyenlők. Innen:

AI : IB = CK : KD.

129. §.

Két egymást metszö lapoknak egymásra bizonyos *hajlásuk* van, vagy köztök bizonyos nyilás esik, melly az egész metszés-vonal' hosszában mindenütt egyenlö. Ezen hajlás, vagy nyilás neveztetik *kétlap-szögletnek* (angulus diedralis), vagy csak *lap-szögletnek*, hogy megkülönböztessék a' vonal-szöglettöl, melly két egyenes vonal által képeztetik.

A' *lapszöglet'* oldalai tehát két határozatlan terjedetü síklapok, mellyeket itt *falak*-nak nevezhetünk; — teteje az egész metszés-vonal, mellyet itt *határ-vonal*-nak nevezhetünk. A' lapszöglet négy betükkel jelöl-

tetik, mellyek közt a' két közbülső a' határvonalat mutatja. Igy (id. 126.) az ACDB, és AEFB lapok által, az AB határvonal' mentiben képzett lapszögletek EABC, vagy FABD. Id. 126.

Ha a' lapszöglet' mindkét falán a' határvonalra függőleges vonal húzatik, p. o. az AD falra HI, a' BE falra HG: származik ott egy vonal-szöglet IHG, melly a' lapszöglettel olly szoros egybeköttetésben van, hogy egyiket sem lehet növeszteni vagy fogyasztani, a' nélkül, hogy a' másik is egyszersmind és egyenlően no nőne, vagy fogyna. — Azonban ezen vonal-szöglet' nagysága a' határvonal' minden pontjainál egyenlő, 's változatlan. — Innen a' *lap-szöglettel összevágó vonalszögletnek* neveztetik azon szöglet, melly a' lapszöglet' falain a' határvonal' bármelly pontjára húzható függőleges vonalak által képeztetik. — A' mi ezen *összevágó* szögletnek mértéke — t. i. a' szárai közt eső körív: — ugyanaz mértéke a' lapszögletnek is; — vagy az *összevágó* szöglet, mértéke a' lapszögletnek.

E' szerint a' lapszögletek ugyanazon tulajdonokkal birnak, mellyekkel a' vonal-szögletek. P. o. midőn két lapok egymást keresztül metszik: a' határvonallal egymás-ellenében fekvő lapszögletek egyenlők; — az egyik lapon egymásmellett fekvő lapszögletek összege = két egyenes-szög; — ha a' határvonal körül képzett 4 szögletek közül egy egyenesszög, a' többi 3 is mind az, — és ekkor a' két lapok egymásra függőlegesek; — végre az ugyanazon határvonalon egymást metsző, bárhány lapok által képzett lapszögletek' összege = 4 egyenesszög.

Hasonlólag, ha két egyközü lapokat metsz egy harmadik lap: származnak ott külső-belső, — visszás — 'sat.

lapszögletek; mellyeknek épen azon tulajdonaik vannak, mint a' rézsút-vonal által metszett egyközü vonalak körül képzett szögleteknek.

130. §.

Két síklapok függölegesek egymásra, ha azon vonal-szöglet, melly ezen lapok' hajlásának mértéke, egyenes-szög.

Id. 127. *Ha az AB vonal (id. 127.) az MN lapra függőleges: úgy az AB vonal' mentiben fekvő bármelly lap is p. EH az MN lapra függőleges.*

Ugyanis az AB-nek B álláspontjára húzzunk az MN lapon egymásra függöleges két vonalat BD-t és EF-et. Már az AB, mivel az MN lapra függőleges, a' BD-re és EF-re is az, mivel azok az ő álláspontján mennek keresztül. Azonban az ABD szöglet, mértéke azon lapszögletnek, mellyet az EH és MN lapok' egymásra hajlása képez. Úgyde $< ABD$ egyenesszög, — ésígy az emlitett lapszöglet is egyenes-szög: tehát EH lap, MN lapra függőleges.

Viszontag: *ha az EH lap az MN lapra függőleges: úgy az AB vonal is, melly az EH lapon, az EF metszés-vonalra függőlegesen húzatik, az MN lapra függőleges.*

És viszont: *ha az MN és EH lapok egymásra függőlegesek: úgy az AB vonal, melly a' metszésvonalra úgy áll, hogy az egyik lapra, MN-re függőleges, szükségkép a' másik — t. i. EH lapon fekszik.*

131. §.

Id. 127. *Ha két lapok EH és DG (id. 127.) egy harmadik MN lapra mindketten függőlegesek: úgy ezeknek metszés-vonaluk AB is az MN lapra függőleges.*

Ugyanis: az MN lapon emeljünk fel a' B pontról függőleges vonalat AB-t: ennek az előbbi §. szerint mind az EH, mind a' DG lapon kell feküdnie, mert azok mindketten függőlegesek az MN-re; ésígy az AB nem lehet egyéb, mint az EH és DG lapoknak közös metszés-vonala. — Tehát azon közös metszés-vonal az MN lapra függőleges.

132. §.

Ha kettőnél több síklapok olly móddal hajlanak egymásra, hogy mindnyájának egyegy sarka, vagy vonalszöglete egy pontban összejő: az ezen összejövetel által származott csúcs neveztetik *soklap-szögletnek* (angulus polyedralis) vagy *test-szögletnek*. Példaúl a' 128. Id. 128. idomon az SAB, SBC, SCD 'sat. lapok, mellyek az S pontban sarkaikkal mind összejönek,— kettenként pedig határvonalaiknál úgy hajlanak egymásra, hogy összehajlásaikkal tért határoznak meg, melly az S-nél csúcsot képez, — de az S-sel általellenben a' tért határozatlanul hagyják.

Az S pont, hol a' lapok összejönek, a' soklap-szögletnek *csúcsa*, vagy *teteje*. — Az ASB, BSC, CSD vonalszögletek, vagyis ezeknek lapjai, a' soklapszögletnek *falai;* az SA, SB, SC, SD 'sat. metszésvonalak, itt is *határvonalak*. — A' *soklap-szöglet*' vagy *test-szöglet*' lényegét teszik a' határvonalak által képzett *vonalszögletek* kivülről, — és a' falak által képzett *lap-szögletek* belölről.

A' test-szöglet betükkel úgy jelöltetik, hogy legelöl tétetik a' csúcsnál eső betü, azután a' határvonalak' megfelelő pontjain eső betük. Ha a' test-szöglet magánosan áll: akkor csak a' csúcsnál eső egy betüvel is jelöltet-

hetik. P. o. a' 128-dik idomon levő testszöglet lesz = SABCDE, vagy csak egyszerüen = S.

A' test-szögletek különbözők egymástól falaik' számához képest. *Háromlapú* az, mellyet 3 lap képez, *négylapú*, mellyet 4 lap, — továbbá vannak 5 lapú-, 6 lapú-, szóval *soklapú* testszögletek.

Akárhány-lapú testszögletek' tulajdonai a' háromlapúakén alapulnak. Ezeket tegyük hát figyelmünk tárgyává; megjegyezvén, hogy a' háromlapú testszögletben *hat* dolog van figyelemre méltó: u. m. három vonalszöglet, és három lapszöglet; — sajátlag tehát ezeknek egymás iránti viszonyait kell megvizsgálnunk.

133. §.

Id. 129. *Akármelly háromlapú testszögletben SABCA(id. 129.) az azt alkotó vonal-szögletek közül kettő együtt mindig nagyobb, mint a' harmadik.*

Ezen tétel kétséget sem szenved azon esetben, ha a' három vonal-szögletek ASB, BSC, CSA egyenlők. De vegyük fel a' legkevésbé kedvező esetet, t. i. midőn egy szöglet, mellyhez a' másik kettő' összegét hasonlítni akarjuk, nagyobb mint amazok közül akármellyik.

Tegyük fel hát, hogy $<ASC$ legnagyobb a' három között; húzzunk ezen szöglet' síkján egyenes vonalat SD, olly móddal, hogy legyen $<CSD = <CSB$; 's vegyük egyenlőre az SD-t az SB-vel, — 's húzzuk ki az ADC, AB és BC vonalakat. Ez így levén: az SDC és SBC háromszögek egyenlők, mert két két megfelelő oldalaik, és azok közt eső szögleteik egyenlők (SD=SB, SC önmagával egyenlő, és $<CSB=<CSD$), ésígy CD = CB. — Úgyde

$$AB + BC > AD + DC$$

vagy: $AB + BC > AD + BC$

innen: $AB > AD$.

Innen, mivel az SAD és SAB háromszögekben két oldal két oldallal egyenlő ($AS = AS$, $SD = SB$): — a' körbenesö szögletek úgy lehetnének egyenlök, ha az átellenes oldalak egyenlök volnának; — de mivel $AB > AD =$ tehát szöglet $ASB > ASD$.

Innen: szöglet $ASB + BSC > ASD + DSC$

vagy: $ASB + BSC > ASC$.

Követk. A' háromlapú testszögletet képező vonalszögletek közül tehát egy mindig nagyobb, mint a' másik kettő közötti különbség.

134. §.

Midőn két test-szögletek S, s, három ollyan vonal-szögletekből alkotvák, mellyek megfelelőleg egyenlők, 's az egyenlők ugyanazon renddel következnek mindenikben: akkor az egyenlő vonalszögletek közt eső lapszögletek egyenlők. (id. 130.) ld. 130.

Hogy megmutassuk p. o. hogy CASB lapszöglet a' *casb* lapszöglettel egyenlö: elég lesz megmutatni, hogy azon vonalszögletek, mellyek ezen lapszögleteknek mértékei, egymással egyenlök. Erre nézve az SA határvonal bármelly *A* pontjára húzzunk az SAB és SAC falakon AB és AC függöleges vonalakat; a' BAC vonalszöglet lesz a' BSAC lapszöglet' mértéke. Továbbá feltévén, hogy $sa = SA$: ugyanollyan szerkezés után lesz $< bac$ mértéke a' *bsac* lapszögletnek. Most már azt kell megmutatni, hogy $< BAC = < bac$. Erre nézve:

1) $\triangle SAB = \triangle sab$, mert egyegy oldal, és két mellette eső szögletek egyenlök, t. i. $SA = sa$, — úgy

csináltuk, — $\angle ASB = \angle asb$, — az van feltéve, — $\angle BAS = \angle bas$, — egyenes-szögek. Innen tehát $AB = ab$, és $SB = sb$.

2) $\triangle SAC = \triangle sac$ ugyanillyen megmutatással. Innen: $AC = ac$, és $SC = sc$.

3) $\triangle SBC = sbc$, mert két oldal két oldallal, és a' közben eső szögletek egyenlők; $SB = sb$, $SC = sc$, — mint megmutatók–, végre $\angle BSC = \angle bsc$ — mint feltevők. Innen: $BC = bc$.

4) $\triangle ABC = \triangle abc$, mivel három oldal három oldallal egyenlő, mint a' mondottakból kijő. — Innen $\angle BAC = \angle bac$.

Látnivaló tehát, hogy BSAC és bsac lapszögletek egyenlők, mert BAC és bac vonalszögletek, mellyek amazoknak mértékei, egyenlők.

135. §.

Id. 130. *Két háromlapú testszögletek S és s egyenlők,(id.130.) ha az azokat alkotó vonalszögletek megfelelőleg egyenlők, 's egyenlő renddel váltják fel egymást.*

Ugyanis ha az SABC háromlapú testszöglet az *sabc* háromlapú testszögletre rátétetik: egymást minden részeikkel elfedik; mert lapjaik 's vonalszögleteik egyenlők, — és mivel azok egyenlők, tehát az előbbi §. szerint lapszögleteik is egyenlők; — ésígy mind lapjaik, mind határvonalaik egymással épen összeesnek.

Követk. Ebből foly az is, hogy két háromlapú testszögletek egyenlők, ha 1) egy lapszögletük és az azt közbefogó két vonal szögletek, — 2) két lapszögletek 's az azok mellett eső egy vonalszöglet mindkettőben egyenlők.

136. §.

A' soklapú testszöglet, melly t. i. 3 lapnál több által képeztetik, vagy *homorú*, vagy *domború*. *Homorú* akkor, ha a' képző vonalszögletek közül egy vagy több is homor-szög; — *domború*, ha ezek mind domború-szögek.

Minden soklapú testszögletet fel lehet oszlatni több 3 lapú testszögletre, — mint minden sokszöget (polygonum) több háromszögre. — A' domború soklapú testszögletet úgy lehet feloszlatni 3 lapu testszögletekre, ha egy határvonaltól a' többi határvonalakhoz, — kivévén a' két legközelebb esőket — lapokat húzunk, — mi által annyi 3 lapú testszöglet áll elő — kettő hiján, — a' hány lapú volt a' testszöglet.

Rendes soklapú testszögletnek neveztetik az, mellynek minden vonalszögletei, és minden lapszögletei egyenlők; — ésígy ez csak domború lehet.

137. §.

Bármelly domború testszögletben, az azt alkotó vonalszögletek' összege = s, kevesebb mint 4 egyenesszög, s < 4r. Id. 131.

Ugyanis a' soklapú testszögletet SABCDE (id. 131.) állítsuk egy síklapra, — azon a' testszöglet' falainak metszésvonalai ugyanannyi oldalú sokszöget ABCDE fognak képezni, a' hány fala van a' testszögletnek; melly sokszögnek O középpontjából szögleteibe vonalakat OA, OB, OC, OD, OE-t húzván, feloszlik ugyanannyi háromszögekre, a' hány oldalú a' sokszög, 's a' hány fala van a' testszögletnek. Azonban A, B, C, D, E pontoknál újolag megannyi testszögletek képeztetnek

három három falakkal, 's vonalszögletekkel. Ezeket illetőleg, a' 133-dik §. szerint:

szöglet: SBA + SBC > ABC
„ SCB + SCD > BCD
„ SDC + SDE > EDC
„ SED + SEA > AED
„ SAE + SAB > EAB.

Innen a' > jegyet megelőző szögletek' összege, melly nem egyéb, mint az s testszöglet' háromszegü falainak talpaikon eső minden szögletek' összege — mellyet ezúttal nevezünk Q-nak, nagyobb mint az ABCDE sokszög' minden szögleteinek, vagy az ezen sokszögben képzett minden háromszögek' talpra eső szögleteinek összege, — mellyet nevezzünk P-nek. — E' szerint

$$Q > P.$$

Már ha a' testszögletet képező háromszögü falaknak talpon eső szögleteihez hozzáadjuk az S-nél eső szögleteiket is, mellyeket összesen S-nek nevezzünk: annyiszor 180 fok $= 2r$ lesz, a' hány fal van, $= n$-szer $2r = 2nr$, — tehát

$$Q + S = 2nr.$$

Továbbá, ha az ABCDE sokszögben képzett háromszögek' talpszögleteihez hozzáadjuk az O tetőnél eső szögleteiket is, mellyek együtt 360 fokot $= 4r$ tesznek: ezekből is annyiszor 180 fok lesz a' hány △van, t. i. $n \times 2r = 2nr$, — tehát

$$P + 4r = 2nr.$$

Már ezen két egyenletben: $Q + S = 2nr$, és $P + 4r = 2nr$, ha Q egyenlő volna P-vel, úgy S is egyenlő volna 4r-rel. De mivel $Q > P$: látnivaló, hogy S, vagyis a' testszögletet képző vonalszögletek' összege kisebb mint 4r; azaz: $S < 4r$.

HARMADIK SZAKASZ.

Tömegtan.

ELSŐ CZIKKELY.

Általános ismeretek a' tömegekről.

138. §.

*Tömeg*nek (solidum) neveztetik a' területek által minden felöl bezárt tér. Ha ezen tért mint anyaggal betöltöttet tekintjük: akkor nevezzük *test*nek (corpus). A' tömeget nevezhetjük tehát *mértani testnek* is (corpus mathematicum), ellenébe tévén a' *természettani test*nek (corpus physicum), melly anyaggal töltött tér. — A' tiszta mértan' tárgya a' *tömeg*.

A' tömegnek három irányú terjedete van: *hosszúság, szélesség, vastagság*.

Minden tömeg' származását úgy képzelhetjük, mintha több területek, bizonyos vonal' irányában egymásra vagy egymás mellé telepednének.

A' tömeget bezáró területek' összege neveztetik *felület*nek (superficies.)

139. §.

A' tömeg vagy *szabályszerü* (symmetricum) vagy *szabálytalan* (asymmetricum). Szabályszerü az, mellynek

vagy minden, — vagy legalább a' megfelelő lapjai és szögletei egyenlők; — szabálytalan az ellenkező. — A' szabályszerü ismét vagy *rendes* (regulare), vagy *rendetlen* (irregulare). *Rendes* az, mellynek minden lapjai egyenlő rendes lapok, annálfogva szögletei is mind egyenlők. — *Rendetlen* az, mellynek csak megfelelő lapjai egyenlők, de nem mind rendes lapok.

140. §.

A' tömeg a' szerint, a' mint vagy síklapokból álló-, pedig domború felülettel záratik be, kétféle: u. m.

1) A' síklapokból álló felülettel zárott, neveztetik *soklapú*nak (polyedron), vagy *oszlop*nak; és ennek bezárására legalább is négy lap szükséges. Ez ismét kétféle, u. m.

a) *Szögoszlop* (prisma) melly két egyközü és egyenlő sokszögek-, 's ezek' oldalaival egyenlő számú, ezeket összefoglaló egyközények által záratik be. — A' két egyközü és egyenlő szögszög neveztetik *fenék*nek, — az egyközények *oldal-lapok*nak, vagy falaknak-, az egyik fenékről a' másikra, vagy annak folytatott irányára húzható függöny *magasság*nak. — Ha a' fenekek is egyközények: akkor a' szögoszlop neveztetik *párlap*nak (parallelepipedon); az ollyan szögoszlop pedig, mellynek mind a' hat oldalai egyenlő négylegek (quadrata), neveztetik *koczká*nak (cubus). *Egyenes* szögoszlop az, mellynek oldallapjai a' fenekekre függőlegesek; — ellenkező esetben a' szögoszlop *ferde*. Ha a' szögoszlop' fenekei rendes sokszögek, — ésígy oldallapjai megannyi egyenlő egyközények: úgy a' szögoszlop' *szabályszerű*, — különben *szabálytalan*. — A' szögoszlop' származását úgy képzelhetni, mintha a' sokszögü fenék, egy keresztbe reá állított vonal' men-

tiben, megtartván mindvégig nagyságát, önmagával mindig egyközüleg mozogna. A' hány szögü vagy oldalú a' fenék: annyi szögü vagy oldalú lesz a' szögoszlop.

b) *Csúcsoszlop* (pyramis), melly egy sokszögü fenék, 's ennek oldalaival egyenlő számú, és egy csúcspontban egymással összeborúló háromszögü oldallapok által záratik be. Itt is a' külön fajok' saját nevei a' fenék' oldalainak számától vétetnek, — 3—4 'sat. szögü csúcsoszlopok. — Azon egyenes vonal, melly a' csúcsoszlop' tetejéből fenekére, vagy annak folytatott irányára függölegesen húzathatik, neveztetik a' csúcsoszlop' *magasságának*. Ha ez a' fenék' közép-pontjára esik: úgy a' *csúcsoszlop egyenes*, — különben *ferde*. — A' csúcsoszlop' származását úgy képzelhetni, mintha a' sokszögü fenék, egy keresztbe állított vonal' mentiben, önmagával egyközüleg mozogván, felyebb felyebb mindig ugyanazon arányban kisebbednék, mignem utoljára egy pontban végződnék. — A' csúcsoszlop is *szabályszerü*, ha feneke rendes sokszög: különben *szabálytalan*.

2) A' domború felületü tömegek' sokféle fajai közül csak a' kör által képződők, — 's ezek közül is csak 3 féle lehet az elemi mértan' tárgya. u. m.

a) *Körhenger* (cylinder circularis) ollyan tömeg, mellynek két fenekei egyenlő és egyközü körterületek, — oldalfelülete pedig egy domború terület. Azon egyenes vonal, melly egyik fenékről a' másikra, vagy annak folytatására függöleges, a' henger' *magasságát* mutatja. — A' henger is vagy *egyenes*, vagy *ferde*, a' szerint, a' mint az oldalterület a' fenekekre vagy egyenes-, vagy hajlott szöglet alatt áll. — A' két fenék' középpontját összekötö egyenes vonal neveztetik *ten-*

*gely*nek, — melly tehát az egyenes hengerben a' fenekekre függőleges, — a' ferdében dült. — A' hengernek a' két fenéken kivüli felületét *burkony*-nak (mantel) is nevezik. — A' henger' származását úgy képzelhetni, mintha a' fenék-körterület egy reá keresztbe tett vonal' mentiben, önmagával egyközüleg, megtartván mindvégig ugyanazon nagyságát, mozogna. Honnan látnivaló, hogy mivel a' kör = végetlen sok oldalú sokszög: a' henger nem egyéb, mint végetlen sok oldalú szögoszlop. — Az egyenes henger' származását úgy is képzelhetni, mintha egy egyközény, saját egyik oldala-, mint a' leendő henger' tengelye körül megfordulván, mig előbbi állására vissza nem ér, mindenütt nyomokat hagyna.

b) *Körkúp* (conus circularis) ollyan tömeg, mellynek egyetlen feneke körterület, — oldalfelülete, vagy burkonya (mantel) pedig csúcspontra tornyodzó domború terület. — A' kúp is vagy *egyenes* vagy *ferde*, a' szerint, a' mint annak *magossága*, t. i. a' tetejéből fenekére, vagy annak folytatására húzható függőleges vonal, vagy a' fenék' közép-pontjára esik, vagy nem. — Itt is a' tetőből a' fenék' középpontjára húzható vonal *tengely*nek neveztetik, melly tehát az egyenes kúpnál a' magossággal ugyanaz. — A' kúp' származását úgy képzelhetni, ha a' fenék-körterület egy keresztbe reá állított vonal' mentiben, önmagával egyközüleg mozogván, mindig ugyanazon arányban kisebbednék, mignem utoljára egy pontban végződnék. Honnan látnivaló, hogy a' kúp nem egyéb, mint végetlen sokoldalú csúcsoszlop. — Az egyenes kúp' származását úgy is képzelhetni, mintha egy egyenes-szögü háromszög' sájat egyik mellék-oldala-, mint a' leendő kúp'

tengelye körül megfordulván, mignem előbbi állásába visszatér, maga után nyomokat hagyna.

c) *Gömb*, vagy *golyóbis* (sphaera) olly tömeg, melly egyetlenegy domború területtel mindenfelől úgy záratik be, hogy azon domború területnek, vagyis a' gömb' felületének minden pontja, a' tömegben egy ponttól, melly ennélfogva középpontnak (centrum) neveztetik, egyenlő távolságra van. — A' gömb' származását úgy képzelhetni, mintha egy félkör-terület, a' maga átmérője körül megfordulván, míg előbbi állásába vissza nem ér, mindenütt nyomokat hagyna maga után.

141

A' *rendes* tömeg, mint látánk, minden felől egyenlő rendes lapokkal bezárt tér. — Rendes lapok pedig ezek: egyenoldalú háromszög — négyleg, — és rendes sokszög. — Már rendes tömeg nem lehet több *ötnél*: mi azoknak származhatásukból nyilván kitűnik. — Ugyanis arra, hogy tömeg származzék, legalább négy lap szükséges; arra pedig, hogy tömeg-szöglet, vagy testszöglet származzék, legalább 3 lap kell, de több is lehet; — és ezen lapoknak vonalszögletei összesen nem mehetnek fel 360 fokra vagy 4r-re. — Lehet tehát rendes tömegeket képezni e' következő rendes lapokból:

1) *Egyenoldalú háromszög-lapokból*:

a) *Négyből*, mellyben a' tömegszögletet három lap képezi, és a' három szögletek' összege $= 180^{0}$. Ez neveztetik *rendes négylapú*-nak (tetraedron.) id. 132. id. 132.

(id. 132. Az idomok' egyike (a) mutatja a' tömeg' állását, — másika (b) azon rajzolatot, melly szerint azt kemény papirosból el lehet készíteni.)

Id. 133. b) *nyolczból*, mellyben a' testszögletet négy lap képezi, — és a' négy szöglet' összege = 240°. Ez neveztetik *rendes nyolcz lapúnak* (octäedron). — id. 133.

Id. 134. c) *húszból*, mellyben a' testszögletet öt lap képezi, és az öt lap' vonalszögleteinek összege = 300°. Ez neveztetik *rendes húszlapú*nak (icosäedron.) id. 134.

Már hat egyenoldalú háromszöget testszögletre összeborítni nem lehet, mert azok' vonalszögleteinek összege lenne = 360° = 4r, ez pedig nem lehető. Ésígy egyenoldalú háromszögből háromnál több rendes tömeget képezni nem lehet.

Id. 135. 2) *Négyszög-lapokból*

csak egy rendes tömeget képezhetni t. i. a' *koczkát*, mellyben a' testszögletet alkotó három lapok' vonalszögleteinek összege = 270°. — Már 4 lap' vonalszögletei tennének = 360 fokot; ésígy azokat már testszögletre összeborítni nem lehet.

Id. 136. 3) *Rendes ötszög-lapokból*

lehet egy rendes tömeget képezni, mellyben három lap alkotja a' testszögletet, mellyeknek vonalszögleteik' összege = 108 × 3 = 324°, — 12 lap pedig bezárja a' tömeget, — 's ez neveztetik *rendes tizenkét lapúnak* (dodecäedron) id. 136. — Már ötszögü lapból háromnál többet csúcsra összeborítni nem lehet, — mert 108 × 4 = 432°, — 4r-nél több. — Hatszögü lapokból még csak hármat sem lehet csúcsra összeborítni; — mert 120 × 3 = 360° = 4r. — Hatnál többszögü lapokból annyival inkább nem lehet. — Ésígy rendes tömeg nem lehet több 5-nél, u. m. a' *rendes négylapú, nyolczlapú, húszlapú, hatlapú* (vagy *koczka*), *tizenkétlapú*.

A' rendes tömegeket úgy képzelhetni, mintha gömbből volnának kimetszve, — 's így azoknak közepében

van a' gömb' középpontja. Már ha ezen tömegek' minden csúcsaitól vonalakat, 's ezeket összekötö falakat húzunk gondolattal a' középpontig: képeztetnek azok által több csúcsoszlopok, mellyeknek fenekeit képzik a' tömeg' lapjai, — tetejeik pedig a' középpontban mind összejönek; p. o. a' húszlapú áll 20 illyen csúcsoszlopból, — a' tizenkétlapú tizenkettöből 'sat.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' síklapokkal zárt-, vagyis soklapú tömegekről (polyedra) általában; azok' egyenlöségéről és hasonlóságáról.

142. §.

Minden síklapokkal bezárt tér neveztetik *soklapú* tömegnek (polyedron); az azt bezáró területek külön külön *falak*nak, mellyek együtt képzik a' *felületet;* ezen falak' határai, vagy oldalai *határvonalak*nak, vagy *ormók*-nak — 's azon pontok, mellyekben ezen határvonalak összejönek, *csúcs*-oknak neveztetnek.

E' szerint látnivaló, hogy a' soklapúban annyi testszöglet van, a' hány csúcs, — annyi lapszöglet, a' hány határvonal, — annyi vonalszöglet minden falon, a' hány oldalú sokszög az.

A' soklapú' *szögellőjének* (diagonalis) neveztetik azon egyenes vonal, melly egy csúcsból másik nem szomszéd csúcsba húzatik. *Szögellő-lap*nak (planum diagonale) neveztetik minden ollyan lap, melly a' soklapút, egy csúcs' és egy határvonal', vagy 3 csúcs' mentiben vágja.

A' soklapú *emeltcsúcsos*, ha minden testszögletei emeltek, vagy kiállók; *homorcsúcsos*, ha némellyek azok közül homorok.

A' soklapúak' különféle idomai közül, némellyek egyszerűbbek, 's mintegy elemei más összetettebb idomoknak. Legegyszerűbb a' *négylapú* (tetraëdron). — Mi ezeknek előadásában azon rendet követendjük, mellyet leginkább tanmódszerünek lenni vélünk.

I) *A' négylapúakról (tetraëdron), azoknak egyenlőségéről 's hasonlóságáról.*

143. §.

Id. 130. *Két négylapúak SABC, sabc (id. 130.) egyenlők, ha egyiknek három fala a' másiknak három falával egyenlő, 's az egyenlők mindenikben ugyanazon renddel következnek.*

Ugyanis, ha azok a' 3 egyenlő falak, mellyek az S és s csúcsokban összeborulnak; mivel az ezen csúcsok körüli vonalszögletek megfelelőleg egyenlők, tehát a' lapszögletek is megfelelőleg egyenlők (134. §.); — következőleg ha az SAB falat az sab-ra tennénk, a' többi falak is, mivel egymáshozi hajlásaik egyenlők, egymással teljesen összeesnének, egymást fednék; — ésígy az egész négylapúak egyenlők.

144 §.

Id. 130. *Két négylapúak egyenlők, ha egyiknek két fala 's azok által képzett lapszöglete, a' másiknak két falával, 's azok által képzett lapszögletével megfelelőleg egyenlők.*

Ugyanis: legyen SAB = *sab*, és SAC = *sac*: az SAB falat tegyük rá az *sab* falra; ekkor az SAC fal is együvé esik az *sac* fallal, mert az általuk képzett lapszögletek egyenlők; és az SB határvonal az sb-vel, 's az SC az sc-vel, és az SBC fal az sbc-vel szükségképen összeesnek; — ésígy a' két négylapúak egyenlők.

145. §.

Két négylapúak egyenlők, ha egyiknek egy fala és Id. 130. *az e' mellett eső két lapszögletei, a' másiknak egy falával és az e' mellett eső két lapszögleteivel megfelelőleg egyenlők.*

Ugyanis: ha SAC = sac, és ezen két falakat egymásra tesszük: mivel az SA és SC, sa és sc határvonalaknak megfelelő lapszögletek egyenlők: az SAB és SBC falak is az *sab* és *sbc* falakkal együvé esnek, 's azoknak SB metszővonala az *sb*-vel összeesik. Ésígy a' két négylapúak egyenlők.

146. §.

Két négylapúak hasonlók egymáshoz, ha megfelelőleg helyezett hasonló falakkal záratnak. Ezeknél a' megfelelő határvonalak arányosok, — a' lapszögletek és testszögletek (anguli diedrales et polyedrales) pedig egyenlők. — De hogy két négylapúnak hasonlóságát megmutassuk: arra nézve mind ezen feltételek' valóságos jelenlétét megmutatni nem szükség; — mert néhánynak jelenlétéből a' többiek' jelenléte szükségkép' következik.

147. §.

Két négylapúak SABC, sabc (id. 137.) hasonlók, Id. 137. *ha egyegy lapszögleteik egyenlők; és az azt képző két*

két falaik SAB és sab, SAC és sac megfelelőleg hasonlók.

A' falak' hasonlóságánál fogva lesz:

SA: sa = SB: sb = SC: sc = AB: ab = AC: ac;

azonban: *lapszöglet* BSAC = *lapszögl.* bsac.

Ezek így levén: az SA határvonalon vegyünk fel SA'-t = sa; és az A' pontnál csináljunk A'B'C' lapot az ABC-vel egyközüleg. Ekkor az SABC és SA'B'C' négylapúak hasonlók, mert minden megfelelő falaik hasonló háromszögek, t. i. △ SAB ∽ △ SA'B', mert talpaik AB és A'B' egyközüek, — △ SBC ∽ △ SB'C', mert talpaik BC és B'C' egyközüek, — △ SAC ∽ △ SA'C' mert talpaik AC és A'C' egyközüek, — végre △ ABC ∽ △ A'B'C' mert minden megfelelő oldalaik egyközüek, és minden megfelelő szögleteik egyenlők. — Már az SABC és SA'B'C' négylapúak' hasonlóságánál fogva lesz: SA: SA' = SB: SB' = SC: SC' = AB: A'B' = BC: B'C';

és ha az előbbi arányokat:

SA: sa = SB: sb 'sat.

ezen utóbbiakkal összevetjük:

mivel SA' = sa: látnivaló, hogy ezen utóbbiban SA' helyett sa-t, SB' helyett *sb*-t 'sat. mindenütt tehetünk; ésígy:

SA' = sa, SB' = sb, SC' = sc, A'B' = ab, A'C' = ac. Ésígy: sab és SA'B', sac és SA'C' falak megfelelőleg egyenlők, — és bsac lapszöglet = B'SA'C' lapszöglet. Innen: sabc négylapú egyenlő az SA'B'C' négylapúval. — Mivel pedig SA'B'C' négylapú hasonló az SABC-hez: látnivaló, hogy sabc négylapú is az SABC-hez hasonló.

148. §.

Két négylapuak hasonlók, ha mindenikben egyegy fa- (l. 137.
lak hasonlók, SAB ∽ sab, és az ezek mellett eső három három lapszögletek egyenlők.

Ugyanis az SAB és *sab* falak' hasonlóságánál fogva lesz:

$$SA : sa = SB : sb = AB : ab.$$

Azonban: *lapsz.* SA = *lapsz.* sa.
lapsz. SB = *lapsz.* sb.
lapsz. AB = *lapsz.* ab.

Ezt feltévén, tegyük, mint előbb 147. §-ban: SA′ = sa, és csináljuk az A′B′C′ lapot az ABC-vel egyközüleg: az SABC és SA′B′C′ négylapúak hasonlók lesznek, a' honnan:

$$SA : SA' = SB : SB' = AB : A'B',$$ — és
lapsz. AB = *lapsz.* A′B′

De mivel SA′=sa: tehát a' fentebbi megmutatás szerint: SB′ = sb, A′B′ = ab, és *lapsz.* *A′B′* = *lapsz.* ab; — ésígy a' kis négylapúak SA′B′C′ és *sabc* egyenlők, mint a' mellyeknek egyegy falaik, és azok mellett eső két két lapszögleteik egyenlők. Ésígy, mint az előbbi §-ban, úgy itt is látnivaló, hogy az sabc és SABC négylapúak hasonlók.

II. A' *csúcsoszlopokról* (pyramis); — *azoknak egyenlőségéről, 's hasonlóságáról.*

149. §.

A' *szabályszerű* csúcsoszlopban (l. 140. §.) a' fenék rendes sokszög, — az oldalfalak pedig egyenszárú há-

romszögek. Semmi megmutatást nem kíván azon tétel: hogy az *ugyanazon fenekű, és ugyanazon magosságú szabályszerű csúcsoszlopok egyenlők*, — mivel ez magából a' csúcsoszlopok' származásából egyenesen folyik.

Az is látnivaló, hogy a' *négylapú* tömeg (tetraëdron) *nem egyéb, mint háromszögű csúcsoszlop.*

II. 138. Bármelly *csúcsoszlopot* SABCDE (id. 138) fel lehet osztani annyi *négylapúra*, a' hány oldalfala van kettő hiján. Erre nézve elég egy határvonalától SA-tól metsző síklapokat húzni, — az AC, AD szögellők' mentiben, mellyek a' feneket annyi háromszögre osztják, a' hány oldala van, kettő hiján. — Innen: *két egyenlő csúcsoszlopot fel lehet osztani ugyanazon renddel egymásnak megfelelőleg egyenlő négylapúakra.* És viszont: *két csúcsoszlopok egyenlők, ha ugyanazon renddel egymásnak megfelelőleg egyenlő négylapúakból tétettek össze.*

II. 138. Ha az SABCDE (id. 138) csúcsoszlop, a' teteje és feneke közt valahol egy síklappal keresztül metszetik, 's felső része, melly maga is egy kisebb csúcsoszlop SA'B'C'D'E', róla levétetik, ott marad egy tömeg A'B'C'D'E'ABCDE, melly *csonka csúcsoszlopnak* neveztetik. Ennek oldalfalai négyszögek, — s két feneke van, felső és alsó, — vagy kisebb és nagyobb. Ha az A'B'C'D'E' metsző lap a' fenékkel ABCDE egyközü: akkor a' csonka csúcsoszlop' falai oldalmások, — felső és alsó fenekei hasonlók, — 's az illyenek *egyközü fenekűcknek* neveztetnek.

150. §.

Két csúcsoszlop egyenlő, ha feneke és egy egy oldalfala mindeniknek egyenlő, 's a' lapszöglet, melly alatt ezek egymásra hajolnak, egyenlő.

Ugyanis, ha ezen két csúcsoszlopot egymásra tennénk, úgy hogy fenekeik és a' felvett egyenlő falaik összeessenek: látnivaló, hogy csúcsaik összeesnek, — mivel a' csúcs ott esik, hol ezen két egymást fedő falak közül mindkettő végződik. Ésígy a' többi falaknak is össze kell esniök; — ésígy a' csúcsoszlopok egyenlők.

151. §.

Id 138. *Két csúcsoszlopok sabcde, SABCDE (id. 138) hasonlók, ha megfelelő 's ugyanazon renddel fekvő falaik mind hasonlók egymáshoz.*

Miután a' falak hasonlók, — ésígy azoknak megfelelő vonalszögleteik egyenlők; — csak azt kell még megmutatni, hogy azon lapszögletek, mellyeket azok egymás közt képeznek, egyenlők megfelelőleg a' két csúcsoszlopban. — Úgyde, ha mindeniknek fenekén, — mellyek sokszögek, — megfelelő szögellőket húzunk, AC, ac, AD, ad-t: lesznek △ ABC ∽ △ abc, △ ACD ∽ △ acd, △ ADE ∽ △ ade. Ekkor az A-nál és *a*-nál képződő 3 háromlapú testszögletek (anguli triedrales) megfelelőleg egyenlők, mert egyenlő vonalszögletek által képeztetnek (l. 135. §.); ésígy azoknak lapszögleteik (ang. diedrales) is egyenlők (l. 134. §.). — Épen illyen móddal tünik ki, hogy egyenlők megfelelőleg azon lapszögletek is, mellyek a' C és c-nél, D és d-nél sat. eső háromlapú testszögleteknél képződnek. — Ésígy 'sat. 'sat.

Követk. 1. Innen: *az SABCDE csúcsoszlopnak ABCDE fenekével egyközű metszölap A'B'C'D'E' által abból elmetszett kis csúcsoszlop, ama nagyobbhoz hasonló.*

Követk. 2. Két hasonló csúcsoszlopokban SABCDE és sabcde, a' megfelelő határvonalak, mind egymással, mind az illető magosságokkal, SO és so, arányosok. Ez egyenesen foly a' megfelelő háromszög-falaknak SAB, sab, — SBC, sbc 'sat. összevetéséből, mellyből egyenlő viszonyok' sora jő ki, — mellyet azután összekötünk a' magosságok' viszonyával, segitségül vévén erre az SA′B′C′D′E′ kis csúcsoszlopot, melly az sabcde-vel egyenlő, a' nagy SABCDE-hez pedig hasonló.

152. §.

Kiadatván az egyközü fenekü csonka csúcsoszlopnak ld. 138.
ABCDEA′B′C′D′E′-nek fenék-oldalvonalai és magossága OO′: kikeresni az egész kipótolt csúcsoszlopnak magosságát. (id. 138).

Az előbbi következmény szerint áll illy arány:

$$SO : SO' = AB : A'B',$$

innen: $SO - SO' : SO = AB - A'B' : AB,$

innen: $AB\,(SO - SO') = SO\,(AB - A'B')$

és: $$SO = \frac{AB\,(SO - SO')}{AB - A'B'}$$

vagy: $$SO = \frac{AB \times OO'}{AB - A'B'}.$$

Ez a' keresett magosság' = SO kifejezete; mellyben minden előforduló vonalak kiadatvák.

III. *A' szögoszlopokról (prisma) — azok' egyenlőségéről 's hasonlóságáról.*

153 §.

Két egyenes szögoszlopok (l. 140. §.), *mellyeknek fenekük és magosságuk ugyanaz, egyenlők.* Ez semmi megmutatást nem kíván, mivel magából a' szögoszlopok' származásából egyenesen folyik.

Az is magában értetik, hogy akárminő szögoszlopot (4-, 5-, 6- 'sat. akárhány-szögűt) háromszögű szögoszlopokra lehet feloszlatni. Mert a' szögoszlop' feneke valami sokszög, — azt pedig szögellőkkel háromszögekre lehet oszlatni, — 's ha ezek' mentiben *szögellő lapok* húzatnak: előállnak a' háromszögű szögoszlopok.

Két egyenlő szögoszlopok ugyanannyi számú, egyenlő, megfelelőleg helyezett háromszögű szögoszlopokból állanak; 's ha meg lehet mutatni, hogy két szögoszlopból ugyanannyi, egyenlő, megfelelőleg helyezett háromszögű szögoszlopok telnek ki: azon bárminemű szögoszlopok egyenlők.

Két szögoszlop egyenlő akkor is, ha feneke és egyegy fala mindeniknek megfelelőleg egyenlő, 's a' lapszöglet, melly alatt ezek egymásra hajolnak, egyenlő. Mert ha a' kettőnek egyenlő fenekei és egyenlő falai egymásra tétetnek: ki fog tünni, hogy ezen szögoszlopoknak minden egyéb részei is összeesnek egymással, — ésígy az egészek egyenlők.

154. §.

Két szögoszlop' hasonlóságának feltételei egyszerűbbek 's önkényt érthetőbbek, mintsem azokat mutogatni kellene; t. i.

1) *hasonlók azok, ha mindeniknek feneke, és egy-egy megfelelőleg helyezett fala hasonló, 's az ezek által képzett lapszögletek egyenlők;*

2) *hasonlók azok, ha mindenikben egyegy megfelelőleg helyzett háromlapszöglet egyenlő, 's az ezt képző 3 falak hasonlók.*

IV. A' Párlapokról (parallelepipedon), azoknak egyenlőségéről 's hasonlóságáról.

155. §.

Tudjuk (140. §.), hogy a' melly szögoszlop' fenekei egyközények, az neveztetik *párlap*-nak. A' párlap tehát hat egyközények által zárt tömeg; 's ezen hat falak' összege teszi a' párlap' felületét. — Midőn a' párlap' oldal-határvonalai, a' fenék gyanánt felvett falra függölegesek: akkor az oldalfalak *párlagok* (rectan-' gulum), 's az illy párlap neveztetik *egyenes*-nek; — midőn ezenkivül még a' fenekeik is párlagok, akkor a párlapot nevezhetjük *pár-párlapnak* (parallelepipedon rectangulum). — Végre ha minden falai egyenlő négy-legek: akkor, — mint tudjuk — lesz *rendes hatlapu*, vagy *koczka*.

Látnivaló, hogy két pár-párlapok egyenlők, ha fenekeik és magosságaik egyenlők, — mert egymásra tétethetnek.

156. §.

Id. 139. *Bármelly párlapban Ac (id. 139) az általellenes falak egyenlők és egyközűek.*

A' szögoszlop' és a' párlap' származásáról (140. §-ban) adott fogalom szerint, a' feltett állitmányt csak az oldalfalakat illetőleg szükség bebizonyítni. Ez igy levén, vegyük fel az Ab és Dc falakat: ezekben az AB egyenlő és egyközü a' DC-vel, mert ugyanazon ADCB egyközénynek megfelelő falai. Épen azon oknál fogva az Aa egyenlő és egyközü a' Dd-vel. — Innen $\sphericalangle$ aAB = $\sphericalangle$ dDC, mivel képző vonalaik egyközüek (127. §.); — tehát az Ab és Dc egyközények egyenlők; tehát azok egyközüek is, mert két egyközü szögletek' sikjai (127. §.).

157. §.

E' következő tulajdonok önként értetnek:

Minden párlapban: 1) *az általellenes határvonalak (ormók) négy négygyel egyenlők és egyközüek*; — 2) *azon síklap-metszék, melly a' párlapot, két átellenes ormóin keresztül metszi, egyközény*; — 3) *azon síklap-metszék, melly annak két átellenes falai közt esik, egyközény*; — 4) *az átellenes lapszögletek egyenlők.*

V. *Bárminemü soklapúakról (polyedron) általában, azoknak egyenlőségéről 's hasonlóságáról.*

158. §.

Bárminemü soklapúakat mindenkor fel lehet oszlatni négylapúakra. És ez többképen történhetik; jelesen, vagy úgy, hogy a' tömeg' közepén felvévén egy pontot, abból a' soklapú' minden csúcsába vonalak húzatnak; vagy úgy, hogy a' soklapúnak egy csúcsa tetszés

szerint felvétetvén, az a' többi minden csúcsokkal egyenes vonalak által összeköttetik.

Az első esetben, a' húzott vonalak annyi háromszögeket képeznek, a' hány határvonala van a' soklapúnak; ezen △-geknek talpai a' határvonalak, — tetejeik pedig mind a' belől felvett pontban jönek össze. — Ezen mütétel által a' soklapú feloszlik csúcsoszlopokra, mellyeknek oldalfalai az emlitett △-gek, — tetőcsúcsaik mind a' felvett belső pontban jönek össze, — fenekeik pedig a' soklapú' falai. Következőleg, mivel minden csúcsoszlopot fel lehet négylapúakra osztani, látnivaló, hogy illy móddal bármelly soklapút fel lehet osztani négylapúakra

A' másik esetben a' soklapú feloszlik ollyan csúcsoszlopokra, mellyeknek tetejök mind a' felvett csúcsban jő össze, — fenekeiket pedig a' tömeg' falai teszik, kivévén azokat, mellyek a' felvett csúcsot képezik.

Jegyz. A' soklapúak' ezen feloszlatását könnyebb képzelni, mint leirni vagy lerajzolni; — legkönnyebben felvehetni pedig ezen czélra fából kimetszett testeken

159. §.

Már látnivaló, hogy *két egyenlő soklapúakat megfelelőleg egyenlő, 's ugyanazon renddel helyezett négylapúakra lehet feloszlatni;* — és viszont, hogy *a' melly soklapúakat megfelelőleg egyenlő, 's ugyanazon renddel helyezett négylapúakra lehet feloszlatni, azok egyenlők.*

Hasonlólag látnivaló, hogy két egyenlő soklapúaknál, a' megfelelő, 's ugyanazon renddel helyezett oldalvonalak, és falak, valamint a' lapszögletek és testszögletek is egyenlők; — és viszont, a' mellyeknél ezek egyenlők, azok egyenlő soklapúak.

160. §

Hasonló soklapúak azok, mellyeket fellehet oszlatni egyenlő számú, 's ugyanazon renddel megfelelőleg hasonló négylapúakra.

A' hasonló soklapúaknál a' megfelelő falak hasonlók, — a' megfelelő lap- és testszögletek egyenlők, — és a' megfelelő határvonalak arányosok, minek megmutatása körül épen olly okoskodás áll, minőt a' hasonló sokszögekre nézve látánk.

És viszont: *a' melly soklapúaknál minden falak megfelelőleg hasonlók, — egymásra egyenlően hajlottak, — 's ugyanazon renddel helyzettek, — azon soklapúak hasonlók.*

HARMADIK CZIKKELY.

A' soklapúak' felületének méréséről 's arányáról.

161 §.

A' soklapúak síkterületekkel levén bezárva, mellyeknek összege teszi a' *felületet:* látnivaló, hogy *bármelly soklapú' felülete annyi, mint az azt bezáró valamennyi falak' udvarainak összege.* Következőleg a' soklapúak' felületét meghatározni könnyü, azon szabályok szerint, mellyek az udvarok' mérésére nézve a' erülettanban adattak. — Ezen szabályok szerint tehát, ha a' külön falak' udvarait mind kiszámitjuk, 's azokat összeadjuk: készen van a' soklapú' felülete. És a' szabálytalan tömegekre nézve csak ezt tehetni; a' szabályszeresekre nézve pedig az általános szabályt egyszerüsitni is lehet.

Jelesen:

1) *A' szabályszerű csúcsoszlop'* oldalfalai megannyi egyenszáru 's egyenlő háromszögek levén: látnivaló, hogy azoknak *oldalfelülete kijő, ha a' fenék' kerítése, az oldalháromszögek közül egynek magosságával sokszoroztatik.* Legyen a = a' fenék sokszögnek egy oldalvonala, — n = az oldalok' száma, — h = az oldalháromszögek' magossága: lesz

az *oldalfelület* = $\frac{1}{2}$na × h.

Még ehhez hozzá kell adni a' fenék-sokszög' udvarát, melly, mint tudjuk, kijő, ha a' kerités' felét egy a' sokszögben képezhető háromszög' apothemájával, (melly legyen=t) sokszorozzuk, ésígy lesz a' fenék' udvara = $\frac{1}{2}$na × t.

Innen a' *szabályszerű csúcsoszlop' egész felülete:*

= $\frac{1}{2}$ na × h + $\frac{1}{2}$ na × t

= $\frac{1}{2}$ na × (h + t).

2) Az *egyenes szögoszlop'* oldalfelülete kijő, ha a' fenék-kerités az oldalfalak' egy határvonalával sokszoroztatik; — és az egész felületre nézve, ehhez még a' fenékterületek' udvarai adatnak.

3) A' *szabályszerű szögoszlop'* egész felülete kijő, ha a' fenék-kerités, az oldalfalak' határvonalának, és a' fenék' apothemájának összegével sokszoroztatik.

162. §.

A' hasonló soklapúak' felületei olly viszonyban vannak egymáshoz, — mint megfelelő határvonalaik' négylegei.

Ugyanis tudjuk (102. §.), hogy a' hasonló sokszögek' udvarai úgy vannak egymáshoz, mint megfelelő

oldalaik' négylegei. Ezen elvet ide alkalmazván: mivel a' hasonló soklapúak' megfelelő falai mind hasonló sokszögek: egyenlő viszonyok' sora áll elő ezen megfelelő falakból, 's azok' megfelelő határvonalainak négylegeiből. Következőleg az egyik soklapú' minden falainak összege úgy van a' másik soklapú' minden falainak összegéhez: mint az elsőnek bármelly külön fala, a' másiknak bármelly külön falához, — vagy mint az első' bármelly határvonalának négylege, a' másik' megfelelő határvonalának négylegéhez. — Szóval, *két hasonló soklapúak' felületei úgy vannak egymáshoz, mint két megfelelő határvonalaik' négylegei.*

NEGYEDIK CZIKKELY.

A' soklapúak' tömegtartalmának (soliditas, volumen) méréséről 's arányáról.

163. §.

Valamelly tömeg' tartalmát megmérni annyi, mint azt számokkal kifejezni; — hogy számokkal kifejezhessük: szükség azt valami saját-fajta egységhez viszonyítni, — vagyis meghatározni, hányszor térne el abban, vagy hányszor telnék ki abból valamelly egység gyanánt, — viszonyitás' alapjául, tetszés szerint felvett tömeg.

Illy mértékül szolgálandó tömeg-egység gyanánt fel szoktak venni ollyan koczkát (cubus), mellynek minden külön határvonala egyenlő valamelly vonalmértéki egységgel, 's minden külön fala egyenlő a' megfelelő udvarmértéki egységgel. P. o. vonalmértéki egységek: az *öl*, a' *láb*, a' *hüvelyk* 'sat.: tömegmértéki egységek

a' *koczka-öl, koczka-láb, koczka-hüvelyk* (vagy *köb-öl, köb-láb, köb-hüvelyk)* 'sat., mellyeknek minden külön határvonala egy-egy öl, láb, hüvelyk 'sat. Innen a' tömeg' tartalmának mérését nevezik *koczkaitás*nak is (cubatura solidorum).

I. *A' párlapok' tömegtartalmának méréséről.*

164. §.

Az ugyanazon fenekű és magosságú párlapok' tömegtartalmaik egyenlők.

Hogy ezen állítmány általános legyen: két esetet különböztessünk meg, t. i. 1) ha a' felvett párlapok oldalról két egyközü síkok között feküsznek; és 2) midőn oldalról nem egyközü síkok között feküsznek.

Id. 140. 1-sö *eset.* Az AM és EM párlapoknak (id. 140.) közös fenekük az IKLM,—magosságuk pedig, mellyet a' BE és DG vonalak' kihúzása által származott AH lap határoz, a' feltétel szerint, egyenlő. A' két párlap' egymást keresztül-metszésénél húzható metszék-vonal = NO. Ezen vonalak' kihúzása által származnak itt négy háromszögü szögoszlopok, mellyek az egész tömeget keresztbe vágják, u. m. egyik az, mellynek fenekét mutatja a' CGL háromszög, egyik oldalfalát az AG lap, másiknak irányát az LI határvonal, ésígy ez = AGLI háromszögü szögoszlop; — másik az, mellynek fenekét mutatja a' DHM háromszög, egyik oldalfalát a' BH lap, másiknak irányát az MK határvonal, ésígy ez = BHKM háromszögü szögoszlop; — harmadik az, mellynek fenekét mutatja a' DGN háromszög, — egyik oldalfalát a' BG lap, másiknak irányát az NO metszés-vonal,— ésígy ez = BGNO háromszögü szögoszlop; — negyedik az,

mellynek fenekét mutatja az LMN háromszög, — egyik oldalfalát az LK fenék, másiknak irányát az NO vonal, — ésígy ez — LKNO háromszögü szögoszlop.

Már könnyü megmutatni, hogy:

$$\triangle CGL = \triangle DHM$$

mert CL = DM, GL = HM, CG = DH (mivel CD = GH, a' DG pedig közös pótlék.) Továbbá:

egyközény AECG = BFHD 'sat.

△*-gü szögoszlop* AGLI = △*-gü szögoszl. BHMK*;

továbbá: *szögoszl* AGLI + szögoszl. LKNO =

= *szögoszl.* BHMK + *szögoszl.* LKNO.

továbbá: *sz.oszl.* AGLI + *sz.oszl.* LKNO — *sz.oszl.* BGNO

= *sz. oszl.* BHMK + *sz.oszl.* LKNO — *sz.oszl.* BGNO.

következőleg: *párlap* AM = *párlap* EM.

2-*dik eset.* A' 141-dik idomon vannak az AB és Id. 141.
CB párlapok, mellyeknek közös alsó fenekük a' BF, felső fenekeik AG, és CH pedig ugyanazon EI síklapon feküsznek, — de oldalfalaik nem esnek két egyközü síkok közt. Ezen párlapok is tömegtartalmukra nézve egyenlők. Mert gondolván egy harmadik párlapot DB, mellynek alsó feneke ugyanazon FB egyközény, melly ama két párlapé, — a' felső feneke DI pedig amazokéival ugyanazon síkon az EI-n esik, — végre IL oldalfala a' HL-el, és IK oldalfala a' GK-val ugyanazon síkon esnek: tehát látnivaló, hogy

párlap AB = *párlap* DB,

és *párlap* CB = *párlap* DB;

következőleg, *párlap* AB = *párlap* CB.

Áll tehát általában ezen szabály, hogy az egyenlő fenekü és magosságú párlapok' tömegtartalmaik egyenlők; — és bármelly ferde párlap egyenlő tartalmú azon

egyenes párlappal, mellynek feneke és magossága amazéval egyenlő.

Id. 142. Az ollyan egyenes párlap is AH (id. 142.) mellynek feneke AF, ferde egyközény, egyenlő tartalmú az ollyan párpárlappal, mellynek magossága amazéval, — párlag-feneke AK pedig, amannak fenekével (96. §. szerint) egyenlő. Mert ezen két felvett párlapoknak közös fenekük gyanánt vevén az ABCD egyközényt: azoknak általellenes fenekeik, mellyeket most oldalfalak gyanánt tekintünk, ugyanazon két egyközü síkokon feküsznek, — ésígy ezen párlapok az ezen §-ban előadott első eset alá esnek.

Innen bármelly párlap egyenlő tartalmú azon párpárlappal, mellynek feneke ennek fenekével, és magossága ennek magosságával egyenlő.

165. §.

Id. 143. *Két párlapok' tömegtartalmai, ha fenekeik egyenlők, olly viszonyban vannak egymáshoz, mint magosságaik.*

Legyen azon két párlap AM és AH, mellyeknek fenekeik egyenlők. Ha az AH kisebbik párlapot rá teszszük a' nagyobbikra úgy, hogy feneke annak fenekére essék; mivel azok egymást elfedik: látnivaló, hogy tömegeik is elfedik egymást ollyan magosságig, a' mekkora a' kisebbik párlapé = AE-ig. Tegyük fel, hogy a' kisebbik' magossága AE felényi mint a' nagyobbiké AI: akkor a' kisebbik párlap' tömege, a' nagyobbik párlap' tömegének felét fedi el; — ha $AE = \frac{1}{3}$ AI: akkor az AH párlap' tömege az AM párlap' tömegének $\frac{1}{3}$ részét fedné el, 'sat. Nyilván van tehát, hogy a' párlapok' tömegtartalmai, ha fenekeik egyenlők, olly viszonyban vannak egymáshoz, mint magosságaik:

párlap AH : *párlap* AM = AE : AI.

166. §.

Két bárminő pár-párlapok' — AG, AM — (id. 144.) *tömegtartalmai olly viszonyban vannak egymázhoz, mint egy egy testszögletüket képző három határvonalaik' sokszorozmányai.* Id. 144.

Képzeljük ezen két pár-párlapot úgy lenni egymásban, hogy mindeniknek egy testszöglete *A* összeessék. Továbbá a' mint az AG párlap' fekvő feneke CG az AM párlapot metszi: ugyanollyan magossággal, az AM párlap' vastagságával = CD, — de az AG párlap' szélességével = DE = AB csináljunk egy 3-dik párpárlapot = AE; és még 4-dik párpárlap lesz az AM-ből ki metszett Ad.

Már: az AE és Ad párlapok, ha közös feneküket gyanánt a' CDOA vételik, úgy lesznek egymáshoz, mint magosságaik, t. i. AB: Ab. — Továbbá az AG és AE párlapok, ha közös feneküket gyanánt a' CB szembenesö fal vételik, úgy lesznek egymáshoz, mint magosságaik, t. i. AP: AO. — Végre az Ad és AM párlapok, közös feneküket levén az AS, úgy vannak egymáshoz, mint magosságaik, t. i. AC: AI. — Tegyük egymás alá ezen 3 arányokat: lesz

$$AE : Ad = AB : Ab.$$
$$AG : AE = AP : AO,$$
$$Ad : AM = AC : AI:$$

az elö- és utótagokat egymással sokszorozván, és az egyenlö sokszorozókat kihagyván:

$$AG : AM = AB \times AP \times AC : Ab \times AO \times AI.$$

Követk. 1) Mivel AB × AP, és Ab × AO nem egyebek, mint illetöleg a' két felvett párpárlap' fenékterületei: látnivaló, hogy a' feltett átlitmányt így is mondhatjuk:

a' párpárlapok' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint fenekeiknek magosságaikkali sokszorozmányai.

Miből ismét következik, hogy *ha magosságaik egyenlők: tömegtartalmaik úgy vannak egymáshoz, mint fenék-udvaraik.*

Id. 145. *Követk.* 2) Ha az AG párpárlapot (id. 145.) az *ag* koczkához viszonyítjuk, melly koczka valamelly tömegmértéki egységet képezzen, — mellynek tehát minden külön határvonala valamelly hosszmértéki egység, — ésígy minden külön fala valamelly udvarmértéki egység: illyen arány lesz:

$$AG : ag = AB \times AD \times AE : ab \times ad \times ae$$

vagy: $AG : 1 = AB \times AD \times AE : 1 \times 1 \times 1$

innen: $AG \times 1 \times 1 \times 1 = AB \times AD \times AE \times 1$

innen: $AG = AB \times AD \times AE$.

Látnivaló tehát, hogy *a' párpárlap' tömegtartalma kijő, ha három összemenő határvonalai (számokkal kifejeztetvén) egymással sokszoroztatnak.* És mivel $AB \times AD$ = fenék-udvar: más szókkal így mondhatjuk: *a' párpárlap' tömegtartalma kijő, ha a' fenékudvar a' magossággal sokszoroztatik.*

Vagy más szókkal: *a' párpárlap' tömegtartalma, valamelly tömegmértéki egység' tartalmához épen azon viszonyban van: mint 3 összemenő határvonalai' sokszorozmánya, — a' megfelelő vonalmértéki egységhez.*

Követk. 3) Mivel a' koczkának 3 összemenő — sőt minden — határvonalai egyenlők: látnivaló, hogy *a' koczka' tömegtartalma annyi, mint egy határvonalának koczkahatványa.* És a' számtanban a' *koczkahatvány* elnevezés épen innen ered.

Innen a' koczka' tömegében annyi tömegmértéki egységek találtatnak, a' mennyit mutat egyegy határ-

vonalában levő, ugyanazon nevű hosszmértéki egységeknek koczkahatványa. P. o. egy koczka ölben van $\overline{6}^3 = 216$ koczka-láb (ha 6 láb tesz egy hosszmértéki ölet), — vagy = 1000 koczka láb, (ha 10 láb tesz egy hosszmértéki ölet. — Egy koczka-lábban van = $\overline{12}^3 = 1728$ koczka hüvelyk (ha 12 hüvelyk tesz egy lábat) 'sat. Innen látnivaló, hogy a' melly viszonyban vannak a' hosszmértéki kisebb egységek a' nagyobbakhoz: azon viszonynak koczkahatványában lesznek az ugyanazon nevű tömegmértéki kisebb egységek, az ugyanazon nevű nagyobbakhoz. — Azonban már láttuk a' 95-dik §-ban, hogy az udvarmértéki egységek a' hosszmértékieknek négylegviszonyában vannak. Ésígy:

hosszmértéki öl: láb = 6: 1
udvarmértéki □ öl: □ láb. = 36: 1
tömegm. koczka öl: koczk. láb = 216: 1 'sat.

Követk. 4) *Bárminő párlap' tömegtartalma annyi, mint fenékudvarának magosságával sokszorozmánya.* — Ez egyenesen folyik abból, hogy bárminő párlap, egyenlő tartalmú az ollyan egyenes párlappal, mellynek magossága ezével ugyanaz, fenekeik pedig egyenlők; — és hogy ismét ezen egyenes párlap egyenlő tartalmú az ollyan párpárlappal, mellynek magossága ezével ugyanaz, — fenekeik pedig egyenlők (lásd 164 §.) — E' szerint általában mondhatni: hogy *az egyenlő fenekű és magosságú párlapok' tömegtartalmaik egyenlők.*

II. *A' szögoszlopok (prismata) tömegtartalmának méréséről.*

167. §.

Bármelly háromszögű szögoszlop ABC' (id. 146.) l. 146.

egyenlő azon egyenes háromszögű szögoszloppal Abc′, mellynek határvonala A′A ugyanaz; — feneke pedig Abc az előbbi szögoszlopból olly metszék, melly az A′A határvonalra függőleges.

Ugyanis: a' szögoszlop' fogalma szerint AA′ = BB′ = CC′; és a' szerkezet szerint AA′ = bb′ = cc′; Innen BB′ = bb′, CC′ = cc′. Ez így levén, ha az A′b′c′ háromszöget, a' vele egyenlő Abc-re felvisszük: a' B′b′ és C′c′ vonalak mellyek az A′b′c′-re függőlegesek, épen össze fognak esni a' Bb és Cc-vel, mellyek az Abc-re függőlegesek; ésígy a' B′ pont a' B-re, a' C′ a' C-re fog esni; — ésígy az A′b′c C′B′ tömeg, az AbcCB tömeggel összeesik; ésígy azok egyenlők. — Már az AbcA′B′C′ tömeghez, ezen egyenlő tömegek közül ha előbb az egyiket, azután a' másikat adom: ezen két ízben származandó két tömegek egyenlők lesznek. Úgyde egyrészről származik az Abc′ egyenes-, más részről az ABC′ ferde háromszögű szögoszlop: — ezek tehát egyenlők.

168. §.

Id. 147. *Azon két háromszögű szögoszlopok, mellyekre bárminő párlapot felosztani lehet, egyenlők.* (id. 147.)

Ugyanis a' BB′ és DD′ általellenes határvonalokon szögellő falat húzván, feloszlik az A′C párlap két háromszögű szögoszlopra ABD′, és D′C′B-re. Ha az A′C párlap, ésígy ezen szögoszlopok is ferdék: messük keresztül a' párlapot egy olly síklappal, melly a' BB′ és DD′ határvonalakra függőleges legyen; ezen síklap-metszék *abcd* egyközény, ésígy △abd = △bdc. Már azon egyenes szögoszlop, mellynek feneke volna = *abd*, magossága pedig = BB′, egyenlő azon ferde

szögoszloppal, mellynek feneke = A'B'D', magossága pedig = BB' (167. §). Továbbá azon egyenes szögoszlop, mellynek feneke = *bdc*, magossága = DD', egyenlő azon ferde szögoszloppal, mellynek feneke = BCD, magossága = DD'. — Úgyde mivel △abd = △bdc, és BB'=DD': az említett egyenes szögoszlopok egymással egyenlők; — ésígy a' ferdék is, ABD' és D'C'B, mellyekre az A'C párlapot feloszthatni, egyenlők.

Követk. 1) *Bármelly háromszögü szögoszlop' tömegtartalma felényi, mint a' kétakkora fenekü, és egyenlő magosságú párlapé.*

Követk. 2) *A' háromszögü szögoszlop' tömege kijő, ha háromszög-feneke magosságával sokszoroztatik.*

Követk. 3) Mivel a' sokszögü szögoszlopot annyi háromszögü szögoszlopokra lehet feloszlatni, a' hány háromszög telik ki sokszögü fenekéből: látnivaló, hogy *bármelly sokszögü szögoszlop' tömegtartalma kijő*, ha a' fenéksokszöget képző háromszögek' összege, vagy más szóval, *ha a' sokszög-fenék a' magossággal sokszoroztatik.* — Ha a' sokszögü szögoszlop szabályszerü, azaz, ha feneke rendes sokszög: akkor tömegtartalma kijő, ha félkeritése az apothemával, 's ez ismét a' magossággal sokszoroztatik, — tehát a' 161. §. szerint

szabálysz. szögoszl. tömege = $\frac{1}{2}$ na × t × h;

és ha a' szögoszlop felette sokoldalú, úgy hogy fenéksokszöge a' körhöz közelit, ésígy ennek keritése a' kör' körületével (P), — apothemája pedig a' sugárral (R) igen egyenlő: akkor a' *szabálysz. szögoszl. töm.* = $\frac{1}{2}$ PR × H.

Követk. 4) *Két szögoszlopok' tömegei úgy vannak egymáshoz, mint feneküknek magosságukkali sokszo-*

rozmányai; — ha fenekeik egyenlők, úgy vannak, mint magosságaik; — ha magosságaik egyenlők, úgy vannak, mint fenekeik; — végre ha mind fenekeik, mind magosságaik egyenlők: akkor tömegtartalmaik is egyenlők.

III. *A' négylapúak' (tetraëdra), csúcsoszlopok' (pyramides), és bárminő soklapúak' (polyedra) tömegtartalmának méréséről.*

169. §.

Két négylapúak tömegtartalmukra nézve egyenlők, ha fenekeik és magosságaik egyenlők.

Mielőtt ezen tétel' bizonyításához fognánk, győződjünk meg e' következő állitmány' igazságáról, hogy: *ha egy változtatható mennyiség X, két nem változtatható mennyiségek A és B közül mindegyikhez „egyenlően" közelíthet, a' meddig csak akarjuk: azon két, A és B, mennyiségek egyenlők.* Ugyanis, ha nem volna A = B, — akkor köztök volna valami különbség = *d*. Már minél inkább közelitne az X az A-hoz: annál inkább nőne az X és B közti különbség; és ha az X az A-val épen egyenlővé lenne: akkor az X és B közti különbség egyenlő lenne a' *d*-vel. Ésigy nem történhetnék az, hogy az X mind az A-hoz, mind a' B-hez egyenlően közelíthessen. — Látnivaló tehát, hogy ez csak akkor történhetik, ha A = B.

Id. 148. Már a' felvett állítmányt illetőleg: vegyünk fel két négylapút, 's a' mi mütételt véghezviszünk az egyiken, értsük azt a' másikra nézve is. (id. 148.)

Legyen tehát SABC négylapú; — szeljük azt az ABC fenékhez egyközű síklapok által annyi szeletekre, a' mennyire akarjuk, de egyenlő magosságúakra. Például szeljük 3 szeletre, az A'B'C' és A''B''C'' metszőlapok által. — Az A és B, A' és B', A'' és B'' pon-

tokból húzzuk az AD és BE, A'D' és B'E', A''D'' és B''E'' vonalakat, az SC határvonallal egyközűleg, — mellyeknek magosságukat a' metszö lapok, vagy azok folytatásai határozzák. — Már úgy képzelhetjük, mintha minden szelet' határfalainál képeztetnék két két háromszögü szögoszlop, egyik a' nagyobb vagy alsó-, másik a' kisebb vagy felsö metszö-lappal, mint fenékkel képezve, — a' nagyobb szögoszlop *külsö*, — a' kisebb *belsö*, — a' külsö nagyobb mint a' négy lapúnak azon határfalak közt esö szelete, — a' belsö pedig annál kisebb, — 's így a' szelet' tömege azon két szögoszlop' tömege közt esik. Így: az elsö szelet ABCA'B'C' esik a' *külsö* ABCDEC' és *belsö* acCA'B'C' szögoszlopok között; — a' második szelet esik az A'B'C'D'E'C'' külsö, — és bdC'A''B''C'' belsö szögoszlopok között, — így tovább egész az utolsó SA''B''C'' szeletig, — mellynek már csak külsö szögoszlopa van A''B''C''D''E''S, — belsö nincs.

Minél több szeletekre osztjuk fel a' négylapút, vagy minél közelebb esnek egymáshoz az emlitett szögoszlopoknak alsó és felsö fenekeik: annál kisebb lesz a' különbség az ugyanazon szelethez tartozó külsö és belsö szögoszlopok' fenekeik között, 's — mivel magosságaik egyenlök, — annál közelebb járnak egymáshoz azoknak tömegeik is, — 's így az azok közti különbséget végetlenül lehet kicsinyitni, — 's ha egyenlökké lennének, akkor mindegyik egyenlö lenne a' négylapú' illetö szeletének tömegével, — szóval, mindegyik végetlenül közelithet a' négylapú' illetö szeletének tömegéhez. E' szerint mind a' külsö-, mind a' belsö szögoszlopok' összege végetlenül közelithez az egész négylapú' tömegéhez.

Ha a' másik egyenlő fenekü és magosságú négylapún is, épen illyen vonalakat 's lapokat húzunk: azon is épen illyen szeletek és szögoszlopok állnak elő, — 's azokat is épen a' mondott szabályok illetik. És mivel a' két négylapúnak egyenlő magossága egyenlő részekre osztatik, — felvévén a' külsö (akár a' belsö-, de már csak az egyikféle) szögoszlopokat, ezek a' két négylapún párjával megfelelöleg mind egyenlök; — ésígy az egyik négylapú' külsö szögoszlopainak összege S, annyi, mint a' másik négylapú' külsö szögoszlopainak összege S'. — Már az egyik négylapú' tömegét nevezvén V-nek, a' másikét V'-nek: mind az S a' V-hez, mind az S' a' V'-hez végetlenül közelíthet; vagy mivel S = S': az S mind a' V-hez mind a' V'-hez végetlenül közelíthet. Mivel tehát az S, változtatható mennyiség, ama két nem változtathatóhoz (V és V') t. i. a' két egyenlö fenekü és magosságú négylapúak' tömegéhez egyenlöen közelíthet: látnivaló, hogy ezen két tömegek egymással egyenlök.

170. §.

Id. 149. *Bármelly négylapúnak SABC (id. 149.) tömegtartalma annyi, mint fenékudvarának magosságával sokszorozmányából egy harmadrész.*

Ugyanis: könnyü megmutatni, hogy bármelly négylapú a' vele egyenlö fenekü és magosságú szögoszlopnak egy harmad-része. — Csináljunk az SABC négylapúval egyenlö fenekü és magosságú szögoszlopot = AD. — Ezen szögoszlopot három egyenlö négylapúakra lehet feloszlatni. T. i. elöször is vágjunk metszö lapot az S csúcsból az AC határvonal felé,— ez által lemetszük a' szögoszlopból épen a' felvett SABC négy-

lapút; és még ott maradt az SACDE négyszögü csúcsoszlop, mellynek tetőcsúcsa az S, feneke pedig az ACDE lap. Most vágjunk ismét metszőlapot az S csúcson és AD szögellőn keresztül; ezáltal az SACDE négyszögü csúcsoszlop feloszlik két négylapúra, SAED, és SACDre, mellyek egymással egyenlők, mivel mindeniknek tetőcsúcsa az S, ésígy magosságuk egyenlő, — azonban fenekeik is egyenlők, AED = ACD. — Továbbá az SAED csúcsoszlop egyenlő az SABC-vel,—mivel ha az SAED-nek fenekeül vesszük az ESD-t, akkor tetőcsúcsa az A, — az SABC-nek pedig fenekeül vévén az ABC-t, tetőcsúcsa az S, — e' szerint látnivaló, hogy fenekeik és magosságaik egyenlők. Ésígy:

csúcsoszl. SAED = *csúcsoszl.* SABC,
„ „ SAED = „ „ SACD,
ésígy: SAED = SABC = SACD.

Látnivaló tehát, hogy az AD szögoszlopnak azon három részei, mellyek közül egy a' szögoszloppal egyenlő fenekü és magosságú négylapú, egymással mindnyájan egyenlők, ésígy a' négylapú a' szögoszlopnak egy harmadát teszi. Ésígy a' *négylapú' tömegtartalma kijő, ha fenékudvara, magosságának egy harmadrészével sokszoroztatik.*

171. §.

Bármelly csúcsoszlop' (pyramis) tömegtartalma annyi, mint a' fenékudvarnak a' magossággali sokszorozmányából egy harmadrész.

Ugyanis, mint a' 149 §-ban látánk, minden csúcsoszlopot fel lehet osztani négylapúakra, mellyek mind egyenlő magosságúak lesznek a' csúcsoszloppal, — fe-

nekeik pedig összesen teszik a' csúcsoszlóp' fenekét. Már ezen négylapúak' tömege külön külön annyi, mint illető fenekük' és magosságuk' sokszorozmányának harmad-része; — ésígy mindezen négylapúaknak együtt, vagyis a' felvett csúcsoszlopnak tömege annyi, mint mindazon négylapuak' fenekeinek együtt, vagyis a' felvett csúcsoszlop' fenekének magosságávali sokszorozmányának egy harmad-része. — Ha a' csúcsoszlop szabályszerű: akkor annak tömegtartalma $= (\frac{1}{2}\,na \times t \times h) : 3 = \frac{na \times t \times h.}{6}$ És ha végetlen sok oldalú: akkor tömegtartalma (l. §. 168. *köv.* 3) $= (\frac{1}{2}\,PR \times H) : 3 = \frac{PRH}{6}$

Követk. 1.) Bárminő csúcsoszlop az ugyanazon fenekű és magosságú szög-oszlopnak egy harmad-része.

Követk. 2.) Két csúcsoszlopok' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint fenékudvaraiknak magosságaikkali sokszorozmányai; — és úgy vannak, mint csupán magosságaik, ha fenékudvaraik egyenlők; végre egyenlő tömegtartalmúak, ha fenekeik és magosságaik egyenlők.

Követk. 3.) Miután a' 152. §. szerint *a' csonka csúcsoszlopnak*, mellynek alsó és felső egyközü fenekei, és magossága kiadatvák, egész csúcsoszlopra kipótoló magosságát ki tudjuk keresni: — ha mind az egész csúcsoszlopnak, mind a' csonkát egészre kipotoló kis csúcsoszlopnak, külön külön tömegeit kiszámítván, a' kis csúcsoszlop' tömegét az egész nagy csúcsoszlopéból kivonjuk, ott marad a' csonka csúcsoszlop' tömege.

127 §.

A' csonka háromszögü szögoszlop' ABCA'B'C' (id. 105) tömege annyi, mint összesen három négylapúak' tömege; mellyeknek közös fenekük, a' csonka szögoszlop' fenekei közül egyik ABC, — tetőcsúcsaik pedig az általellenes fenék' szögletei A', B', C',

Ugyanis: a' B' csúcsból húzzunk metszölapokat, mellyek közül egyik az AC határvonalon, másik az AC' szögellön menjen keresztül. Ekkor a' csonka szögoszlop három négylapúra lesz felosztva, B'ABC, B ACC', és B'AA'C'-re. Ezek közül az elsőnek feneke maga a' szögoszlop' feneke ABC, teteje a' B' De a' másik kettő nem azok, mellyeket az állitmány kiván; azonban könnyü megmutatni, hogy azok a' kivánt C'ABC és A'ABC négylapúakkal megfelelőleg egyenlők.

T. i. négylapú B'ACC', fenekeül vévén az ACC'-t, és tetőcsúcsául a' B'-t, egyenlő a' BACC' négylapúval, ennek is fenekeül vévén az ACC'-t, 's tetőcsúcsaúl a' B'-t, — mert ezen két négylapúak' magossága egyenlő, mert tetőcsúcsaik B' és B, ugyanazon BB, fenekükre egyközü, vonalon feküsznek. — Úgyde a' BACC' négylapút úgy is vehetjük, mint a' mellynek feneke az ABC, tetőcsúcsa pedig a' C'-ben van. És ez már azon négylapú, melly az állitmányban kivántatik. — Épen illyen módon lehet megmutatni, hogy a' B'AA'C' négylapú egyenlő az A'ABC négylapúval. — Ésigy csak ezen 3 négylapúak' tömegeit kell kikeresni, — azokat összeadni,—'s ezen összeg annyi, mint a' csonka háromszögü szögoszlop' tömege.

Követk. A' csonka háromszögü szögoszlop' tömege kijő, ha annak egyik feneke, a' másik fenék' szögletei-

ből reáhúzható függőleges vonalak' összegének harmad-részével sokszoroztatik. Ha egyenes a' csonka szög-oszlop: akkor a' függőleges vonalak, a' szögoszlop' határvonalaival épen egyenlők.

173. §.

A' csonka egyenes párlapnak, és csonka pár-pár-
id. 151. *lapnak tömegtartalma annyi, mint fenékudvarának, az ezen fenékre függőleges négy határvonalak' összegének negyedrészéveli sokszorozmánya.* (id. 151.)

Ennek megmutatása végett, jegyezzük meg elsőben, hogy az AC' és BD' szögszelő lapok, oldalmások, mellyeknek közös metszö-vonaluk, a' H'H, olly egyenes vonal, melly mind a' két oldalmás' talpvonalaitól egyenlő távolságra van, — mert a' két fenéket ABCD és A'B'C'D'-t metszö szögellő vonalak' metszéspontjait H-t és H'-t köti össze, 's így egy részről a' D és B, D' és B', más részről az A és C, A' és C' pontoktól egyenlő távolságra van. — Innen ugyanazon $H'H = \frac{1}{2}(AA' + CC') = \frac{1}{2}(BB' + DD')$ mint fentebb tanultuk. Következőleg: $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Ez így lévén: a' felvett csonka párlap az AC' szögszelő lap által feloszlik két csonka háromszögü szögoszlopra, ABCA'B'C' és ADCA'D'C'-re.

Már a' 127. §. szerint:

tömeg $ABCA'B'C' = \text{ud.}\, ABC \times \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC')$;
tömeg $ADCA'D'C' = \text{ud.}\, ADC \times \frac{1}{3}(AA' + DD' + CC')$;
ezeket összeadván, 's megjegyezvén, hogy ABC=ADC:
tömeg $ABCDA'B'C'D' = \text{ud.}\, ABC \times \frac{1}{3}({}_2AA' + {}_2CC' + BB' + DD')$

Ha már BB′ + DD′ helyett az AA′ + CC′-t teszszük: lesz:

tömeg ABCDA′B′C′D′ = *udv.* ABC × (AA′ + CC′)

v. *töm.* ABCDA′B′C′D′ = *udv.* ABCD × ½ (AA′ + CC′)

vagy végre:

tömeg ABCDA′B′C′D′ = *udv.* ABCD × ¼(AA′ + CC′ + BB′ + DD′).

Ez a' mit meg kellett mutatni.

Követk. A' párlapra nézve az előbbi képletet illy alakba lehet önteni:

tömeg. ABCDA′B′C′D′ = AB.BC × $\left(\frac{AA' + BB'}{4} + \frac{CC' + DD'}{4}\right)$.

$= BC \times \left(\frac{(AA' + BB')}{4} \cdot AB + \frac{(CC' + DD')}{4} \cdot AB\right)$

$= \frac{1}{2} BC \times \left(\frac{(AA' + BB')}{2} \cdot AB + \frac{(CC' + DD')}{2} \cdot AB\right)$

's végre megjegyezvén, hogy AB = DC:

tömeg. ABCDA′B′C′D′ = $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{(AA' + BB').AB}{2} + \frac{(CC' + DD').DC}{2}\right)$ BC.

Ugyde ezen egyenlet' második részének nagy korlátjai közt eső két tagok, az ABB′A′ és DCC′D′ két oldalmások' udvarait fejezik ki, melly oldalmások épen a' kérdésben forgó csonka párpárlap' általellenes egyközü falai, — mellyeknek egymástóli távolsága = BC. Innen tehát látnivaló, hogy *a' csonka párpárlap' tömegtartalma annyi, mint az általellenes egyközü oldalfal-udvaroknak, az ezen kétfalak közötti távolsággali sokszorozmányának fele.*

Jegyz. Ezen mérésmódot lehet alkalmazni minden illyan tömegdaraboknál, mellyek két-egymástól nem messze eső egyközü falakkal birnak, — bármiből legyen egyéb fel li környezetük.

IV. *A' soklapúak' tömegtartalmának arányosságáról.*

174. §.

Id. 138. *A' hasonló csúcsoszlopok' tömegtartalmai olly viszonyban vannak egymáshoz, mint megfelelő határvonalaiknak, vagy pedig magosságaiknak koczkahatványai.*

Legyenek hasonló csúcsoszlopok *sabcde*, és SABCDE (id. 138.) lesz a' 102. §. szerint:

$$abcde : ABCDE = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Ugyde ezen csúcsoszlopok hasonlók levén: megfelelő határvonalaik, mind egymás között, mind illető magosságaikkal arányosok; ésígy:

$$ab : AB = so : SO,$$

innen: $\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{so}^2 : \overline{SO}^2$.

Ezen utóbbi, és a' legelső arányban egy viszony ugyanaz levén: lesz

$$abcde : ABCDE = \overline{so}^2 : \overline{SO}^2.$$

Ha ezen arányt ime másik aránynyal:

$$\frac{1}{3}\, so : \frac{1}{3}\, SO = so : SO$$

tagról tagra sokszorozzuk, lesz:

$$abcde \times \frac{1}{3}\, so : ABCDE \times \frac{1}{3}\, SO = \overline{so}^3 : \overline{SO}^3.$$

Honnan látnivaló, hogy a' *hasonló csúcsoszlopok' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint magosságaik' koczkahatványai.* De valamint ezen magosságok, a' megfelelő határvonalakkal arányosok: úgy arányosok azoknak koczkahatványaik is egymással; következőleg:

tömeg $sabcde : töm.\ SABCDE = \overline{sa}^3 : \overline{SA}^3 = \overline{sb}^3 : \overline{SB}^3$ 'sat.

Követk. Ezen most megmutatott állitmányból egyenesen foly, hogy *bárminemű hasonló soklapúak' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint megfelelő határvonalaik' koczkahatványai.*

ÖTÖDIK CZIKKELY.

A' domború felülettel zárt tömegekről.

175. §.

Domború felülettel zárt tömegek sokfélék lehetnek, a' szerint, a' mint felületeik különféle görbe vonalakból különféleképen származnak Az elemi mértan' tárgyai csupán ollyanok lehetnek, mellyek körökből származnak, — *kördomború* tömegek — ; még pedig ezek közül is csupán 3 félék, u. m. a' *körhenger*, *körkúp*, és *gömb*. — Ezekről fogunk hát itt rendde! beszélni. (Előleges ismereteket felölök lásd fentebb 140. §.).

I. *Az egyenes körhengerről, — annak felületéről és tömegtartalmáról.*

176. §.

Az egyenes körhengerben a' fenékkel egyközüleg bárhol metszhető síklap, a' fenékkel egyenlő körterület, — mint ez a' körhenger' származásának (140. §.) adott fogalmából nyilván van.

Két egyenes, ugyanazon fenekü és magosságú körhengerek egyenlők, — mert egymás' helyébe tétethetők.

Két egyenes körhengerek hasonlók egymáshoz, ha az őket képző párlagok hasonlók, 's két megfelelő oldalvo-

nalaik körül — mint tengelyeik körül — fordulnak meg, — vagyis *ha tengelyeik fénéksugáraikkal arányosok.*

Az ollyan szögoszlop, mellynek feneke a' körhenger' fenekébe írott rendes sokszög, — határvonalai pedig a' körhenger' tengelyével egyközüek, neveztetik *hengerbe-írott* szögoszlopnak, — 's ehezképest a' *henger, körülírott*-nak.

Az ollyan szabályszerü szögoszlop pedig, mellynek feneke a' henger' feneke körül írott rendes sokszög, 's határvonalai a' tengelylyel egyközüek, neveztetik *henger-körül-írott* szögoszlopnak, — és viszont a' henger *szögoszlopba írott* hengernek. Ezen esetben a' szögoszlop' falai a' hengerre *érintők*-nek mondatnak.

Ha végtelen sokoldalú mind a' *körülírott*, mind a' *beleírott* szögoszlop: akkor azoknak mind felületök, mind tömegtartalmuk egymáshoz végetlen közel jár, — vagyis a' különbség köztök végetlen kicsiny. És mivel a' minő viszonyban nagyobb a' hengernél a' körülírott —, épen ollyanban kisebb annál a' bele írott szögoszlop: ha ezen szögoszlopok közt végetlen kicsiny a' különbség: úgy közülök akármellyik-, és a' henger közt is végetlen kicsiny különbség van. Innen a' henger' felületének és tömegtartalmának kifejezete épen az, a' mi a' szögoszlopé, — csakhogy a' kerités helyett itt körületet, az apothema helyett sugárt veszünk.

177. §.

Az egyenes körhenger' oldalfelülete annyi, mint a' fenék' körkörületének az oldalvonallali sokszorozmánya.

Ugyanis a' végetlen sokoldalú szabályszerü szögoszlop' oldalfelülete = na × h, vagy a' keritést P-nek,

a' magosságot H-nak nevezvén = PH. — Mivel pedig a' kör' körülete ezen P-hez végetlenül közeljár, ha azt is P-nek nevezzük: lesz a' henger' oldalfelülete = PH. És mivel a' körkörület = $2\pi R$ (tudván a' fentebbiekből, hogy $\pi = 3{,}14$ = az átmérőnek a' körülethezi viszonya, — R pedig = sugár), — innen a' henger' oldal-felülete = $2\pi R \times H$.

Továbbá a' henger' égész felületére nézve, még ezen $2\pi R \times H$-hoz hozzá kell adni a' két fenék-kör' udvarát, mellyek közül egyik egyik = $2\pi R \times \frac{1}{2}R = \pi R^2$, — 's a' kettő együtt = $2\pi R^2$. Innen a' *henger' egész felülete* = $2\pi R \times H + 2\pi R^2$, vagy = $2\pi R \times (R + H)$, *kijő, ha a' fenékkörület annak sugarából és a' henger' oldalvonalából eredő összeggel sokszoroztatik.*

Követk. A' hasonló egyenes körhengerek' felületei úgy vannak egymáshoz, mint fenekeik' sugarainak—, vagy pedig mint oldalaiknak négylegei.

178. §.

Az egyenes körhenger' tömegtartalma annyi, mint a' fenék' udvarának a' magossággali sokszorozmánya.

Ugyanis a' végetlen sokoldalú szabályszerű szög-oszlop' tömegtartalma (168. §. köv. 3.). = $\frac{1}{2}PR \times H$. — Mivel pedig az ottani keritéshez = P, a' kör' kerülete, — 's az ottani apothemához = R, a' kör' sugára végetlenül közeljár: ha itt is a' körületet P-nek, a' sugárt R-nek nevezzük: lesz a' henger' tömege = $\frac{1}{2}PR \times H$; vagy mivel $P = 2\pi R$: lesz a' henger' tömege = $2\pi R \times \frac{1}{2}R \times H = \pi R^2 \times H$.

179. §.

id. 152. Azon tömeg ACDB (id. 152), melly hengeridomú területtel, és két nem egyközü fenékudvarakkal AB, CD, záratik be, neveztetik *csonka hengernek*

A' csonka henger' felületének és tömegtartalmának kiszámitására nézve, képzeljünk egy ép hengert AB', mellynek feneke akkora, tengelye pedig OO' kétakkora, mint a' csonkaé, SO. Ezen ép hengerben a' csonka henger kétszer van meg. — Ehhezképest:

1) *A' csonka egyenes körhenger' oldalfelülete annyi, mint tengelyének körfeneke' körületéveli sokszorozmánya.*

2) *Az egyenes csonka körhenger' tömegtartalma annyi, mint tengelyének a' körfenék' udvarávali sokszorozmánya.*

Követk. A' hasonló egyenes csonka körhengerek' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint a' fenéksugaraknak, vagy pedig a' tengelyeknek koczkahatványai.

II. *Az egyenes körkúpról, annak felületéről, és tömegtartalmáról.*

180. §.

id. 153. Ha az egyenes körkúpban (id. 153.) a' tengely' mentiben metszö lap eresztetik, előáll egy egyenszárú háromszöglap SAB, melly a' kúpot szülö SAO háromszögnek kettözete. Az ASB szöglet neveztetik *a' kúp' középponti szögletének*, — $\sphericalangle$ ASO pedig *fél-középponti szögletnek.*

Az AO fenékkel egyközű lap, kör-körülettel metszi a' kúp' felületét. Mert ha az A'O' vonal függőlegesen húzatik a' tengelyre, 's körülfordittatik: leír az a' tengelyre függőleges körlapot, — 's az A'O' látnivaló, hogy súgár, mellynek szélső pontja A' irta az A'B' körületet.

$\triangle$ SAO $\sim$ $\triangle$ SA'O', innen:

AO: A'O' = SO: SO' = SA: SA';

azonban a' körkörületek az ő sugaraikkal, — és a' körudvarok a' sugarak' négylegeivel arányosok levén, illy arányok állanak:

1) *körület* AO: *körület* A'O' = AO: A'O' = SO: SO' = SA: SA'.

2) *körudvar* AO: *körudvar* A'O' = $\overline{AO}^2 : \overline{A'O'}^2$ = $\overline{SO}^2 : \overline{SO'}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2$, azaz: *a' fenékkel egyközű metszékek' sugarai és körületei, arányosok ezen metszékeknek a' kúp' tetejétőli távolságaival; — és ezen metszékek' udvarai arányosok azon távolságok' négylegeivel.*

181. §.

Két egyenes körkúpok egyenlők, ha fenekeik és magosságaik egyenlők, — mert egymás helyébe tétethetnek. Id. 153.

Két egyenes körkúpok hasonlók, ha hasonló egyenes-szögű háromszögek által úgy származnak, hogy azok megfelelő oldalaik körül fordulnak meg; — vagyis, *ha tengelyeik fenék-sugaraikkal arányosok.*

A' fenékkel egyközű metszőlap, kimetsz a' körkúpból egy kisebb SA'B' körkúpot, melly a' nagyobb SAB körkúphoz hasonló.

182. §.

Id. 153 Az egyenes körkúpnak azon darabja AA'B'B, melly az SA'B' kis kúpnak lemetszetése után fenmarad, neveztetik *csonka kúpnak*. — Az alsó fenék', és a' felső metszék' udvarai neveztetnek a' *csonka kúp' fenekeinek;* mikor ezek egyközüek, a' csonka kúp *egyközü fenekünek* neveztetik.

Az *egyközü fenekü egyenes csonka körkúp'* származását úgy lehet képzelni, mintha az AA'O'O oldalmás, a' fenékre függőleges OO' oldala körül, mint tengely körül, megfordulna.

Két egyenes csonka körkúpok „hasonlók" akkor, ha hasonló oldalmások által származnak; — és ezeknél a' fenék-sugarak, a' tengelyek, és a' határvonalak arányosok.

183. §.

Az ollyan csúcsoszlop (pyramis), mellynek csúcsa a' kúp' csúcsával összeesik, feneke pedig a' kúp' fenekébe írott rendes sokszög, neveztetik *kúpba írott csúcsoszlopnak*, — 's viszont a' kúp, *körülírott kúpnak*.

Az ollyan csúcsoszlop pedig, mellynek csúcsa a' kúpéval összeesik, feneke pedig a' kúp' feneke körül írott rendes sokszög, neveztetik *körülírott csúcsoszlopnak*. Ezen esetben a' csúcsoszlop' falai a' kúpra érintőknek mondatnak.

Ha végetlen sokoldalú mind a' beleírott, mind a' körülírott csúcsoszlop: akkor azoknak mind felületük, mind tömegtartalmuk egymáshoz végetlenül közel jár, — vagyis a' különbség köztök végetlen kicsiny. És mi-

vel a' minő viszonyban nagyobb a' kúpnál a' körülírott —, épen ollyanban kisebb a' beleírott csúcsoszlop; ha ezen csúcsoszlopok közt végetlen kicsiny a' különbség: úgy közülök akármellyik-, és a' kúp között is végetlen kicsiny különbség van. Innen a' kúp' felületének, és tömegtartalmának kifejezete épen az, a' mi a' csúcsoszlopé; csakhogy a' kerités helyett itt körületet, — az apothema helyett sugárt veszünk.

184. §.

Az egyenes körkúp' oldalfelülete annyi, mint oldalvonalának fenék-körületéveli sokszorozmányának fele.

Ugyanis a' végetlen sokoldalú szabályszerű csúcsoszlop' oldalfelülete = $\frac{1}{2}$na× h, vagy a' keritést P-nek nevezvén = $\frac{1}{2}$ Ph. Mivel pedig a' kör' körülete ezen P-hez végetlenül közeljár, — ha azt is P-nek a' kúp' oldalvonalát pedig A-nak nevezzük: lesz a' kúp' oldalfelülete = $\frac{1}{2}$ PA. — És mivel a' kör' körülete = $2\pi R$: innen a' kúp' oldalfelülete = $\pi R A$.

Továbbá a' kúp' egész felületére nézve, még azon oldalfelülethez πRA-hoz hozzá kell adni a' fenék' udvarát = πR^2; ésigy lesz a' kúp' egész felülete = $\pi RA + \pi R^2$, vagy = $\pi R(R+A)$. — Azaz *a' kúp' egész felülete kijő, ha a' fenék-kör' körületének fele, a' fenéksugárból 's a' kúp' oldalvonalából eredt összeggel sokszoroztatik.*

Követk. A' hasonló egyenes körkúpok' felületei úgy vannak egymáshoz, mint fenéksugaraiknak, vagy tengelyeiknek, vagy oldalvonalaiknak négylegei.

185. §.

Az egyközü fenekü egyenes csonka körkúp' domboru ol- Id. 134.

dalfelülete annyi, mint az oldalvonalnak a' két fenék-körület' félösszegéveli sokszorozmánya; — vagy pedig, *mint az oldal-vonalnak, a' két fenéktől egyenlő távolságra eső körszelet' körületéveli sokszorozmánya.* — (id. 154.)

1) Az SAB lapon, melly az SO tengely' mentiben húzatik, húzzunk az SB-re függőleges vonalat, 's azon vegyünk fel akkorát, melly az AO sugárral képződő kör' körületével egyenlő legyen = BC; — kössük össze az S és C pontokat = SC; — 's húzzunk a' BC-vel egyközüleg B'E-t. Ekkor B'E = kör-körület A'B'.

Ugyanis $\triangle$ SBC $\sim$ $\triangle$ SB'E; innen:

$$SB : SB' = BC : B'E; \quad . \; . \; . \quad (a)$$

és mivel $\triangle$ SOB $\sim$ $\triangle$ SO'B', lesz:

$$SB : SB' = OB : O'B', \quad . \; . \quad (b)$$

és mivel az (a) és (b) arányokban egyik viszony ugyanaz:

$$BC : B'E = OB : O'B',$$

következőleg:

BC: B'E = *körület* OB: *körület* O'B'.

Úgyde a' szerkesztés szerint

BC = *körület* OB; ésígy B'E = *körület* O'B'.

Ez így levén: az SBC háromszög' udvara, melly $= \frac{1}{2}$ SB $\times$ BC, egyenlő az SAB kúp' oldalfelületével, melly $= \frac{1}{2}$ SB $\times$ *körület* OB. — Hasonlólag az SB'E háromszög' udvara $= \frac{1}{2}$ SB' $\times$ B'E, egyenlő a' kis SA'B' kúp' oldalfelületével, melly $= \frac{1}{2}$ SB' $\times$ *körület* O'B'. Innen látnivaló, hogy az AA'B'B csonka kúp' oldalfelülete, egyenlő a' BB'EC oldalmás' udvarával. — Ugyde ezen oldalmás' udvara $= \frac{1}{2}$ (BC+B'E) $\times$ BB'. — Ésígy a' csonka kúp' felülete $= \frac{1}{2}$ (*körület* OB+*körület* O'B') $\times$ B'B.

2) Az állitmány' másik részének megmutatása végett, legyen B''D egyközü BC-vel, és egyenlő távolságra a' BC-től és B'E-től. — E' szerint B''D = ½ (BC+B'E). Azonban az előbbi megmutatás szerint B''D = *körület* O''B''. Következőleg: *körület* O''B'' = ½ (*körül.* OB+*körül.* O'B'). — Innen végre a' *csonka kúp oldalfelülete* = ½ körület O''B''×BB'.

Követk. A' hasonló egyenes csonka körkúpok úgy vannak egymáshoz, mint megfelelő fenék-sugaraiknak, vagy pedig oldalvonalaiknak négylegei.

186. §.

Az egyenes körkúp' tömegtartalma annyi, mint a' fenékudvarnak a' magossággali sokszorozmányából egy harmadrész.

Ugyanis a' végetlen sok oldalú szabályszerü csúcsoszlop' tömegtartalma (171. §. szerint) = ⅓ (P/2 × R × H). Mivel pedig az ottani keritéshez = P-hez, a' kör' körülete—, 's az ottani apothemához = Rhez, a' kör' sugara végetlenül közel jár: ha itt is a' körületet P-nek, 's a' sugárt R-nek nevezzük: lesz a' kúp' tömege = ⅓ (P/2 × R × H). Vagy mivel P = 2πR, tehát: P/2 = πR: lesz a' kúp' tömege = ⅓πR² × H; melly képletben πR² a' fenékudvart, H pedig a' kúp' magosságát jelenti.

Követk. A' hasonló egyenes körkúpok' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint fenéksugaraiknak, vagy tengelyeiknek, vagy oldalvonalaiknak koczkahatványai.

187. §.

Az egyközü-fenekü egyenes csonka körkúpnak tömegtartalmát megtalálni. (id. 154.) Id. 1.1

Kiadatván a' csonka kúp' fenekeinek sugarai, és magossága OO′: legelőbb is ki kell keresni az egészre kipótolt kúp' magosságát = SO, épen olly módon, mint ez a' csonka szögoszlopra nézve a' 152. §-ban előadatott. Miután ez kiszámíttatott: ki kell vonni belőle az OO′-t, t. i. a' csonka kúp' magosságát, — 's az ott maradt SO′ lesz a' felül eső kis kúp' magossága — Már adatvák levén mind a' kipótolt nagy-, mind a' kis kúpnak fenekei és magosságai: mindkettőnek tömegtartalma számíttassék ki; — a' nagyéból a' kisebbé vonassék ki, — 's a' mi ott marad, az a' csonka kúp' tömegtartalma.

Legyenek a' nagy és kis kúpnak magosságai: *h* és *h′*, fenéksugarai: *r* és *r′*: a' csonka kúp' tömegét kifejező képlet ez lesz:

$$= {}^1/_3\pi\, r^2 \times h - {}^1/_3\pi r'^2 \times h'$$

vagy $= {}^1/_3\pi\,(r^2 \times h - r'^2 \times h')$.

Következ. A' hasonló egyenes csonka körkúpok' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint megfelelő fenéksugaraiknak, — vagy *határvonalaiknak*, — vagy *tengelyeiknek koczkahatványai.*

III. *A' Gömbről* (sphaera), *annak felületéről, és tömegtartalmáról.*

188. §.

M. 155. A' gömb' származását, mint fentebb mondatott, úgy képzelhetni, mintha egy félkör ACB (id. 155.) a' maga átmérője körül egészen megfordulván, mindenütt nyomokat hagyna maga után. Ezen fordultában az ACB félkörnek minden pontja, p. E, körkörületet ír le, mellynek sugara EP, a' gömböt képző ACB félkör' átmérő-

jére, melly a' gömb' *tengelyé*nek neveztetik, függöleges. Innen látnivaló, hogy minden illy körnek minden pontjai, vagyis a' gömb' felületének minden pontjai, a' gömb' középpontjától O-tól, egyenlő távolságra esnek. — A' tengely' két végpontjai, A és B, *sarkok*nak vagy *gönczöl*-öknek (polus) neveztetnek. — Az OC, OE, 'sat. vonalak a' gömb' *sugarai*. — A' gömb' középpontján keresztül menő, és a' gömb' felületének átellenes pontjain végződő egyenes vonalak pedig, a' gömb' *átmérői*. — *Minden átmérők egyenlők, és a' sugaraknak kettőzetei.*

Nyilván van, hogy *két gömbök egyenlők, ha sugaraik egyenlők, és két gömbök összeesnek, ha középpontjok és sugaruk ugyanaz.*

189. §.

Minden síklap általi metszék a' gömb' tömegéből, kör. id. 155.

Ugyanis: legyen a' metszék' síklapja EGFH (id. 155.); húzzunk a' gömb' O középpontjából ezen síklapra függöleges vonalat OP, — és a' gömb' felületéni metszék' különböző pontjaira a' sugarakat OE, OG, OF, OH 'sat. — és még PE, PG, PF, PH 'sat. egyenes vonalakat. Mivel az OE, OG, OF 'sat. vonalak, mint ugyanazon gömb' sugarai, egyenlők: tehát a' PE, PG, PF 'sat. vonalak is egymással egyenlők (l. 119. §. *viszontag*). Tehát az EGFH metszék' határvonalának minden pontjai E, G, F, H, 'sat. egyenlő távolságra esnek a' P ponttól; — tehát azon metszéket határozó vonal, körkörület, mellynek középpontja P, sugara = PH.

Midőn a' gömböt metszö síklap a' gömb' középpontján megy keresztül, minő p. CIDK, és AIBK:

akkor a' gömbnek, és ezen metszék-körnek ugyanazon középpontjok és sugaruk van, — 's az illy kör a' gömbön képezhető minden körök közt legnagyobb. Innen *legnagyobb*-, vagy csak *nagy körök*nek neveztetnek a' gömbnek azon metszékei, mellyek annak középpontján mennek keresztül. Ellenben *kis körök*nek neveztetnek a' gömbnek azon metszékei, mellyek annak nem középpontján mennek keresztül. — *Ugyanazon gömbnek, vagy az egyenlő gömböknek minden nagy körei egymással egyenlők.*

190. §.

Id. 155. *Ugyanazon gömbön, vagy az egyenlő gömbökön képezhető kis körök, annál kisebbek, minél távolabb esnek a' gömb' középpontjától.*

Ugyanis (id. 155.) vegyük fel az EGFH kiskört, mellynek sugara = PE. Húzzuk ki a' gömb' sugarát OE, és a' kiskör' síkjának a' gömb' középpontjától távolságát mutató OP vonalat. — Az OEP egyenesszögü háromszögben illy egyenlet áll:

$\overline{PE}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OP}^2$; innen: $PE = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OP}^2}$.

Ezen egyenlet mutatja, hogy minél nagyobb az OP, vagyis a' gömb' középpontjától távolság: annál kisebb a' PE, vagyis a' kiskör' sugara, — ésígy maga is a' kiskör.

Követk. Ugyanazon —, vagy egyenlő gömbökön, a' középponttól egyenlő távolságra eső kiskörök egyenlők.

Követk. Ha OP = OE = OA: úgy a' PE sugár semmivé válik, — és a' kis-kör egy ponttá lesz. Ha pedig OP = *semmi*: akkor PE = OE, — azaz itt a' kiskör nagykörré válik. Innen a' kiskörök, a' pont és a' nagykör között minden lehető nagyságot felvehetnek.

191. §.

Két nagy körök eyymást kölcsönösen két egyenlő részre osztják.

Ugyanis ezen két nagykör-szeleteknek közös metszö vonaluk, olly egyenes vonal, melly azoknak közös középpontjokon megy keresztül; ésígy ezen vonal mind-kettőjöknek átmérőjök, — ésígy azokat két egyenlő részre osztja.

192. §.

Minden nagy kör CIDK (id. 155.) elosztja a' gömb- Id. 155.
böt, és annak felületét két egyenlő részekre.

Ugyanis, ha ezen két részek közül egyiket a' másiknak helyébe-, vagy egyiket a' másikra tesszük, úgy hogy előbb a' fenekeik essenek össze : az egyik' domdorú felületének minden pontja, összeesik a' másik' domború felületének minden megfelelő pontjával, — tehát mind-kettőnek minden megfelelő pontjai egyenlő távolságra esnek a' közös középponttól és fenéktől; — ésígy ezen két felek egyenlők.

A' gömbnek azon két egyenlő részei, mellyekre az a' nagy kör által osztatik, neveztetnek *félgömbök*nek (hemisphaeria).

193. §.

A' gömb' felületén két ollyán pontok, mellyek nem ugyanazon átmérőnek két végpontjai, egy nagy kör' fekvését meghatározzák.

Ugyanis a' gömb' felületén adott két pontokhoz hozzá vévén a' gömb' középpontját : ezen három pontokon egyetlenegy síklapnál többet húzni nem lehet

(l. 116. §.); és mivel azon síklap a' középponton megy keresztül, látnivaló, hogy az nagykör.

De ha az adott két pontok ugyanazon átmérő' végpontjai volnának: ezek a' gömb' középpontjával egyenes vonalban esnének, — ésígy ezen két pontokon keresztül végetlen sok nagy kört lehetne húzni.

194. §.

Négy, nem ugyanazon síkon fekvő pontok a' gömb' meghatározására elegendők.

Ugyanis: ha ezen pontok közül háromon keresztül körkörületet húzunk: ez még tartozhatnék végellen sok különböző gömbökhöz, mellyeknek középpontjaik mind azon függönyre esnének, melly ezen körület által zárt udvarnak középpontján megy keresztül. Azonban mindezen gömbök közt csak egy van, mellynek felületére eshetik a' negyedik adott pont is; mivel az említett függönynek csak egy pontja van, melly a' negyedik ponton is keresztül húzható kör-körület' minden pontjaitól egyenlő távolságra esik.

195. §.

Ld. 155. *A' gömbön írható tármelly körnek, EGFH, középpontján keresztül menő függöny AB, a' gömb' középpontján is keresztül megy — és annak felületén két pontot A és B jelöl ki, mellyek az EGFH kör' körületének minden pontjaitól, illetőleg, egyenlő távolságra esnek.*

Elsőben is: a' 119. §-beni állitmány szerint nyilván van, hogy az AB függöny keresztül megy mindazon pontokon, mellyek az EGFH körület pontjaitól egyenlő távolságra esnek; — úgyde a' gömb' középpontja O

épen illy tulajdonnal bir, — ésígy az AB azon is keresztül megy.

Másodszor: mivel a' gömb' felületén eső A és B pontok is az említett AB függönyhöz tartoznak: ha ezek közül akármellyikből az EGFH körület' különböző pontjaira dült vonalak húzatnak—az A-ból menök egymással, — és a' B-ből menök egymással mind egyenlök lesznek (119. §.) — Ésígy az A és B pontok, az EGFH körület' minden pontjaitól, illetőleg, egyenlö távolságra esnek.

Követk. 1) Ezen 5 feltételek tehát, t. i. az említett 4 pontokon (O, P, A, B) keresztülmenés, — és az EGFH kör-re függöleges állás, mindig együtt járnak. Azonban mivel egy vonal' meghatározására két feltétel elég: ha ezen 5 feltételek közül kettőt jelenlenni tudunk; a' többinek jelenléte önként következik. — Ehhezképest:

1) *Azon egyenes vonal, melly a' gömbnek középpontján keresztül, valamelly a' gömbön írható kör' síkjára függőlegesen megy, — bizonyosan ezen körnek is középpontján megy keresztül,— és kijelöl a' gömb' felületén két pontot, mellyek közül mindenik, az említett kör' minden pontjaitól illetőleg egyenlő távolságra van.*

2) *Azon egyenes vonal, melly a' gömbnek, és valamelly azon írható körnek középpontjait összeköti, — ezen kör' síkjára bizonyosan függőleges, és a' gömb' felületén két pontot jelöl ki, mellyek az említett körület' minden pontjaitól, illetőleg, egyenlő távolságra esnek.*

3) *Azon egyenes vonal, melly a' gömb' székpontját, annak felületén egy ollyan ponttal köti össze, melly a' gömbön írható valamelly kör' körületének minden pontjaitól egyenlő távolságra esik,— bizonyosan ezen körnek középpontján megy keresztül, és ennek síkjára függőleges, — azonban kijelöl a' gömb' felületén egy másik*

átellenes pontot is, melly az említett körület' minden pontjaitól egyenlő távolságra van.

Követk. 2) *Valamelly nagy körnek, az EGFH körület' különböző pontjaitól, az A és B pontokra menő körívei, illetőleg, egymással mind egyenlők,* — mert azoknak húrjai, — mint az imént látánk, egymással mind egyenlők. Így AE = AG = AF = AH 'sat., — hasonlólag BE = BG, = BF = BH 'sat.

Továbbá *ezen körívek' síkjai az EGFH körületre mind függőlegesek*, mert mind az AB vonalon mennek keresztül, melly pedig ama körület által határozott körudvarra — mint az imént látánk — függőleges.

Követk. 3) *Valamelly nagy körnek, az EGFH körület' különböző pontjaiból az A és B pontok közül valamellyikre menő körívei annál nagyobbak, minél távolabb esik ezen körület az A vagy B ponttól.*

Ha az EGFH helyett nagy kör' körületét veszünk, p. CIDK, — ennek különböző pontjaitól az A és B pontokra menő körívei egy másik nagy körnek egyenlők, még pedig körnegyedek, vagy 90 foknyiak lesznek. — Így AC = AI = 'sat. = 90°. Így BC = BI = 'sat. = 90°.

Követk. 4) *Két egyközü körületek EGFH és CIDK között eső, és azoknak síkjaira függőleges körívei valamelly nagy körnek, egymással egyenlők.* Így CE = IG = DF = KH 'sat.

Követk. 5) Az A és B pontok' előadott tulajdonánál fogva, könnyü a' gömb' felületén körkörületet írni a' nélkül, hogy szükség volna tudni, hova esik annak középpontja az AB vonalon a' gömb' tömegében. Így péld. az EGFH körület' irása végett, elég kijegyezni a' gömb' felületén azon pontokat, mellyek az A vagy

B ponttól épen ollyan távolságra esnek, mint azon felvett pont, mellyen keresztül a' körület leírandó, — mérvén azon távolságokat az A és B pontokon keresztül menő nagy körök' körívein, AE, AG, 'sat. vagy BE, BG 'sat. — Vagy pedig az AG kőrív az A pontnál, vagy a' BG kőrív a' B pontnál körülfordíttatván, G végpontjával a' kivánt kis kör' körületét leírja. Ha pedig nagy kört akarunk írni a' gömb' felületén, — egy körnegyed teszi ezen fordúlatot. —

Követk. 6) Az előadott tulajdonok' következtében, az A és B pontok, az EGFH kör' *sarkainak* (poli), az AB vonal pedig ugyanazon kör' *tengelyének* (axis) neveztetik. — Ugyanazon A és B pontok, és ugyanazon AB vonal, sarkai és tengelye a' CIDK nagy körnek is, melly az EGFH-val egyközü. — Általában a' *gömbön irható bármelly körnek, vagy körívnek tengelye, a' gömbnek azon átmérője, melly ama körre vagy körívre függőleges, ésígy annak középpontján is megy keresztül;* és ama körnek, vagy körívnek *sarkai, az említett átmérőnek két végpontjai*, mellyek tehát egyszersmind a' gömb' felületéhez tartoznak.

196. §.

Az előbbi §-ban mondottakat röviden összefoglalván : *A' gömbön*

1) *Minden egyközü köröknek ugyanazon tengelyök és sarkaik vannak.*

2) *Akármelly körületnek a' gömb' felületén, minden pontjai, az illető sarkoktól egyenlő távolságra esnek.*

3) *Valamelly nagy körnek azon körívei, mellyek egy valamelly körületnek különböző pontjaitól, annak sarkai körül egyikre mennek, egyenlők; és ezen körívek' sikjai, ama körület' sikjára függőlegesek.* — Innen:

4) *Valamelly nagy körnek azon köríve, melly egy másik kör' vagy körív' valamelly pontjára függőlegesen áll: ezen utóbbinak sarkain megy szükségképen keresztül.* — És viszont

5) *Valamelly nagy kör köríve, melly valamelly más körnek sarkaiból jő, vagy azokon megy keresztül, ezen utóbbi kör' síkjára függőleges.*

6) *A' kis körök az ő sarkaiktól különböző távolságokon esnek;—de a' nagy körök az ő sarkaiktól egyenlő távolságra vannak, — melly távolság, a' keresztülvágó függőleges nagy kör' fokain méretve, mindig* $= 90^0$.

7) *A' gömbön irható bármelly kör' körülete meg van határozva, ha azon körületnek egy pontja, és egyik sark a kiadatnak.*

8) Mivel valamelly kör' sarka ott van, a' hol az azon kör' körületének különböző pontjaira függőlegesen menő nagy körívek egymást keresztül vágják: látnivaló, hogy *valamelly kör' sarkainak meghatározására két illyen egymást keresztül vágó körívek is elegendők.*

197. §.

id. 155. *Határozatok és jellemzések.*

1) Ha a' gömb valamelly síklappal keresztül metszetik, előáll a' gömbnek két darabja, — 's egy illyen darabnak *felülete* neveztetik *gömbfedő*-nek, vagy *sipká*-nak (calotte). — Az AEGFH, és BEGFH gömbfedők' (id. 155) *feneke* közös, t. i. az EGFH kör' síkja; illető *magosságaik*, az AP és BP, t. i a' közös fenék' tengelyének azon részei, mellyek a' fenék- és illető tetőpontjaik, A és B közt esnek. — Nyilván van, hogy *ugyanazon gömbnek két fedői egyenlők, ha fenekeik és magosságaik egyenlők.*

Gömbszelet-nek vagy *pillé*-nek (segmentum sphaericum) pedig neveztetik a' gömbnek azon tömeg-része, melly a' fedö- és annak feneke által záratik be. — A' gömbszelet' *tengelye*, *tetöpontja*, *magossága*, *feneke*, ugyanazok, mellyek az azt boritó fedöjéi.

2) *Gömb-öv*-nek (zona sphaerica) neveztetik a' gömb' *felületének* azon része, melly a' gömböt metszö két egyközü síklapok közt esik. Ezen síklapok a' gömböv' *fenekei*';—*magossága* pedig, ezeknek egymástóli távolságuk; — végre ezeknek közös tengelyük a' gömbövnek is tengelye. — A' gömbövet igy is meghatározhatni, hogy az *két, egyközü fenekü gömbfedök közötti különbség.*

Gömb-metszék-nek vagy *kariká*-nak pedig neveztetik a gömbnek azon tömeg-része, melly a' gömböv, mint boriték alatt van, — vagyis melly két egyközü síklapok által záratik be, — vagy még: két egyközü fenekü gömbszeletek közötti különbség. Ennek fenekei, tengelye, magossága ugyanazok, mellyek az illetö gömbövéi.

3) *Gömb-gerézd*-nek (sector sphaericus) neveztetik a' gömbnek azon tömeg-része, melly egy gömbfedö EAF-, és egy kúp-felület OEF által záratik be, melly kúpnak tetöpontja a' gömb' középpontjában O esik, — feneke pedig ugyanaz, melly a' gömbfedöé. Látnivaló tehát, hogy a' gömbgerézd áll egy pilléből EAF, és egy kúpból OEF. — Azonban azon esetben, ha a' pille vagy gömbszelet nagyobb félgömbnél, a' gömbgerézd annyi, mint a' gömbszelet- és a' megfelelö kúp közötti különbség. Igy az OECBDFO gömbgerézd = gömbszelet ECBDFPE, kivonván belöle az OEF kúpot. — Végre a' gömbgerézd gömbszeletté válik, ha a' gömbfedö'

feneke nagy kör. — A' gömbgerézd' *feneke* a' megfelelő gömbfedő.

4) *Gömbék*-nek neveztetik a' gömbnek azon tömegrésze, melly egy közös átmérőben összejövő két félkörudvarok-, 's a' gömbfelületnek ezek közt eső része által záratik be. — A' gömb' felületének azon része, melly a' gömbéket takarja, *ékfelület*-nek, vagy *vetélő*-nek (fusus, fuseau) neveztetik. — A' két félkör-udvarok, a' gömbék' *falai;* azoknak közös átmérőjök pedig a' gömbék' *határe nala.* — A' gömbék' két falai egy *lap-szögletet* képeznek, mellynek mértéke, a' gömbék' határvonalának egyik végpontjából, mint sarokból írható nagykörnek, a' gömbék' két falai közt eső köríve. — Két, egymást ugyanazon átmérő' mentiben metsző nagykörök, felosztják a' gömböt négy gömbékre, — mellyek közül az általellenes párok egyenlők.

Az adott határozatokhoz képest nyilván van, hogy:

1) A' *gömbfedő*' EAF származását úgy képzelhetni, mintha egy körív EA, az AB átmérő körül, az A végpontnál megnyomatván, megfordulna.

2) A' *gömbszelet*' vagy *pille*' AEGFH származását is úgy képzelhetni, mintha az PEA fél körszelet, az AP tengely körül megfordulna.

3) A' *gömbgerézd*' OEAF származását úgy képzelhetni, mintha az OEA körgerézd, az OA oldala körül megfordulna.

4) Két különböző gömbön, két *gömbfedők hasonlók*, ha hasonló körívek' körülfordulása által származnak. Ekkor ezeknek magosságaik, – fenéksugaraik, a' gömbök' sugarai, — és a' szülő körívek egymás közt mind arányosok.

5) Két *gömbövek* hasonlók, ha hasonló gömbfedők'

különbségei. Ekkor ezeknek megfelelő vonalaik arányosok. — Így két *karikák* is hasonlók, ha hasonló gömbövek által kerítteinek.

6) Két *pillék*, és két *gömbgerézdek* hasonlók, ha hasonló gömbfedőknek felelnek meg.

7) Két *gömbékek* és *vetélők* egyenlők, ha lapszögleteik egyenlők. — Két különböző gömbökön pedig, két *gömbékek* és *vetélők* hasonlók, ha illető lapszögleteik egyenlők.

198 §

A' gömbsugár' végpontjára függőleges síklap, a' gömbre érintő, — és viszontag.

Ugyanis: ezen síklapnak minden pontja, kivévén a' sugár' végpontjával összeesö pontját, a' gömbön kivül esik; mert annak a' gömb' középpontjától távolságát dült vonal mutatja. Tehát csupán a' sugár' végpontja az, melly a' síklapnak, és a' gömb felületének közös pontjok. Ésígy ezen síklap a' gömbre érintő.

Viszontag: *azon sugár, melly a' síklap' és a' gömb' közös érintés-pontjára húzatik, az érintő lapra függőleges;* mert ezen sugár, a' gömb- és a' síklap közötti legrövidebb távolságnak mértéke, — és ezen feltétel a' függőlegességet szükségkép' magában foglalja.

Követk. 1) Az érintés' pontjára húzható függöny, a' gömb' középpontján megy keresztül.

Követk. 2) Ugyanazon átmérő' két végpontjain álló érintő síklapok egyközűek.

199 §.

Három ollyan kör' körívei, mellyek közül kettő kettő a' gömbön egymást metszi, bezárnak a' gömb' fe- l. 156.

lületéből egy részt ABC (id. 156.), melly *gömb-háromszögnek* (triangulum sphaericum) neveztetik. Azonban rendesen csak a' nagy körök' körívei által képzett gömbháromszögeket szokták figyelemre venni, — megjegyezvén, hogy azon körívek félkörnél mindig kisebbek legyenek. Ezen körívek a' háromszög' *oldalai*, — ezeknek végpontjai a' háromszög' *csúcsai*, és ezen körívek' síkjai által képzett lapszögletek a' háromszög' *szögletei*.

Tegyük fel, hogy az O legyen középpontja azon gömbnek, mellyen 3 nagykörök' körívei AB, AC, BC húzatnak; — húzzunk a' háromszög' minden csúcsába sugarakat OA, OB, OC: előáll a' gömb' középpontjánál egy *háromlapú testszöglet*, mellyet képző vonalszögleteknek mértékei, illetőleg, a' gömbháromszög' oldalai; és a' mellynek lapszögletei épen azok, mellyek a' gömbháromszög' szögletei. Innen nyilván van, hogy a' *háromlapú testszöglet* —, és az ennek szárai közt a' gömb' felületén eső gömbháromszög közt szoros összeköttetés van, és a' háro lapszög' törvényeiből a' gömbháromszög' törvényeit lehozhatni.

200. §.

Id. 155. *Az EAG szöglet (id. 155), mellyet két nagy kör' körívei, AE, AG képeznek, egyenlő a' COI vonalszöglettel, melly azon két körívek' síklapjai által képzett lapszögletnek mértéke; — ugyanazon EAG szögletnek mértéke még azon nagy körnek CI köríve is, melly az A-ból, mint sarokpontból, az AE és AG — ha szükség, tovább is nyujtott — körívek közé húzatik.*

Húzzuk ki az OC, OI sugarakat, egyiket az AE— másikát az AG köriv' síklapján, — de mindeniket az

AO metszék- vagy határvonalra függőlegesen. A' COI vonalszöglet egyenlő a' CAOI lapszöglettel (l. 129 §.), melly a' kérdéses körívek' síklapjai által képeztetvén, az EAG szöglettel, — mellyet az AG és AE körívek képeznek, ugyanaz.

Továbbá a' COI szögletnek mértéke a' CI körív, mellynek sarokpontja az A; ésígy a' CI körív, mértéke az EAG gömbszögletnek.

Követk. 1) A' gömbháromszög' minden szögletének mértéke, az illető szöglet' hegyiből, mint sarokpontból leirható nagy körnek, a' szöglet' ha szükséges, megnyujtott — szárai közt eső köríve.

Követ. 2.) A' gömbháromszög' szögleteit tehát, ezen említett mértékeiknél fogva lehet egymással összehasonlítni.

201. §

Minden gömbháromszögben, bármellyik két oldalok' összege nagyobb, mint a' harmadik oldal.

Ugyanis: tudjuk (133. §.), hogy a' háromlapú testszöglet' két lapszögleteinek összege nagyobb, mint a' harmadik; — következőleg az azon két lapszögleteket mérő két körívek', (t. i. a' gömbháromszög' két oldalainak) összege is nagyobb, mint a' harmadik lapszögletet mérő körív, t. i. a' gömbháromszög' harmadik oldala.

Követ. A' gömbháromszög' egy oldala nagyobb, mint a' másik kettő közti különbség.

202. §.

Minden gömbháromszögben, a' három oldal' összege kisebb, mint egy nagy kör' körülete.

Ugyanis: tudjuk (137. §.), hogy minden domború soklapú testszöglet' vonalszögleteinek összege, kevesebb négy egyenes szögnél. Ésígy azon nagy körböli körívek' összege, mellyek ezen vonalszögleteknek mértékei, kisebb mint a' nagy kör' egész körülete, melly 4 egyenes szöglet' mértéke. Ezen tétel bármelly soklapú testszögletet illetvén: illeti a 'háromlapút is Pedig a' gömbháromszög' oldalai háromlapú testszöglet' vonalszögleteit mérik Ésígy 'sat.

203. §.

Id. 157. *A' gömb' felületén eső két pontok A és B között, legrövidebb út, az ezen pontokon keresztül menő nagy körnek, ezek közt eső kisebbik köríve AB.* (id. 157.)

Ugyanis: bármelly más útat az AB-n kivül vegyünk fel az A és B között: meglátjuk, hogy az az AB-nél hosszabb lesz. Példaúl tegyük fel egy pillanatra, hogy az A-tól a' B-ig az AECDB görbe út volna legrövidebb út. Vegyünk fel ezen görbe vonalon egy pontot C, és húzzuk arra az AC és BC nagy kör' köríveit: itt az ABC gömbháromszögben: (201. §.)

$$AC + CB > AB.$$

Felvévén az A és C között egy pontot E, 's húzván az AE és EC nagy kör' köríveit: ismét

$$AE + EC > AC;$$

következőleg:

$$AE + EC + CB > AB.$$

Így folytatván ezt, látnivaló, hogy minél inkább közeledünk a' felvett AECDB görbe vonalhoz, annál hosszabbá lesz az A-tól B-ig vezető út. Ésígy azon pontok közt az AB körív legrövidebb út.

204. §.

Adatván ABC gömbháromszög (id. 158.), ha annak id. 158
minden szögleteiből, A, B, C, mint sarokpontokból, az EF, FD, ED körívek húzatnak, képeztetik ezek által ismét egy gömbháromszög EDF, mellynek szögletei, D, E, F, viszontag az előbbi ABC háromszög' oldalainak illetőleg sarokpontjai.

Ugyanis: mivel az A pont, sarka az EF körívnek: tehát az E pont az A ponttól 90 foknyira van; — hasonlólag, mivel a' C pont, sarka a' ED körívnek: tehát az E pont a' C ponttól is 90 foknyira van. Innen ha az E pont mind az A, mind a' C pontoktól 90 foknyira van: látnivaló, hogy az AC körívnek sarokpontja az E. — Épen így mutathatni meg, hogy az F és D pontok, az AB és BC köríveknek sarokpontjai.

205. §.

Az ABC és DEF (id. 158.) gömbháromszögek' bár- id. 158.
melly szögletének mértéke annyi, mint ha félkörületből, a' másik háromszögnek, a' kérdéses szöglettel általellenes oldala kivonatik.

Ugyanis: a' kisebbik háromszög' oldalait nyujtsuk meg, mig a' nagyobbikéival össze nem érnek, p. o. az AB-t a' G-ig, az AC-t a' H-ig. Mivel az E pont, az ACH-nak sarokpontja: az EH körív $= 90^0$; — és mivel az F az ABG-nek sarokpontja: az FG körív is $= 90^0$; — ésígy $EH + FG = 180^0$.

Úgyde:

$$EH + FG = EH + HF + GH = EF + GH$$

Innen: $EF + GH = 180^0$.

És: $GH = 180 - EF$

azaz: a' GH körív, vagyis *az A szöglet' mértéke annyi, mint ha félkörületből kivonatik az A szöglettel ja' másik háromszögben áttalellenes EF oldal.* Így mutathatni meg azt is, hogy a' B szöglet' mértéke = 180 — DF, és a' C-jé = 180 — ED.

Viszontag: a' DEF gömbháromszög' szögleteinek mértékei is épen így vannak. P. o. a' D szöglet' mértéke az MK körív: úgyde, az előbbi megmutatás szerint:

$$MK + BC = MC + BK = 180^0,$$

ésígy: MK = 180 — BC.

így a' többi, E és F, szögletek is.

Az ABC és DEF gömbháromszögek' részei tehát, egyik a' másikban általellenesnek, kölcsönösen kiegészitői 180 fokra. A' honnan az illyen gömbháromszögek egymáshoz képest neveztetnek *gönczölös* (polaris), vagy *egészitő* (supplementaris) háromszögeknek.

206. §.

Id. 158. *Bármelly gömb háromszög' három szögleteinek összege mindig kevesebb, mint hat–, de mindig több mint két egyenes–szög.*

Mert az A, B, C három szögletek' mérő kövíveinek összege, a' DEF háromszög' három oldalaival együttvéve, annyi mint három félkörület, vagy háromszor két = 6 egyenes szöglet. Innen 1) *az A, B, C három szögletek' összege kevesebb, mint hat egyenesszög.* — 2) Mivel a' DEF háromszög' három oldalainak összege (202. §.) kevesebb, mint négy egyenes-szög; — azt pedig az A, B, C szögletek összege 6 egyenesszögre pótolja ki: látnivaló, hogy ezen A, B, C szögletek' összege több, mint két egyenes-szög.

Nyilván van tehát, hogy a' gömbháromszög' szögleteinek összege nem olly határozott, mint a' síkháromszögekéi; — változik az mindig a' két- és hat egyenes-szög közt, a' nélkül, hogy e' két határt valaha elérné; — következőleg a' gömbháromszögnél, ha két szögletet ismerünk, még azért a' harmadikat nem szükségkép' ismerjük.

207. §.

A' gömbháromszögben lehet egy- vagy két- vagy három egyenes szöglet, 's ehhez képest nèveztetik *egy-, két-, három-egyenes-szögűnek.*

Ha az ABC háromszög (id. 159.) *kétegyenes-szögű,* Id. 159.
t. i. ha két szöglete, B és C egyenes: úgy a' BC körív' sarokpontja az A-ban van; ésígy AB = AC = 90°. — Ha pedig még a' harmadik A szöglet is egyenes: úgy a' háromszög *háromegyenes-szögű*, 's három oldalai közül mindenik = 90°.

E' szerint a' gömb' felületén *háromegyenes-szögű* gömbháromszög 8 képződhetik, mint id. 160. mutatja, Id. 160.
— mellyen a' CE körív is = 90°. Innen ha az illyen háromszög-terület *egy*-nek vétetik: lesz a' gömb' felülete = 8.

208. §.

Ugyanazon, vagy két egyenlő gömbön irható gömbháromszögek egyenlők, ha: 1) *három oldala egyiknek három megfelelő oldalával a' másiknak egyenlő;* 2) *két oldala, 's az ezek közt eső szöglete egyiknek két oldalával 's az azok közt eső szögletével a' másiknak egyenlő;* — 3) *egy oldala, 's a' mellett eső két szöglete egyiknek, egy oldalával, 's a' mellett eső két szögletével a' másiknak egyenlő.* — Ezen 3 tételeket

be lehet bizonyítni akár azon módon, mint a' síkháromszögeknél, — akár a' háromlapú testszögletek' törvényeiből indulván ki. — De van még a' gömbháromszögekre nézve negyedik feltétele is az egyenlőségnek, mellynek a' síkháromszögeknél nincs helye. T. i.

Ugyanazon, vagy egyenlő gömbökön írható gömbháromszögek egyenlők, ha minden megfelelő szögleteik egyenlők.

Ugyanis: legyenek ABC, A'B'C' gömbháromszögek (id. 158), — és mindeniknek egészitő háromszögei DEF, D'E'F'. — Már feltévén, hogy az A, B, C szögletek az A', B', C' szögletekkel megfelelőleg egyenlők: tehát amazoknak egészitői is, EF, DF, DE, emezeknek egészitőivel E'F', D'F', D'E'-vel egyenlők. Tehát a' DEF és D'E'F' háromszögek egyenlők, mivel három oldala egyiknek, három oldalával a' másiknak egyenlő. Esígy a' D,E,F, és D', E', F' szögletek megfelelőleg egyenlők. Innen ezen egyenlő szögletek' egészitői is egyenlők, t. i. a' D-nek egészitője BC, a' D'-nek a' B'C': esígy BC=B'C'; — az E-nek egészitője az AC, az E'-nek az A'C': esígy AC=A'C'; — az F-nek egészitője az AB, az F'-nek az A'B': esígy AB=A'B'. — Tehát 'sat.

209. §.

A' gömbháromszögek vagy *egyenoldalúak*, vagy *egyenszárúak*, vagy *különoldalúak*.

Id. 158. *Az egyenszárú gömbháromszögben az egyenlő oldalokkal általellenes szögletek, — és viszontag — egyenlők.* (id. 158.)

Ugyanis: 1) legyen ABC egyenszárú gömbháromszög, esígy AB=AC, eresszünk le az A tetőből a'

BC oldal' közepére egy nagy körböli körívet AR: az ABR és ACR háromszögek egyenlők lesznek, mert három oldala egyiknek, három oldalával a' másiknak, megfelelőleg, egyenlők, — ésígy szöglet B = C.

2) Ha B = C: úgy az AC oldal az AB oldallal egyenlő. — Mert vegyük hozzá a' DEF egészítő háromszöget; mivel a' B és C szögletek egyenlők, azoknak egészítői DE, és DF is egyenlők; ésígy a' DEF háromszög egyenszárú; — ésígy szöglet E = F; innen ezen szögleteknek egészítői is egyenlők, t. i. AC = AB.

Követk. Mivel △ABR = △ACR: tehát szögl. BAR = CAR, és ARB = ARC. Innen látnivaló, hogy *az egyenszárú gömbháromszögben, a' tetőből a' talp' közepére eresztett körív, ezen talpra függönyös, és a' tetőszögletet két egyenlő részre osztja.*

210. §.

Bármelly gömbháromszögben ABC (id. 161.) *a' nagyobb oldal, nagyobb szögletnek van általellenében, — és viszontag.* Id. 161.

Ugyanis: legyen szöglet B > A; húzzunk a' háromszögben egy nagy kör' körívét BD, melly az ABD szögletet az A-val egyenlővé tegye; ekkor BD = AD. Úgyde BD + DC > BC, — ésígy AD + DC is, vagy AC > BC, azaz a' B szöglettel általellenes oldal, nagyobb mint az A szöglettel általellenes. — Hogy ez viszontag is áll: bebizonyíthatni olly móddal, mint ugyanazon tétel a' síkháromszögeknél bebizonyíttatott.

211. §.

Két gömbháromszögek *hasonlók*, ha megfelelő oldalaik egymásközt és sugaraikkal arányosok; — vagy

más szókkal, ha két különböző gömbökön, egyenlő háromlapú testszögleteknek felelnek meg.

212. §.

Id. 162. *Ha egy félkörnek* acdefb (id. 162.) *mind körüle, mind bele ugyanannyi oldalú két rendes sokszögek' darabjait, ACDE* és acde *irjuk; és ezen egész idomot az ő tengelye AB körül megforditjuk, mind a' két rendes sokszögből darab' oldalainak megfordulása által származott udvar-terület kijő, ha az illető rendes sokszögbe bele irható kör körülete sokszoroztatik az illető sokszög-darabnak a' tengelyen felvett magosságával;* azaz: acde *sokszög-darab' körülfordulása által származott udvarterület* $= om \times aV$; — *és az ACDE sokszög-darab' körülfordulása által származott udvarterület* $= OM \times AS$

Vegyük fel elsőben a' beleírott rendes sokszög-darab' körülfordulása által származott udvar-területet.

Az *ac, cd, de* 'sat. oldalok' közepeiről, *m, l, n* 'sat. pontokról, 's ugyanazoknak végeiről húzzuk a' tengelyre függőlegesen az *mp*, cI, lR, dK 'sat. vonalakat. Húzzuk a' kör' középpontjából is az *Om, Oc, Ol, Od* 'sat. vonalakat; — nevezzük el *ac udvarnak, cd udvarnak, de udvarnak* 'sat. azon darab udvarterületeket, mellyek az *ac, cd, de* 'sat. egyenlő oldalok' körülfordulása által képeztetnek.

E' szerint ha ezen külön oldalok' körülfordulása által származott udvarterületeket figyelemre vesszük: három esetet különböztessünk meg, u. m.

1) Ha az oldal' egyik vége a' tengely' végével összeér, mint *ac*: akkor az ezen *ac* oldal' körülfordulása által származott udvarterület (mellyet *ac*- ne

nevezünk) nem egyéb, mint ép egyenes körkúp' oldalfelülete, — melly kúpnak fenék-sugara = cI, oldalmagossága = ac. Innen:

ac. udv. terület = ½ *körület* cI × ac = *körület* mp × ac,

tudván, hogy mp = ½ cI, mivel az amp és alc hasonló △-gekben: am : ac = mp : cI.

Azonban az *ac* udvarterület' ezen kifejezete helyett csináljunk ollyat, melly a' feltett állitmányban foglaltatik. Erre nézve, az acI és Omp háromszögek, hasonlók levén, mivel oldalaik egymásra, megfelelőleg függőlegesek, áll illyen viszony:

ac : aI = Om : mp,

innen: ac × mp = Om × aI,

innen: *körület* mp × ac = *körület* Om × aI.

Az előbbi kifejezetet tehát ezen egyenlővel felcserélhetjük:

ac. udv. terül. = *körület* Om × aI. . . . . (1.)

2) Ha az oldal nem ér össze a' tengely' végével, és a' tengelylyel nem egyközü: ezen esetben azon oldal' p. o. cd' körülfordulása által származott udvarterület (mellyet *cd*-nek nevezünk) nem egyéb, mint egyközü fenekü csonka körkúp' oldal' felülete, — és lesz a' 185-dik §. szerint:

cd. udv. terület = *körület* lR × cd.

Ezen kifejezetet is változtassuk ollyanra, mellyben a' gömbre vitetett mennyiségek jöjjenek elő. Erre nézve a' dK-ra eresszük le a' cH függönyt; — ekkor a' cdH, és *lOR* háromszögek hasonlók levén, mivel oldalaik egymásra megfelelőleg függőlegesek, áll illy viszony:

cd : Ol = cH : lR.

és mivel Ol = Om, és cH = lK, lesz

cd : Om = lK : lR,

innen: IR × cd = Om × IK.

Már az előbbi egyenletben, ezen kifejezetet helyettesítvén, lesz:

cd. udv. terület = *körület* Om × IK. . . . . (2)

3) Ha az oldal a' tengelylyel egyközü, mint de: ezen esetben, annak körülfordulása által származott udvarterület (mellyet *de*-nek nevezünk), nem egyéb, mint egyenes körhenger' oldalfelülete, — és lesz a' 177. §. szerint.

de. udv. terület = *körület.* On × KV

= *körület.* Om × KV . . . . . (3)

Végre ezen három (1) (2) (3) kifejezeteket összevevén, lesz:

acde udv. terület. = *körület* Om × (aI + IK + KV)

vagy: *acde udv. terület* = *körület* Om × aV.

E' szerint az állitmány' első része meg van mutatva.

Kiterjesztvén ezen megmutatást a' felkörbe irott fél rendes sokszög' körülfordulása által eredő tömegnek egész felület-udvarára, lesz:

acdefb felület-udvar = *körület* Om × ab,

azaz: *a' körbe, vagyis ennek körülfordulása által származott gömbbe irott rendes sokszegü tömeg' felület-udvara kijö, ha ezen tömegbe bele irható kör' körülete, az ezen tömeg körül irható kör' átmérőjével sokszoroztatik.*

Most már ha a' felvett kör' körül irott rendes sokszögdarabot ACDE felveszszük, 's képzeljük bele irva lenni egy másik körbe, mellynek sugara OA: az állítmány' második része, épen olly móddal, mint az első, bebizonyíttathatik. Következőleg

ACDEFB *felületudvar* = *körület* OM × AB.

azaz: *a' kör körül, vagyis ennek megfordulása által származott gömb körül irott rendes sokszögü tömeg' fe-*

lület-udvara kijő, ha az ezen tömegbe beleírott kör' körülete az ezen tömeg körül írható kör' átmérőjével sokszoroztatik.

Követk. A' gömbbe írott rendes sokszögü tömeg' felülete = *kör.* Om × ab, — a' gömb körül írotté = *kör.* OM × AB; ezen két felületek közötti különbség lesz:

körület OM × AB — *körület* Om × ab.

Ezen különbség' kifejezetének első tagja nagyobb, mint a' második, mert AB > ab, 's következőleg, *körület* OM > *körület* Om. De látnivaló, hogy minél inkább szaporítjuk a' szülő rendes sokszögek' oldalainak számát: annál inkább közeledvén az egyenlőséghez az OM és Om sugarak, az OM körülete is, az Om körületéhez annál közelebb jár, — 's az AB és ab közt is annál kisebb lesz a' különbség. Illyen móddal a' gömb körül-, és a' gömbbe irható rendes sokszögü tömegek' felületei végetlenül közelíthetnek egymáshoz; és ekkor közülök akármellyiknek felülete, a' gömb' felületéhez is végetlenül közelít.

213. §.

A' gömb' felülete kijő, ha az azon írható nagy kör' Id. 162
körülete, az átmérővel sokszoroztatik.

Ha, az előbbi §-ban előadottak szerint, a' gömb-be, és gömb körül írható rendes sokszögek' szülő oldalainak számát végetlennek lenni gondoljuk: akkor az Om, akár OM végetlenül közelít a' gömb' sugarához = R, — és az ab, akár AB, a' gömb' tengelyéhez, vagy átmérőjéhez = 2R = D; és azon rendes sokszögü tömegek közül akármellyiknek felülete t. i *körület* Om × ab, akár *körület* OM × AB végetlenül közelit a' gömb' felületéhez, melly ehhezképest végetlenül közelítőleg így fejeztethetik ki:

gömb' felülete = *körület* R × 2R,

vagy a' gömb' felületén írható nagy kör' körületét, mellynek R a' sugara, C-nek nevezvén, a' 2R helyett pedig átmérőt = D-t vévén:

gömb' felülete = C × D

És mivel tudjuk a' fentebbiekből, (111. §.) hogy C = $\pi D = 2\pi R$: lesz

gömb' felülete = $\pi D^2 = 4\pi R^2$.

És mivel (111. §.) πR^2 = egy kör' udvara, mellynek R a' sugara: *látnivaló, hogy a' gömb' felülete négyakkora, mint az azon írható nagy kör' udvara.*

Követk. 1) A' 212 és 213. §-bani okoskodások' nyomán nyilván van, hogy a' *gömbfedő*-nek, mellyet p. o. az acd, vagy bfed körív szül, *domború udvara kijő, ha a' nagykör' körülete, a' gömbfedő' magosságával*, ak, *vagy* bk, *sokszoroztatik.*

Követk. 2) A' gömböv nem egyéb levén, mint két gömbfedő közötti különbség: nyilván van, hogy a' *gömböv' udvara is kijő, ha annak magossága, a' nagy kör' körületével sokszoroztatik.*

Követk. 3) Mivel a' gömb' felülete annyi, mint 4 nagy kör' udvara; több körök' udvarai pedig úgy vannak egymáshoz, mint sugaraik' vagy átmérőik' négylegei: innen *több gömbök' felületei is úgy vannak egymáshoz, mint sugaraik' vagy átmérőik' négylegei.* — A' *gömbfedő'* és *gömböv'* udvara úgy van a' gömb' felületéhez, mint magosságuk az átmérőhöz. — Két gömbfedő' és két gömböv' udvarai úgy vannak egymáshoz, mint sugaraiknak, vagy megfelelő vonalaiknak négylegei.

214. §.

Az ékfelület', vagy vetélő' udvara, úgy van az egész

gömb' felületéhez, vagy a' vetélő' lapszöglete úgy van 4 egyenes szöghez, a' mint van azon nagy körből körív, melly ezen lapszögletet méri, az egész körülethez.

Ugyanis ha a' gömb' felületén nehány egyenlő vetélőket csinálunk, például négyet, — azoknak lapszögletei is egyenlők lesznek, ésígy az ezeket mérő körívek is egyenlők; 's egyik egyik a' nagy körnek negyed része. És mivel ezen 4 vetélő' felülete együtt az egész gömb' felületét teszi: látnivaló, hogy egy-egy közülök úgy van az egész gömb' felületéhez, mint 1 : 4. — Így akárhányad része legyen a' nagy körnek, a' vetélő' lapszögletét mérő körív: annyid része a' gömb' felületének a' vetélő' felülete.

Így tehát, ha a' gömb' felületét kiszámítottuk: a' vetélő' felületét könnyü kiszámítni, csak azt tudjuk, hogy ennek mérő köríve hányad-része a' nagy körnek. Ha ezen hányadrészt- vagy viszonyt mutató mennyiség = N: lesz a' vetélő' felülete = $N \times \pi D^2$, vagy $N \times 4\pi R^2$.

Továbbá: mivel a' gömb' felülete, egy háromegyenesszögü gömbháromszöghez viszonyíttatván = 8; és mivel két illyen háromszög egy vetélőt képez: ha akármelly vetélő' lapszögletét az egyenes szöghez viszonyítva (melly egyenesszög = 1) A-nak nevezzük; tehát: A: 4, vagy 2A: 8: úgy van a' vetélő' felülete a' gömb' felületéhez; ésígy a' vétélő' felülete = 2A, — t. i. a' 8-hoz viszonyítva.

A' hasonló vetélők' felületei úgy vannak egymáshoz, mint sugaraiknak, vagy megfelelő köríveiknek négylegei.

215. §.

Id. 163. *Bármelly gömbháromszög' ABC (id. 163.) udvarterülete úgy van a' gömb' egész felületéhez, mint az ő 3 szögletei' összegének, két egyenesszögletet felülhaladó része, a' 8 egyenes szöglethez.*

Húzzuk ki a' gömb' felületén egész körületét azon nagy köröknek, mellyeknek körívei képzik az ABC gömbháromszöget. Ezen 3 nagy körök egymást keresztül vágván, képeznek 8 gömbháromszöget, mellyek közül minden általellenben megfelelő kettő-kettő egymással egyenlő, mivel minden részeikben egyenlő háromlapú testszögleteknek felelnek meg. Így p. o. az AFE gömbháromszög egyenlő az A'HI-vel, 'sat. —

Ez így levén: AHI + AFE együtt véve egyenlők egy vetélő-vel, mellynek szöglete = A, ésígy lapszögletének mértéke épen az, a' mi az A-nak, t. i. a' kérdéses gömbháromszög' egyik szögletének mértéke. Továbbá: BDE + BGH együttvéve (mivel BGH = B'DE) = egy vetélő, mellynek szöglete (ésígy lapszöglete is) = B, t. i. a' kérdéses gömbháromszög' másik szöglete. — Végre: CFG + CID = egy vetélő, mellynek szöglete ('s így lapszöglete is) = C, t. i. a' kérdéses gömbháromszög' harmadik szöglete.

Már (214. §. szerint) úgy van a' vetélő felülete a' gömb' felületéhez — mellyet nevezünk S-nek: mint a' lapszöglet' kettőzete, 8 egyenes szöghez.

Ésígy:

AHI + AFE : S = 2A : 8,
BDE + BGH : S = 2B : 8,
CFG + CID : S = 2C : 8.

innen, az előtagokat összeadva:

$AHI + AFE + BDE + BGH + CFG + CID : S = 2(A + B + C) : 8$

Azonban ha ezen arány' legelső tagját figyelemmel megnézzük: látjuk, hogy az nem egyéb, mint a' gömb' fél felülete, és még azon felül az ABC gömbháromszög kétszer véve. Azonban, mivel a' gömb' felülete $= 8$: annak fél felülete $= 4$. Innen az előbbi arány így lesz:

$$2ABC + 4 : S = 2(A + B + C) : 8.$$

Innen: ha az előtagokat egyformán kevesítjük, mindenikből elvevén 4-et; és mindeniket elosztván 2-vel.

$$2ABC : S = 2(A + B + C) - 4 : 8,$$
$$ABC : S = A + B + C - 2 : 8$$

azaz: *úgy ván az ABC gömbháromszög' udvarterülete a' gömb' felületéhez: mint az ő három-szögletei' összegének* 2 *egyenes szöget felülhaladó része,* $(A + B + C - 2)$, 8 *egyenes szöglethez.*

Innen, miután a' gömb' felületét kiszámítjuk, abból, felületén képezhető bármelly háromszög' udvarát, — csak ennek szögleteit ismerjük, — ki lehet számítni, — mert

$$udvar\ ABC = \frac{(szöglet A + B\ C - 2 egyenes szög) \times S}{8\ egyenes\ szög}$$

v:

$$udv.ABC = \frac{(szöglet A + B + C - 180^0) \times gömbfelület}{720.}$$

216. §.

Ha egy félkörnek „asdefb" (id. 162.) *mind körüle,* Id. 162. *mind bele, ugyanannyi oldalú, két rendes sokszögek' darabjait* acde, *és ACDE írjuk; és ezen egész idomot*

az ő tengelye AB körül megfordítjuk: az „Oacde", és OACDE sokszögű gerézdek' körülfordulása által származott testek' tömege külön külön kijő, ha az illetőleg beleírott kör' udvarának két harmada, a' felvett sokszögű tömegdarabnak a' tengelyen felvett magosságával sokszoroztatik; azaz, *az „Oacde" körbe írott sokszögű gerézd' körülfordulása által származott test' tömegtartalma* $= {}^2/_3\pi . \overline{Om}^2 \times aV$; — *és az OACDE körülírott sokszögű gerézd' körülfordulása által származott test' tömegtartalma* $= {}^2/_3\pi . \overline{OM}^2 \times AS$.

Vegyük fel elsőben a' körbeírott rendes sokszögű gerézd' körülfordulása által származott tömeget.

Csináljunk ollyan idomrajzot, mint id. 162. És nevezzük el: *tömeg Oac*-nak, *tömeg Ocd*-nek, *tömeg Ode*-nek az Oac, Ocd, Ode egyenlő háromszögek' körülfordulása által származott tömegeket. — Ha ezen tömegeket vizsgálat alá vesszük: ismét 3 esetet különböztessünk meg.

1) Ha az oldal' egyik vége a' tengely' végével összeér, mint ac: akkor a' megfelelő *Oac* tömeget úgy tekinthetjük, mint két részből állót, t. i. a) az OcI háromszög' körülfordulása által származott kúpból, és b) az acI háromszög' körülfordulása által származott kúpból. Ezen kúpoknak illető magosságaik, a' tengelynek OI és aI részei; — közös fenekük pedig a' cI sugár által képződő kör' udvara, mellynek kifejezete $= \pi . \overline{cI}^2$. Innen:

tömeg Oac $= {}^1/_3\pi . \overline{cI}^2 \times OI + {}^1/_3\pi . \overline{cI}^2 \times aI.$

vagy: *tömeg Oac* $= {}^1/_3\pi . \overline{cI}^2 \times (OI + aI).$

vagy: *tömeg Oac* $= {}^1/_3\pi . \overline{cI}^2 \times aO.$

Az *Oac* tömeg' ezen kifejezete helyett csináljunk ollyat, mellyben elöjövő mennyiségek az állitmányban foglaltatnak. Erre nézve: az Iac, és Oam háromszögek hasonlók levén, — mivel mindenikben van egy-egy egyenesszög, — és egy közös szöglet = a: tehát bennök illy arány áll:

$$ac : cI = aO : Om.$$

Továbbá ugyanazon Iac háromszög az Omp-vel is hasonló levén, — mivel oldalaik megfelelőleg egymásra függölegesek: áll bennök illy arány:

$$aI : ac = mp : Om.$$

Már ezen két arányt, tagról tagra egymással sokszorozván, és a' közös sokszorozókat kihagyván, — lesz:

$$aI : cI = aO \times mp : \overline{Om}^2;$$

innen: $cI \times aO \times mp = aI \times \overline{Om}^2$,

vagy, mivel: $mp = \frac{1}{2} cI$; lesz:

$$\frac{1}{2} \overline{cI}^2 \times aO = \overline{Om}^2 \times aI.$$

innen: $\overline{cI}^2 \times aO = {}_2\overline{Om}^2 \times aI.$

Már az imént látánk, hogy:

tömeg Oac $= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{cI}^2 \times aO$,

egyenlő helyett egyenlőt tevén:

tömeg Oac $= \frac{1}{3}\pi \cdot {}_2\overline{Om}^2 \times aI.$

vagy: *tömeg Oac* $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{Om}^2 \times aI. \ . \ . \ .$ (1)

2) Ha az oldal nem ér össze a' tengely' végével, és a' tengelylyel nem egyközü; mint dc: ezen esetben, ha megnyujtjuk a' dc-t; míg a' tengelylyel össze nem ér a' T-ben, lesz:

tömeg Ocd = *tömeg OTd* — *tömeg OTc.*

Úgyde: *tömeg OTd* = *kúp* OKd + *kúp KTd*

. . . . . = $\frac{1}{3}\pi$. $\overline{dK}^2 \times TO$;

és: *tömeg OTc* = *kúp* OcI + *kúp* TcI

. . . . . = $\frac{1}{3}\pi$. $\overline{cI}^2 \times TO$.

Innen: *tömeg Ocd* = $\frac{1}{3}\pi$ $\overline{dK}^2 \times TO - \frac{1}{3}\pi . \overline{cI}^2 \times TO$

vagy: *tömeg Ocd* = $\frac{1}{3}\pi . (\overline{dK}^2 - \overline{cI}^2) \times TO$.

Már azon négylegek' különbségét, melly kapcsok közé van zárva, sokszorozókra fejtvén, lesz:

tömeg Ocd = $\frac{1}{3}\pi$ (dK + cI). (dK — cI) × TO.

Továbbá, megjegyezvén, hogy a' *dcIK* oldalmásban dK + cI = 2*l*R; és hogy: dK — cI = dK — HK = dH: lesz:

tömeg Ocd = $\frac{2}{3}\pi$. *l*R × dH × TO.

Még az van hátra, hogy ezen kifejezetet olly alakra változtassuk, mellynek tagjai az állitmányban foglaltatvák. Erre nézve, ha a' cdH és TO*l*, valamint a' cdH és *l*OR háromszögeket, mellyek, a' fentebb adott oknál fogva, egymáshoz hasonlók, párjával összehasonlitjuk: illyen arányaink lesznek azokban:

cd: dH = TO: O*l*,

cH: cd = *l*R: O*l*;

ezeket egymással tagonkint sokszorozván:

cH: dH = *l*R × TO: $\overline{Ol}^2$,

vagy, mivel: cH = IK, és O*l* = Om:

IK: dH = *l*R × TO: $\overline{Om}^2$;

innen: *l*R × dH × TO = $\overline{Om}^2$ × IK,

ésígy végre:

tömeg Ocd = $\frac{2}{3}\pi$. $\overline{Om}^2$ × IK. . . . (2)

3) Ha az oldal a' tengelylyel egyközű, mint de: azon esetben a' deVK párlag' körülfordulása által származott hengerből kivonván azon két kúpokat, mellyek a' dOK és eOV két háromszögek' körülfordulása által származnak, lesz:

tömeg Ode $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{Om}^2 \times KV$. . . . (3)

Már most ezen három (1), (2), (3) kifejezeteket összevevén, lesz:

tömeg acdeO $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{Om}^2$ (aI + IK + KV),

vagy: *tömeg acdeO* $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{Om}^2 \times aV$.

E' szerint az állitmány' első része meg van mutatva.

Kiterjesztvén ezen megmutatást a' félkörbe irott fél rendes sokszög' körülfordulása által származott egész rendes sokszögü test' tömegtartalmára, lesz:

tömeg acdefb $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{Om}^2 \times ab$.

azaz; *a' körbe, vagyis ennek körülfordulása által származott gömbbe irható rendes sokszögű test' tömegtartalma kijő, ha ezen testbe bele irható kör' udvarának két harmada, az ezen test körül irható kör' átmérőjével sokszoroztatik.*

Most már, ha a' felvett kör körül irott rendes sokszög-darabot ACDE felvesszük, 's képzeljük bele irva lenni egy másik körbe, mellynek sugara OA: az állitmány' másik része, épen olly móddal, mint az első, bebizonyíttathatik. Következőleg:

tömeg ACDEFB $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{OM}^2 \cdot AB$.

azaz; *a' kör körül, vagyis ennek megfordulása által származott gömb körül irható rendes sokszögü test' tö-*

megtartalma kijő, ha ezen testbe beleírott kör' udvarának két harmada, az ezen test körül írható kör' átmérőjével sokszoroztatik.

Következm. A' gömbbe írott rendes sokszögü test' tömege $= \frac{2}{3}\pi . \overline{Om}^2 \times ab$; — a' gömb körül irotté pedig $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OM}^2 \times AB$. — A' két test' tömege közötti különbség lesz tehát:

$$= \frac{2}{3}\pi . (\overline{OM}^2 \times AB - \overline{Om}^2 \times ab).$$

Ezen különbség' kifejezetének első tagja mindig nagyobb a' másodiknál. De látnivaló, hogy minél inkább szaporitjuk a' szülő rendes sokszögek' oldalainak számát: annál inkább közeledvén az egyenlőséghez az OM és Om sugarak, — az AB és ab közt is annál kisebb lesz a' különbség. Illy móddal, a' gömb körül, és gömbbe írható rendes sokszögü testek' tömegtartalmai végetlenül közelíthetnek egymáshoz, és ekkor közülök akármellyiknek tömegtartalma a' gömb' tömegtartalmához is végetlenül közelít.

217. §.

A' gömb' tömegtartalma kijő, ha az azon írható nagy kör' udvarának két harmada az átmérővel sokszoroztatik.

Ha az előbbi §-ban előadottak szerint, a' gömbbe és gömb körül írható rendes sokszögü testek' szülő oldalainak számát végetlennek lenni gondoljuk: akkor az Om, akár OM végetlenül közelít a' gömb' sugarához $= R$, — és az ab, akár AB, a' gömb' tengelyéhez, vagy átmérőjéhez $= 2R = D$; — és azon rendes sokszögü testek közül akármellyiknek tömegtar-

talma, t. i. akár: $\frac{2}{3}\pi$. $\overline{Om}^2 \times ab$, akár: $\frac{2}{3}\pi$. $OM^2 \times AB$, végetlenül közelít a' gömb' tömegtartalmához; melly is ehhezképest végetlenül közelítöleg így fejeztetik ki:

gömb tömege $= \frac{2}{3}\pi \quad R^2 \times 2R$

vagy: $= \frac{2}{3}\pi \quad R^2 \times D$

vagy: $= 4\pi \,.\, R^2 \times \frac{1}{3} R$

vagy: $= \frac{4}{3}\pi \,.\, R^3$

vagy: $= \frac{1}{6}\pi \,.\, D^3 = (\frac{2}{3}\pi . \frac{1}{4} D^2 \times D = \frac{2}{12}\pi D^3)$

melly különböző kifejezetek mind a' gömb' tömegtartalmát mutatják. A' harmadikból láthatjuk, hogy a' *gömb' tömegtartalma kijő, ha annak felülete, egy harmadrész sugarával sokszoroztatik*

A' negyedik kifejezetből, t. i. $= \frac{4}{3}\pi \,.\, R^3$, pedig azt láthatjuk, hogy mivel a' $\frac{4}{3}\pi$ minden gömbök körül változatlanul marad, — és csak a' másik sokszorozó, t. i. R^3 változik a' különböző gömbök szerint: tehát *különböző gömbök' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint sugaraik' — koczkahatványai.*

218. §.

A' mondottakon alapulnak e' következő — a' tanuló által könnyen bebizonyitandó — állitmányok:

1) *A' gömbgerézd' tömegtartalma kijő, ha az annak fenékül szolgáló gömbfedő' udvara, egy harmadrész sugárral sokszoroztatik.*

2) *A' gömbgerézd' tömegtartalma úgy van az egész gömb' tömegtartalmához, mint a' gerézdnek fenékül szolgáló gömbfedő' magossága az átmérőhöz.*

3) *A' hasonló gömbgerézdek' tömegtartalmai úgy vannak egymáshoz, mint sugaraiknak, vagy megfelelő vonalaiknak koczkahatványai.*

4) *A' gömbszeletnek, vagy pillének tömegtartalma kijő, ha a' megfelelő gömbgerézd' tömegéből, a' megfelelő kúp' tömege kivonatik.*

5) *A' karika' tömegtartalma annyi, mint azon két pillék' tömegtartalmai közötti különbség, mellyeknek fenekeit a' karika' fenekei képezik.*

6) *Az ugyanazon fenekű és magosságú „kúp"", „gömb"" — és „henger"" tömegtartalmaik (kúp* $= \frac{1}{3}\pi R^3$, *gömb* $= \frac{4}{3}\pi R^3$, *henger* $= \frac{6}{3}\pi R^3$) *úgy vannak egymáshoz, mint* $\therefore$ *1 : 2 : 3.*

Jegyz. Archimedes ezen tételt bizonyitotta be, 's ebből hozta le a' tömegtartalmának kifejezetét. Ez ama híres archimedesi állitmány. — Archimedes sírkövére gömböt és hengert metszetett, mellyről Cicero Syracusában sírjára rátalált.

7) *A' gömbnek, — az a' körül irott hengernek, és a' körülirott egyenoldalú kúpnak tömegtartalmaik úgy vannak egymáshoz, mint* $\therefore$ 4 : 6 : 9. Ésígy a' henger ama kettő között tértani középszeres.

8) *A' gömbnek, — a' beleirott egyenoldalú hengernek, — és a' beleirott egyenoldalú kúpnak tömegtartalmaik úgy vannak egymáshoz, mint* $\therefore$ 32 : 12 $\sqrt{}$ 2 : 9. Ésígy a' henger ama kettő közt is tértani középszeres.

HATODIK CZIKKELY.

Terület- és tömegtant illető gyakorlati feladatok.

219. §.

I. *Egy párlag' udvara 135* □ *öl,- talpa és magossága úgy vannak egymáshoz, mint 5 : 3. — Ezen talpat és magosságot megtalálni.*

Legyen a' magosság = x, így a' talp lesz $\frac{5x}{3}$,

és az udvar x. $\frac{5x}{3}$, vagy $\frac{5x^2}{3}$. És $\frac{5x^2}{3} = 135$, —

innen: $x^2 = 81$, $x = 9$, és $\frac{5x}{3} = 15$.

II. *Egy párlag' udvara* 54 □ *öl, talpa* 3 *öllel hosszabb, mint magossága. — Talpát és magosságát megtalálni.*

Legyen a' magosság = x, a' talp lesz e' szerint = x+3, és az udvar = x. (x+3); innen x (x+3) = 54; — $x^2 + 3x = 54$. Ebből: $x = 6$; $x+3 = 9$

III. *Valamelly kiadott négyleg' udvarával* = a^2, Id. 164. *egyenlő udvarú ollyan párlagot csinálni, mellynek talpa és magossága közötti különbség legyen egy bizonyos adott vonal AF* (id. 164.)

Hogy ezen fel adatot tértanilag megfejtsük: az AF-fel, mint átmérővel csináljunk kör-körületet; az A pontra függőlegesen állítsuk fel az AB-t, melly az adott négyleg' old alával = *a* egyenlő legyen; a' B pontból, a' kör' középpontján keresztül húzzunk BE szelőt. A' BD és BE vonalak lesznek a' párlagnak keresett talpa és magossága, mert ezek közötti különbség = DE = AF, — azonban, mint fentebb tanultuk — az AB érintő levén a' körületre: $\overline{AB}^2 = a^2 = BD \times BE$.

IV. *Egy párlag' udvara* 35 □ *öl, a' talp' és magosság' összege* = 20 *öl: ezeket megtalálni.*

Legyen a' magosság = x, a' talp = 20—x,

— udvar = x (20—x) = $20x - x^2$, — és $20x - x^2 = 35$, innen: $x = 10 - \sqrt{65} = 18{,}06$, és $20 - x = 1.94$

V. *Valamelly kiadott négyleg' udvarával* $= a^2$ *egyenlő udvarú ollyan párlagot csinálni, mellynek talpának és magosságának összege legyen egy bizonyos adott vonal BD.* (id. 165).

Id. 165.

Hogy ezen feladatot tértanilag megfejthessük: a' BD vonallal, mint átmérővel, kört csinálván, — a' B pontra emeljük a' BF függönyt, melly az adott négyleg' oldalával egyenlő legyen = a. — Az F pontnál húzzunk a' BD-vel egyközüt = FE, és az E pontról eresszünk az átmérőre függönyt = EA. — Ekkor a' BA és AD lesznek a' keresett párlagnak talpa és magossága, mert 1) azoknak összege a' kiadott BD vonal, 2) $AB \times AD = \overline{AE}^2 = \overline{BF}^2 = a^2$.

220. §.

VI. *Az OBC egyenoldalú háromszögnek (id. 166) egyegy oldala* $= 12$ *öl: udvarát megtalálni.*

Id. 166.

Ezen háromszög' magossága = OH, a' BC oldalt két egyenlő részre osztja, BH = HC = 6. — Úgy de a' COH egyenesszögü △-ben:

$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2}$. Azonban $OC = 12, CH = 6$.

Ésígy: $OH = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10{,}392$.

innen: *udvar* OBC = OH × CH = 62,35 □ öl.

Id. 167.

VII. *Megtalálni udvarát az ABC háromszögnek (id. 167), mellynek oldalai:* $AB = 8$, $AC = 7$, $BC = 5$.

Legyen az AD magosság = h, és a' BD darab = x. Ekkor DC = 5 − x. — És az ADB és ADC egyenesszögü háromszögekben illy egyenletek állanak:

$$h^2 = 8^2 - x^2$$
$$h^2 = 7^2 - (5 - x)^2$$

innen: $8^2 - x^2 = 7^2 - (5-x)^2$

innen: $x = 4$, — és: $h = \sqrt{8^2-4^2} = \sqrt{64-16}$

$h = \sqrt{48} = 6{,}9282...$

udvar $ABC = \frac{1}{2}h \times BC = 3{,}4641... \times 5 = 17{,}320...$

$= 17{,}320..$ □öl.

VIII. *Az ABC (id. 168) háromszög' udvarát, az AB oldalhoz egyközű vonalak által egyenlő részekre osztani.* id. 168.

Tegyük fel, hogy a' feladat meg van fejtve, és hogy GF és EH azon keresett vonalak, mellyek a' háromszöget egyenlő részekre osztják. Ha ez így van: akkor

$\triangle ACB : \triangle GCF : \triangle ECH = 3 : 2 : 1$. Úgyde:

$\triangle ACB : \triangle GCF : \triangle ECH = \overline{CB}^2 : \overline{CG}^2 : \overline{CE}^2$.

Ésígy: $\overline{CB}^2 : \overline{CG}^2 : \overline{CE}^2 = 3 : 2 : 1$.

vagy: $\overline{CB}^2 : \overline{CG}^2 : = 3 : 2$,

$\overline{CB}^2 : \overline{CE}^2 = 3 : 1$.

Már ha a' CB oldal kiadatik számokban: meg lehet határozni, mind a' CG-t, mind a' CE-t, vagyis a' G, és E pontoknak a' BC oldalon hova esését, — melly pontokról kell pedig az AB-vel egyközü vonalakat húzni.

221. §.

IX. *Egy négyleg' oldala 5 öl: megtalálni az ebbe beleírott, és köréje írott kör' udvarát.*

A' beleírott kör' sugara = r, annyi, mint a' négyleg oldalának fele. A' köréje írott kör' sugara = R pedig

annyi mint a' négyleg' szögszelőjének fele. Tehát: $r = {}^5/_2$ öl, $R = {}^1/_2\sqrt{50}$.

Tehát: a' *beleírott kör' udvara* $= \pi r^2 = \pi \times {}^{25}/_4$,

és: a' *körülírott kör' udvara* $= \pi R^2 = \pi \times {}^{50}/_4$.

Az utóbbi kör' udvara tehát kétakkora mint, az előbbié.

A' $\pi = 3{,}14$ levén: lesz a' beleírott kör' udvara $= 3{,}14 \times {}^{25}/_4 = 19{,}625$ . . . □ öl. 'sat.

X. *Egy rendes hatszög' oldala = 6 öl: megtalálni a' bele írott, és körűleírott körök' udvarait.*

Mivel a' körűleírott kör' sugara, egyenlő a' rendes hatszög' oldalával $= 6^0$, — a' beleírott kör' sugara lesz $= \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$.

Következőleg:

körülírott kör' udvara $= \pi \times 36 = 3{,}14 \times 36 = 113{,}14$.□^{0}

beleírott kör' udvara $= \pi \times 27 = 3{,}14 \times 27 = 84{,}85$ □^{0}.

XI. *Egy kör' körületéből, mellynek sugara = 2,5 öl, 87,53 foknyi körív hosszát = x, öl-mértékben megtalálni.*

Az egész körület ölmértékben $= 2\pi \times 2{,}5$, vagy $= 15{,}7$. Innen:

$360 : 87{,}53 = 15{,}7 : x$, innen: $x = 3{,}82$ .. öl.

XII. *Kiszámítni a' körgerézd' udvarát x, mellynek köríve = 87,53 fok, és sugara = 2,5 öl.*

Miután — a' XI. szerint — 87,53 foknyi körív $= 3{,}82$ .. öl: lesz a' körgerézd' udvara, t. i.

$x = (3{,}82 \ldots \times 2{,}5 \times {}^1/_2)$ □ öl $= 4{,}775$ □ öl.

222. §.

XIII. *Egy párlap' tömegtartalma = 840 koczkaöl, — 's három mértékei (széle, hossza, magossága) úgy vannak egymáshoz, mint 7, 5, 3: kitalálni ezen mértékeit.*

A' keresett három mértékeit így fejezhetni ki: 7x, 5x, 3x. Innen a' párlap'tömegtartalma = 7x . 5x . 3x = $105x^3$ = koczkaöl.

Úgyde: $105x^3 = 840$; innen: $x^3 = 8$, és $x = 2$.

Innen: a' három mértékek = 14, 10, 6 ölek.

XIV. *Adatván a' kúp' magossága (id. 169) SO = 15⁰, — fenéksugara OA = 6⁰, — a' tetőtől az A'O'B' metszékig való távolság SO' = 4⁰: megtalálni a' csonka kúpnak ABB'A' 1) oldalfelületét, 2) tömegtartalmát.*

1) Előbb is ki kell számítni az A'O'B' felső fenék' sugarát, illy arányon:

$$SO : SO' = AO : A'O', \text{ mellyből:}$$

$$A'O' = \frac{AO \times SO'}{SO} = \frac{24}{15} = \frac{8^0}{5}$$

Innen:

$$\text{felület } ABB'A' = \frac{2\pi \times OA + 2\pi \times A'O'}{2} \times OO' = \pi \times \frac{418\square^0}{5}$$

$$= 262{,}74\ldots \square \text{ öl.}$$

2) SAB *kúptömeg* $= \frac{1}{3}\pi\, SO \times \overline{AO}^2 = \pi\, 180\,\square^0$

SA'B' *kúptömeg* $= \frac{1}{3}\pi\, SO' \times \overline{A'O'}^2 = \pi \cdot \frac{256\square^0}{75}$

Innen:

ABB'A' *csonka kúptömeg* $= \pi \times \left(180 - \frac{256}{75}\right)$ koczkaöl

$= 554{,}986$ koczkaöl.

XV. *Feltévén, hogy földünk tökéletes gömb, 's sugara 860 mértföld: kiszámítni annak 1) körületét, 2) felületét, 3) tömegtartalmát*

1) *körülete* $= 2\pi.R = 2 \times 3{,}1416 \times 860 = 5403{,}55$ mf.

2) *felülete* $= 4\pi R^2 = 4 \times 3{,}1416 \times (860)^2 = 9294103 \square$mf.

3) *töm. tartal.* $= 4\pi.R^2 \times \frac{1}{3}R = 2658113458$ koczka mf.

XVI. *A' nap' átmérője a' földénél 112,88-szorta nagyobb: hát a' nap' tömegtartalma mi viszonyban van a' földéhez?*

A' gömbök' tömegtartalmai olly viszonyban vannak egymáshoz, mint sugaraiknak, vagy átmérőiknek koczkahatványai. Ésígy:

nap' tömege: földtömeg $= (112{,}88)^3 : (1)^3$

innen a' nap' tömege 1408250-szer nagyobb, mint a' földé.

23. §.

XVII. *Henger-mérő pálczát készíteni.*

Henger-mérő pálczának neveztetik az ollyan eszköz, mellyel megvizsgáljuk, hogy valamelly kis henger' tömegtartalma mi viszonyban van egy hasonló nagyobb hengeréhez. Ez kétféle: *kettős*, és *általlós*.

1) *Kettős-t* így lehet készíteni. Felvevén egy ismert tartalmú kis hengert, p. o. egy akóst, annak fe-
Id. 107. nék-átmérőjét $= ab$ letesszük papirosra (id. 170.), p. legyen $= a\text{-}1$; ekkor az a pontnál ugyanakkora

vonalat egyenes-szögre állítunk = *ab*, 's kihúzván a' feszesoldalt = b-1 : ez — a' pythagorasi állítmány szerint — két akós henger' fenék-átmérője lesz, — ugyanollyan magossághoz; — ezen b-1 vonalat tehát lefektetjük az *a* pontból kezdve = a-2. Most a' b-től a' 2-re húzunk feszesoldalt, 's b-2 — lesz 3 akós — ugyanollyan magosságú henger' fenék-átmérője, — 's ezt is az *a*-tól kezdve lefektetjük = a-3. Így meghatározván — feszes-oldalok' húzása által a' 4, 5, 6, 'sat. akós — ugyanollyan magosságú — hengerek' átmérőit, — 's mindazokat az *a* ponttól kezdve lefektetvén: miután ezen mérték papiroson készen van, — szabatosan felrójuk azt fa- vagy vaspálczára. Már ha ezen pálcza-mértékkel, valamelly henger' fenekének átmérőjét megmérjük: meglátjuk, hányszorta nagyobb azon fenék' területe, a' mi kis hengerünk' fenék-területénél. És ha ezen nagy hengernek magossága épen akkora volna, mint a' mi kis hengerünké: annak tömegtartalma, annyiszorta nagyobb volna a' mi kis hengerünkénél, a' hányszorta nagyobb fenékterülete. De mivel annak magossága nagyobb: tehát azt is meg kell tudni, hányszor van meg a' kisebbik henger' magossága a' nagyobbikéban. — E' végre a' pálcza' másik oldalára a' kis henger' magossága néhányszor felrovatik; 's azzal a' nagy henger' magossága megméretvén: ha a' magosságot mutató szám, a' fenék-átmérőt mutató számmal sokszoroztatik: kijő a' nagy henger' tömegtartalma, p. o. mutatna a' fenék 5-t, a' magosság 3-t: lenne a' tömegtartalom = $3 \times 5 = 15$ akós. — Azonban, mivel a' mi hordóink' átmérője középen nagyobb, mint a' két végen: tehát a' szájokon is bedugván a' pálczát, az ottani- és a' fenék-átmérő közt közép-

szerest kell venni, 's azzal sokszorozni a' magosságot.

Id. 171. 2) Az *általlós hengermérő pálcza* így készül: (id. 171.) felvévén egy határozott tömegtartalmú, p. egy akós, ollyan kis hengert, mellynek magossága fenék-átmérőjével egyenlő legyen: ki kell keresni annak szögszelőjét, vagy általlóját = *ac*, a' legkisebb mértékben, p. vonalban, — t. i. $ac = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2}$. Ezt le kell tenni papirosra. Már ki kell keresni két — három — négy — 'sat. akós, ollyan hengerek' szögszelőit, mellyeknek magosságuk akkora, mint fenék-átmérőjök. De miképen? Tudjuk, hogy a' hasonló testek' tömegeik úgy vannak egymáshoz, mint megfelelő vonalaik' — p. o. szögszelőik' koczkahatványai; — vagy megfordítva, a' szögszelők' koczkahatványai úgy vannak, mint a' tömegek. Ha tehát tudnám p. o. hogy egy akós' illy kis henger' szögszelője = 25 hüvelyk = ac: kikeresném a' két akós' hasonló henger' szögszelőjét illy arányon: $1 : 2 = \overline{25}^3 : x^3$, és $x = \sqrt[3]{2 \times \overline{25}^3}$; — a' 3 akósét így: $1 : 3 = \overline{25}^3 : x^3$, 's innen ismét $x = \sqrt[3]{3 \times \overline{25}^3}$. Így kikeresvén néhányét, — 's felróván, egy közös kezdőpontból, fa- vagy vaspálczára: kész az általlós hengermérő pálcza; de a' mellyel közvetlen csak ollyan hengert lehet mérni, mellynek magossága egyenlő fenék-átmérőjével. Ebbe ha szögszelőleg bele dugom: megmutatja, hányszorta nagyobb ennek tömegtartalma a' felvett kis hengerénél.

Lehet azonban ezzel olly hengert is mérni, mellynek magossága két-akkora, mint fenék-átmérője, mint

p. a' minők rendesen a' mi hordáink; — t. i. ez a' hordó száján a' fenék' aljára dugatván, a' hordó' felének öblösségét mutatja, — mellyet kétszer vévén, — vagy pedig a' pálczára teendő' rovásokat kétszerezvén, — kitünik az egész hordó' öblössége; — legalább ki fogna tünni hibátlanúl — ha a' hordó hasas nem volna.

TARTALOM.

	Lap.
Előismeretek 1-től 4-dik §-ig	1— 4

ELSŐ SZAKASZ.

Vonaltan.

1. CZIKK. A' vonalakról 5—8 §.	5— 9
2. CZIKK. A' körről 9—11. §.	9— 12
3. CZIKK. A' szögletekről 12—17 §.	12— 17
4. CZIKK. A' függőleges és hajlott vonalakról 18. §.	17— 19
5. CZIKK. Az idomokról általában, 's különösen a' háromszögről 19—29. §.	19— 27
6. CZIKK. Az egyközü vonalakról, 's azok körülti szögletekről 30—37. §.	27— 34
7. CZIKK. A' sokszögekről általában, 's különösen a' négyszögek' fajairól 38—50 §. . . .	34— 41
8. CZIKK. A' vonalak és idomok' arányosságáról 's hasonlóságáról 51—64. §.	41— 57
9. CZIKK. A' körhöz viszonyított vonalakról és szögletekről 65—75. §.	57— 66
10. CZIKK. A' rendes sokszögekről, 's azoknak körhözi viszonyáról 76—83. §.	66— 76
11. CZIKK. Néhány hosszmérési feladatok 84—90. §.	76— 84

MÁSODIK SZAKASZ.

Területtan.

1. CZIKK. Az egyenes vonalakkal zárt sik-idomok' udvarának méréséről 91—100. §. . .	85— 93
2. CZIKK. Az egyenes vonalakkal zárt síkidomok udvarainak arányosságáról 101—110. §. .	94—101
3. CZIKK. A' kör' udvaráról 111—114. §. . . .	101—105

Lap.

4. CZIKK. Az egyenes vonalaknak és síklapoknak egymás iránti helyzetéről 115—137 §. 105—124

HARMADIK SZAKASZ.

Tömegtan.

1. CZIKK. Általános ismeretek a' tömegekről 138—141. §. . . . . 125—131

2. CZIKK. A' síklapokkal zárt, vagyis soklapú tömegekről általában, — azok' egyenlőségéről és hasonlóságáról 142—160. §. . . . . 131—143

Jelesen:

a) négylapúakról 143—148. §. . . . . 132—135

b) csúcsoszlopokról 149—152. §. . . . 135—138

c) szögoszlopokról 153—154. §. . . . 139—140

d) párlapokról 155—157. §. . . . . 140—141

e) bárminemű soklapúakról 158—160 §. . 141—143

3. CZIKK. A' soklapúak' felületének méréséről 's arányáról 161—162. §. . . . . 143—145

4. CZIKK. A' soklapúak' tömegtartalmának méréséről 's arányáról 163—174. §. . . . . 145—163

Jelesen:

a) párlapok' tömegméréséről 164—166. §. 146—151

b) szögoszlopok' tömegméréséről 167—168. §. . . . . 151—154

c) négylapúak',- csúcsoszlopok', 's bárminő soklapúak tömegméréséről 169—173 §. 154—161

d) soklapúak' tömegarányáról 174. §. . . 162—163

5. CZIKK. A' domboru felületü tömegekről 175—218. §. . . . . 163—206

Jelesen:

a) körhengerről 176—179. §. . . . . 163—166

b) körkúpról 180—187. §. . . . . 166—172

c) gömbről 188—218. §. . . . . 172—206

6. CZIKK. Terület- 's tértant illető gyakorlati feladatok 219—223 §. . . . . 206—215

JAVÍTANDÓK.

lap.	*sor.*	*hiba*	*javítás.*
8	9 (alul)	fe	fc.
—	8 —	fe	fc.
—	5 —	a' *t*	az *f*.
—	3 —	pg	pq.
10	5 (felül)	EGFHE	EGFE.
13	1 (alul)	ca CA	ca = CA.
15	2 (felül)	ACE	ECB.
20	6 (alul)	= ed	= *ef*.
31	3 (felül)	z + t = t + v	z + t = x + v.
37	14 —	aAB, bBC, cCD, . . .	ABb, BCc, CDe,
—	8 (alul)	$\times 2r = n - (n-2) \times 2r$.	$\times 2r = [n - (n-2)] \times 2r$
40	1 (felül)	(id. 47)	(47. §.).
41	10 (alul)	nyégszög	négyszög.
45	1 —	$\sphericalangle ABD = D \sphericalangle BC$ . . .	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$
46	14 —	az AI-ben egyenlő . . .	az AI-ben 2 egyenlő
—	12 —	AC = CD	AC : CD
57	3 (felül)	$\sphericalangle$ = cde	= $\sphericalangle$ cde
69	14 (alul)	vagy	vagyis
75	10 —	kór-lete	körülete
76	11 (felül)	körületnek átmérőhözi . .	átmérőnek körülethezi
82	1 (alul)	lé sulymerővel	légsulymérővel
88	4 —	v. □ öl	v. egy □ öl
89	11 —	udvára	udvara
—	7 —	változtani	változtatni
90	6 (felül)	mivel △ ABC	mivel △ ABD
92	10 —	*kerítés* × *apoth.* . . .	*kerítés* × *felapoth.*
96	1 —	oldaik	oldalaik.
—	14 (alul)	egyenes-szogű, háromszög .	egyenes-szögű háromszög
98	14 (felül)	X, Y, Z, ...	x, y, z.
101	3 —	$\overline{aC}^2 : \overline{bB}^2$	$\overline{aC}^2 : \overline{bC}^2$
105	5 —	tehát, fele	tehát fele,
107	2 (alul)	egy sikot	egy közös sikot

lap.	*sor.*	*hiba*	*javítás.*
117	11	(alúl) határvonallal	határvonalnál
126	9	(felül) pedig domború	vagy pedig domború
148	7	(alúl) erülettanban	területtanban
149	7	(felül) fekvő feneke	felső feneke
		nb. a' 166. §-t. illető 144-dik idomon — alább — teendő javitásra figyelmezzen az olvasó.	
159	2	(felül) (id. 105)	(id. 150.)
161	9	— A' párlapra	A' pár-párlapra
—	13	— $+\frac{(CC'+DD')}{4}AB$ . . .	$+\frac{(CC'+DD')}{4}.AB$
162	4	— magosságaiknvk	magosságaiknak
169	14	(alúl) P-nek a' kúp'	P-nek,- a' kúp'
179	14	— középpontján	középpontján
192	19	— $=om\times aV$	$=$ *körület* $om\times aV$
—	17	— $=OM\times AS$	*körület* $OM\times AS$.
194	16	— felkörbe , ...	félkörbe
196	16	— ak *vagy* bk	aK *vagy* bK
199	23	(felül) *szöglet* A+B C—2 . .	*szöglet* A+B +C—2
—	3	(alúl) „asdefb“	„acdefb“
205	5	(felül) $=\frac{2}{3}\pi\ R^2\times 2R$ . . .	$\frac{2}{3}\pi\ .\ R^2\times 2R$
—	6	— $=\frac{2}{3}\pi\ R^2\times D$ . . .	$\frac{2}{3}\pi\ .\ R^2\times D$
—	19	— sugaraik'— koczkahatványai .	sugaraik' koczkahatványai
207	2	(alúl) $x=10\ \sqrt{65}$	$x=10\pm\sqrt{65}$
208	1	— $-(5\quad x)^2$	$-(5-x)^2$

Idomok' javítása.

I. tábla. 12. id. a' HE és EGF húrok, egyenes vonalak legyenek.
II. táb. 78. id. a' CAE vonal a' körület' metszéspontjára menjen.
IV. táb. a' 109-dik mellett szám nélkül álló idom = 110-dik.
VI. táb. 144. id. a' D betü nem jó helyre van téve; — tetessék az az LO vonalra oda, hol a' C-től és E-től az LO-ra menő egyenes vonalak összejőnek, a' C-től felfelé irányozva, olly móddal, hogy CD legyen az IL-lel egyközü és egyenlő.
— — 146. idomon a' BbB' vonal' folytatása' végin legyen még *b'*.
— — 154. idom' csúcsára *S* betü tetessék.
VII. táb. 157. id. az AE és EC belső vonalak, körív alakúak legyenek.

1961 MAJ 2

1971 AUG -

2009 SEP 14

2009 SEP 06

1982 FEB 10

2016 SEP 16

2016 SEP 16